ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 3 (478)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.96:519.6

А.Ф. ГАЛИМЯНОВ

К ПРЯМЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИ ОСЛАБЛЕННЫМИ ЯДРАМИ КОШИ НА РАЗОМКНУТЫХ КОНТУРАХ

Рассматривается уравнение

$$x(t)+\int_{-1}^{1}\frac{g(t,\tau)x(\tau)}{\tau-t}\ln^{-m}\frac{c}{|\tau-t|}d\tau=y(t),\quad t\in[-1,1], \tag{1}$$

где $g(t,\tau)$, $y(t)$ — известные функции, $x(t)$ — искомая функция, $0<m<1$, c — определяемая ниже постоянная.

Приближенному решению сингулярных и слабо сингулярных интегральных уравнений посвящено большое количество работ (см., напр, обзоры в [1]–[4]). Уравнение (1) является в некотором смысле промежуточным между сингулярными и слабо сингулярными интегральными уравнениями. В данной работе рассматриваются коллокационные методы решения уравнения (1). Вначале, следуя [5], исследуем свойства соответствующего сингулярного интеграла. Затем, опираясь на известные результаты из конструктивной теории функций и общей теории приближенных методов ([6], с. 19), проводим обоснование методов типа коллокаций на основе полиномов и сплайнов первого порядка. Обоснование этих методов проведено в обобщенных пространствах Гёльдера [5].

1. *О свойствах сингулярного интеграла на разомкнутом контуре.* Введем множество $\Phi=\{\varphi\}$ положительных функций φ, удовлетворяющих условиям

а) $\lim\limits_{\delta\to 0+}\varphi(\delta)=0$;

б) $\varphi(\delta)$ почти возрастает;

в) $\sup\limits_{\sigma>0}\frac{1}{\varphi(\sigma)}\int\limits_0^{\sigma}\frac{\varphi(t)}{t}dt<\infty$;

г) $\sup\limits_{\sigma>0}\frac{\sigma}{\varphi(\sigma)}\int\limits_0^{l}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt<\infty$, $l=\mathrm{const}>0$.

Функция $x(t)$ принадлежит множеству H_φ, $\varphi\in\Phi$, если

$$\omega(x,\delta)\le d_x\varphi(\delta),\quad 0<\delta<b-a,$$

где через $\omega(x,\delta)$ обозначен модуль непрерывности функции $x(t)$, $t\in[a,b]$, определенный по формуле

$$\omega(x,\delta)=\sup_{|t-\tau|\le\delta}|x(t)-x(\tau)|,\quad 0<\delta<b-a.$$

В H_φ введем норму

$$\|x\|_{H_\varphi}=\|x\|_c+H(x,\varphi),\quad H(x,\varphi)=\sup_{\delta}\frac{\omega(x,\delta)}{\varphi(\delta)},$$

с которой H_φ становится пространством Банаха.

Пусть функция $x(t)$ непрерывна на $[a,b]$. Введем для нее модуль непрерывности на любом отрезке $[c,d]$, содержащемся в (a,b),

$$\omega(x,\delta,[c,d]) = \sup_{c\le t_1,t_2\le d,\ |t_1-t_2|\le\delta} |x(t_1)-x(t_2)|.$$

Для непрерывной в $[a,b]\times[a,b]$ функции $f(u,t)$ аналогично [3] введем частные модули непрерывности

$$\omega(f,\delta_1,0,[c_1,d_1],[c_2,d_2]) = \sup|f(u_1,t)-f(u_2,t)|,$$

где sup берется по $u_1,u_2\in[c_1,d_1]$, $t\in[c_2,d_2]$ при $|u_1-u_2|\le\delta_1$;

$$\omega(f,0,\delta_2,[c_1,d_1],[c_2,d_2]) = \sup|f(u,t_1)-f(u,t_2)|,$$

где sup берется по $u\in[c_1,d_1]$, $t_1,t_2\in[c_2,d_2]$ при $|t_1-t_2|\le\delta_2$; здесь $a<c_1<d_1<b$, $a<c_2<d_2<b$.

Для сингулярного интеграла

$$S(u) = \int_a^b \frac{f(u,s)}{s-u}\ln^{-m}\left|\frac{c}{s-u}\right|ds, \quad 0<m\le 1, \quad u\in[a,b], \tag{2}$$

где для простоты выкладок без ограничения общности предполагается $c>e^m(b-a)$, справедлива

Теорема 1. *Пусть $f(u,s)$ непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$, $f(a,a)=f(b,b)=0$ и выполнены условия*

$$\int_a^b |f(u,t)|dt<\infty \quad \forall u\in(a,b);$$

$$\int_0^{(b-a)/2}\frac{\omega(f,0,t,[(a+u_1)/2,(b+u_2)/2];[(a+u_1)/2,(b+u_2)/2])}{t}dt<\infty$$

для любых $u_1,u_2\in[a,b]$.

Тогда для интеграла (2) верны оценки

$$|S(u)|\le 8\int_0^{l/2}\frac{\omega(f,t,0)}{t}\ln^{-m}\frac{c}{t}dt+7\int_0^{l/2}\frac{\omega(f,0,t)}{t}\ln^{-m}\frac{c}{t}dt, \tag{3}$$

$$\omega(S(u),\delta)\le\left(6+2^{m+2}\ln^{-m}\frac{c}{\delta}\right)\int_0^{\delta}\frac{\omega(f,t,0)}{t}\ln^{-m}\frac{c}{t}dt+$$

$$+\delta\left(86+30\ln^{-m}\frac{c}{\delta}\right)\int_0^{l/2}\frac{\omega(f,0,t)}{t(t+h)}\ln^{-m}\frac{c}{t}dt+2\omega(f,\delta,0)\eta(\delta),$$

где $l=b-a$, $\eta(\delta)=\ln\ln c/\delta$ при $m=1$, $\eta(\delta)=\ln^{1-m}c/\delta$ при $0<m<1$, $0<\delta<c$.

На $[0,1]$ введем функцию

$$w(\varphi;\delta)=\int_0^{\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau+\delta\int_{\delta}^{2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau+\delta\int_{\delta}^{2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\ln^{-m-1}\frac{c}{\tau}d\tau.$$

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi\in\Phi$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^2\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau<\infty.$$

Тогда справедливы утверждения

1) *$w(\varphi;\delta)$ возрастает;*
2) $\lim\limits_{\delta\to 0} w(\varphi;\delta)=0$;
3) *$\frac{w(\varphi;\delta)}{\delta}$ убывает;*
4) *если $\varphi_1(\delta)=o(\varphi_2(\delta))$, то $w(\varphi_1;\delta)=o(w(\varphi_2;\delta))$, $\delta\to 0$;*
5) *если $\varphi_1\sim\varphi_2$, то $w(\varphi_1;\delta)\sim w(\varphi_2;\delta)$;*
6) *если $\varphi_1=O(\varphi_2)$, то $w(\varphi_1;\delta)=O(w(\varphi_2;\delta))$, $\delta\to 0$.*

Обозначим через ΦH множество всех $\varphi(\delta) \in \Phi$, для которых выполнены условия

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau} \ln^{-m} \frac{c}{\tau} d\tau < \infty, \quad w(\varphi, \delta) = O\Big(\varphi(\delta) \ln^{-m} \frac{c}{\delta}\Big), \quad \delta \in (0,1).$$

Рассмотрим интегральный оператор с логарифмически ослабленной особенностью вида

$$Sgx = \int_{-1}^{1} \frac{g(u,t)x(t)}{t-u} dt. \tag{4}$$

Пусть $\omega(t) \in \Phi H$, $g(u,t)$ определена в $[-1,1] \times [1,1]$ и удовлетворяет условиям

а) $\displaystyle\int_0^\delta \frac{\omega(g,t,0)}{t} \ln^{-m} \frac{c}{t} dt = O\Big(\omega(\delta) \ln^{-m} \frac{c}{\delta}\Big)$;

б) $\displaystyle\int_0^\delta \frac{\omega(g,0,t)}{t} \ln^{-m} \frac{c}{t} dt + \delta \int_\delta^{l/2} \frac{\omega(g,0,t)}{t^2} \ln^{-m} \frac{c}{t} = O\Big(\omega(\delta) \ln^{-m} \frac{c}{\delta}\Big)$;

в) $\omega(g,\delta,0)\eta(\delta) = O\Big(\omega(\delta) \ln^{-m} \frac{c}{\delta}\Big)$;

г) $g(-1,-1) = g(1,1) = 0$.

Теорема 2. *Если $g(u,t)$ удовлетворяет условиям* а)–г), *то оператор* (4) *действует из H_ω в H_ψ, где $\psi(t) = \omega(t) \ln^{-m} \frac{c}{t}$.*

2. *Коллокационные методы решения сингулярных интегральных уравнений.*

1) Полиномиальный метод типа коллокаций. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k(t), \tag{5}$$

где $T_k(t)$ — полиномы Чебышева I-го рода. Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$ будем искать из системы линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_k + \frac{\lambda_k}{(n+1)^2} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{l=0}^{n} T_l(\tau_k) \int_{-1}^{1} \frac{g(\tau_k,\tau)}{\tau-\tau_k} \ln^{-m} \frac{c}{|\tau-\tau_k|} d\tau = \frac{\lambda_k}{n+1} \sum_{l=0}^{n} y(\tau_l) T_l(\tau_k), \quad k = \overline{0,n}, \tag{6}$$

где τ_k — узлы Чебышева I-го рода

$$\tau_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{0,n}, \tag{7}$$

а $\lambda_k = \lambda_k^{(n)}$, $k = \overline{1,n}$, определяются по любой из следующих формул:

$$\lambda_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{2n+1}, \qquad k = \overline{1,n};$$
$$\lambda_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n+2} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n+2}, \qquad k = \overline{1,n};$$
$$\lambda_k^{(n)} = \frac{n-k+1}{n+2} \cos \frac{k\pi}{n+2} + \frac{\sin[(k+1)\pi/(n+2)]}{(n+2)\sin[\pi/(n+2)]}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Относительно метода (5)–(7) приближенного решения уравнения (1) справедлива

Теорема 3. *Пусть $g(t,\tau) \in H_{\varphi,\varphi}$, $y(t) \in H_\varphi$, где $H_\varphi \subset H_{\omega^{(1)}}$, $\varphi, \omega^{(1)} \in \Phi H$, $g(t,\tau)$ удовлетворяет условиям* а)–г) *теоремы* 2, *и уравнение* (1) *однозначно разрешимо. Тогда система* (6) *разрешима для достаточно больших n и приближенные решения x_n, найденные указанным методом, сходятся к точному решению уравнения* (1) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\|_{\omega^{(1)}} = O\left(\frac{1}{\ln^m n} + \frac{\varphi(1/n)}{\omega^{(1)}(1/n)}\right).$$

2) Полигональный метод решения. Пусть $\widetilde{H}_{\omega^{(1)}}$ — множество полигонов $\widetilde{x}(t)$, проходящих через точки $(t_0, x_0), \dots, (t_n, x_n)$, $x_k = x(t_k) = \widetilde{x}(t_k)$, где

$$t_k = -1 + 2k/n, \quad k = \overline{0,n}. \tag{8}$$

Лемма 2. *Если $x \in H_\omega$, $H_\omega \subset H_{\omega^{(1)}}$, то*

$$\|x - \widetilde{x}\|_{C[-1,1]} = O(\omega(h)H(x,\omega)),$$
$$H(x - \widetilde{x}, \omega^{(1)}) = O\left(\frac{\omega(h)}{\omega^{(1)}(h)} H(x,\omega)\right),$$

где $h = 2/n$.

Пусть теперь S_n^1 — оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $x \in H_{\omega^{(1)}}$ его полигон $\widetilde{x}$ по указанному выше способу.

Лемма 3. *Для любого $\omega^{(1)}$ равномерно относительно $n \in N$ справедливо соотношение*

$$\|S_n^1\|_{\omega^{(1)}} = O(1), \quad n \to \infty.$$

Эти леммы используются для обоснования полигонального метода решения уравнения (1). Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(t), \tag{9}$$

где $q_k(t)$ — фундаментальные сплайны первого порядка по узлам (8). Неизвестные коэффициенты $c_0, \dots, c_n$ определяются из условий

$$K x_n(t_i) = y(t_i), \quad i = \overline{0,n}. \tag{10}$$

Для метода (8)–(10) верна

Теорема 4. *Пусть $g(t,\tau) \in H_{\varphi,\varphi}$, $y(t) \in H_\varphi$, где $H_\varphi \subset H_{\omega^{(1)}}$, $\varphi, \omega^{(1)} \in \Phi H$, $g(t,\tau)$ удовлетворяет условиям* а)–г) *теоремы* 1 *и уравнение* (1) *однозначно разрешимо. Тогда система* (10) *разрешима для достаточно больших n и приближенные решения x_n, найденные указанным методом, сходятся к точному решению уравнения* (1) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\|_{\omega^{(1)}} = O\left(\frac{1}{\ln^m n} + \frac{\varphi(1/n)}{\omega^{(1)}(1/n)}\right).$$

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1980. – Вып. 18. – С. 251–307.
2. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 232 с.
3. Иванов В.В. *Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1965. – С. 125–177.
4. Агачев Ю.Р. *Сплайновые приближения решений интегральных и дифференциальных уравнений*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 144 с.
5. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. *Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений.* – М.: Наука, 1980. – 414 с.
6. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

Казанский государственный университет

Поступила
02.07.2001