ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 512.56

В.Б. РЕПНИЦКИЙ

О РЕШЕТОЧНО УНИВЕРСАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБР

1. Введение и формулировка основных результатов

Если решетка L вложима в решетку подалгебр некоторой алгебры данного класса K, то говорим, что L *представима решеткой подалгебр алгебры из* K. Класс K называется *решеточно универсальным*, если всякая решетка представима решеткой подалгебр некоторой алгебры из K (термин "решеточно универсальный класс" был предложен автору Л.Н. Шевриным). Классическая теорема Уитмена [1] о представлении решеток решетками подгрупп утверждает в нашей терминологии, что класс всех групп является решеточно универсальным. Отсюда и из того, что решетка подгрупп группы является подрешеткой ее решетки подполугрупп, автоматически вытекает, что класс всех полугрупп также решеточно универсален. Некоторые собственные решеточно универсальные подклассы в классе полугрупп, далекие от класса групп, были найдены автором в работе [2]. Среди них класс всех полурешеток и класс всех коммутативных нильполугрупп индекса два.

Указанные выше классы алгебр образуют многообразия. Это обстоятельство естественным образом приводит к постановке следующей задачи: *для класса алгебр той или иной конкретной сигнатуры охарактеризовать все решеточно универсальные многообразия этих алгебр.* В данной статье мы рассматриваем эту задачу в случае полугрупп, ассоциативных колец и решеток. Основными результатами являются следующие три теоремы.

Теорема 1.1. *Многообразие полугрупп V решеточно универсально тогда и только тогда, когда V удовлетворяет одному из условий*:

(1) *V содержит полугруппу, не являющуюся нильпотентным расширением прямоугольной связки групп*;

(2) *V — периодическое многообразие, и любая решетка представима решеткой подгрупп некоторой группы из V.*

Теорема 1.2. *Любое ненильпотентное многообразие ассоциативных колец решеточно универсально.*

Теорема 1.3. *Многообразие решеток решеточно универсально тогда и только тогда, когда оно нетривиально.*

Отметим, что теорема 1.3 является усилением соответствующего результата Хонга, рассматривавшего в [3] вложения конечных решеток в решетки подрешеток.

Как мы видим, вопрос о полном описании решеточно универсальных многообразий полугрупп сводится теоремой 1.1 к описанию соответствующих групповых периодических многообразий. Последняя задача представляется очень трудной. До недавнего времени автор не знал ни одного примера собственного неабелева многообразия групп V, для которого ответ на вопрос, является ли V решеточно универсальным, был бы известен. Определенное продвижение в этом направлении сделано автором в самое последнее время. Так, например, установлено, что для любого целого нечетного числа $k \geq 665$ многообразие всех групп экспоненты k решеточно универсально. Кроме того, показано, что нильпотентность группы (кольца) влечет выполнение нетривиального тождества в соответствующей решетке подгрупп (подколец). Таким образом, решеточно универсальные многообразия групп и колец должны быть ненильпотентными. Это вместе с теоремой 1.2 полностью решает поставленную нами задачу в случае многообразий ассоциативных колец. Доказательствам только что упомянутых результатов предполагается посвятить отдельные статьи.

2. Предварительные сведения

В этом пункте мы напоминаем необходимые определения и обозначения. В нем также собраны некоторые известные факты о строении полугрупп и их решеток подполугрупп.

Через $\mathrm{Sub}\,A$ обозначается решетка всех подалгебр алгебры A; в необходимых случаях (напр., когда A — полугруппа или решетка) $\mathrm{Sub}\,A$ содержит в качестве элемента пустое множество; $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ — рисовская полугруппа матричного типа с сэндвич-матрицей P над группой G; G называется *структурной группой* полугруппы $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$; $E(S)$ — множество всех идемпотентов полугруппы S; KS — полугрупповое кольцо полугруппы S над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей; F_p — поле из p элементов.

Полугруппа S называется *нильполугруппой индекса* k, если она содержит нуль и $x^k = 0$ для всякого $x \in S$, причем k — наименьшее число с этим свойством.

Полугруппа S называется *связкой*, если она состоит из идемпотентов; S — прямоугольная связка, если в ней выполнено тождество $xyx = x$.

Полугруппа S называется *прямоугольной связкой групп*, если в S существует конгруэнция θ такая, что каждый ее класс является подгруппой в S и S/θ — прямоугольная связка. В этом случае θ будем называть *структурной конгруэнцией* полугруппы S.

Для произвольного натурального числа n через δ_n мы обозначаем решеточное тождество:

$$x \wedge \Bigl(\bigvee_{i=1}^{n} y_i\Bigr) = \bigvee_{i=1}^{n}\Bigl(x \wedge \Bigl(\bigvee_{j\neq i} y_j\Bigr)\Bigr).$$

Символом $\square$ обозначается конец доказательства утверждения.

Следующие два утверждения касаются строения прямоугольных связок групп. Приводимые в них факты могут быть найдены среди соответствующих утверждений книги [4] (см. гл. 2 и 3) или легко получаются из них (см. также гл. 4 книги [5], [11]).

Предложение 2.1. *Полугруппа является прямоугольной связкой групп тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторой рисовской полугруппе матричного типа* $\mathcal{M}(G; I, \Lambda, P)$.

Это предложение есть объединение теоремы Риса–Сушкевича о строении вполне простых полугрупп и утверждения о том, что всякая вполне простая полугруппа — это в точности прямоугольная связка групп.

Из предложения 2.1 вытекает, в частности, что любая прямоугольная связка S изоморфна подходящей рисовской полугруппе матричного типа над единичной группой. В этом случае на S можно смотреть как на множество $I \times \Lambda$, в котором элементы перемножаются по правилу $(i, \lambda)(j, \mu) = (i, \mu)$.

Предложение 2.2. *Пусть S — прямоугольная связка групп, G — ее структурная группа и θ — ее структурная конгруэнция. Тогда*

(1) *для любого идемпотента $e \in E(S)$ подполугруппа eSe является максимальной подгруппой в S, изоморфной G, причем e — единица в eSe;*

(2) *θ — единственная структурная конгруэнция в S, а ее классы суть подгруппы eSe, $e \in E(S)$; в частности, $S = \bigcup(eSe \mid e \in E(S))$.*

Если S периодическая, то

(3) *всякая подполугруппа в S сама является прямоугольной связкой групп, а ее структурная группа изоморфна некоторой подгруппе группы G;*

(4) *для любых $z \in S$ и $e \in E(S)$ существует натуральное число n такое, что $(eze)^n = e$.*

Если в предложении 2.2 отождествить S с соответствующей рисовской полугруппой матричного типа $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$, то, как легко следует из определения последней, множество $E(S)$ идемпотентов полугруппы S совпадает с множеством элементов вида $(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$, где $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ и $p_{\lambda i}$ — элемент сэндвич-матрицы P. При этом для произвольного идемпотента $e = (p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$ в S будем иметь $eSe = \{(a; i, \lambda) \in S \mid a \in G\}$. В случае, когда S — периодическая полугруппа, для любого элемента $(a; i, \lambda) \in S$ некоторая его степень равна идемпотенту $(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$. Заметим к тому же, что фактор-полугруппа S/θ изоморфна прямоугольной связке $I \times \Lambda$.

Нам понадобятся также четыре утверждения, приводимые ниже. Первое из них непосредственно получается из результатов работ [6] и [7]. Лемма 2.1 имеет чуть более сильную формулировку, чем лемма 4.7 из [8], при этом ее доказательство аналогично доказательству последней. Справедливость лемм 2.2 и 2.3 легко усматривается.

Лемма 2.1. *Многообразие полугрупп V состоит из полугрупп, являющихся нильпотентными расширениями прямоугольных связок групп, тогда и только тогда, когда V не содержит в качестве подмногообразий класс всех полурешеток и класс всех коммутативных нильполугрупп индекса два. В этом случае V — периодическое многообразие.*

Лемма 2.2. *Пусть S — произвольная полугруппа и I — ее идеал. Определим на решетке $\operatorname{Sub} S$ бинарное отношение ρ по правилу: $(S_1, S_2) \in \rho$ в том и только том случае, если $S_1 \cup I = S_2 \cup I$. Тогда ρ является конгруэнцией, причем $(\operatorname{Sub} S)/\rho \cong [\{0\}, S/I]$ и каждый класс конгруэнции ρ вкладывается как решетка в решетку подполугрупп $\operatorname{Sub} I$.*

Лемма 2.3. *Решетка подполугрупп произвольной n-нильпотентной полугруппы удовлетворяет тождеству δ_n.*

Лемма 2.4. *Решетка подполугрупп произвольной прямоугольной связки удовлетворяет тождеству δ_3.*

3. Доказательство теоремы 1.1

Докажем сначала вспомогательное утверждение, которое представляет и самостоятельный интерес.

Предложение 3.1. *Пусть S — периодическая прямоугольная связка групп, G — соответствующая ей структурная группа и θ — структурная конгруэнция. Определим на решетке $\operatorname{Sub} S$ бинарное отношение $\sim$ по правилу: для любых $S_1, S_2 \in \operatorname{Sub} S$, $S_1 \sim S_2$ в том и только том случае, если $E(S_1) = E(S_2)$. Тогда $\sim$ является конгруэнцией решетки $\operatorname{Sub} S$, причем $(\operatorname{Sub} S)/\sim\ \cong \operatorname{Sub} S/\theta$ и каждый класс конгруэнции $\sim$ вкладывается как решетка в решетку $\operatorname{Sub} G$ подгрупп группы G.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ — изоморфная полугруппе S рисовская полугруппа матричного типа с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$. Для простоты отождествим S с $\mathcal{M}(G; I, \Lambda; P)$ и рассмотрим прямоугольную связку $I \times \Lambda$. Для произвольной подполугруппы $T \in \operatorname{Sub} S$ положим $\phi(T) = \{(i, \lambda) \in I \times \Lambda \mid (a, i, \lambda) \in T$ при каком-то $a \in G\}$. Очевидно, $\phi(T)$ есть подполугруппа в $I \times \Lambda$. Проверим, что отображение $\phi : T \mapsto \phi(T)$ является гомоморфизмом решетки $\operatorname{Sub} S$ на решетку $\operatorname{Sub} I \times \Lambda$. С этой целью нам необходимо установить, что $\phi(S_1 \vee S_2) = \phi(S_1) \vee \phi(S_2)$ и $\phi(S_1 \cap S_2) = \phi(S_1) \cap \phi(S_2)$ для любых $S_1, S_2 \in \operatorname{Sub} S$. В самом деле, включения $\phi(S_1 \vee S_2) \supseteq \phi(S_1) \vee \phi(S_2)$ и $\phi(S_1 \cap S_2) \subseteq \phi(S_1) \cap \phi(S_2)$ тривиальны. Пусть $(i, \lambda) \in \phi(S_1 \vee S_2)$. Тогда для некоторого $a \in G$ имеем $(a, i, \lambda) \in S_1 \vee S_2$. Это означает, что существуют элементы $(a_1, i_1, \lambda_1), \ldots, (a_n, i_n, \lambda_n) \in S_1 \cup S_2$ такие, что $(a, i, \lambda) = (a_1, i_1, \lambda_1) \cdots (a_n, i_n, \lambda_n)$ в полугруппе S. Отсюда получаем $(i_1, \lambda_1), \ldots, (i_n, \lambda_n) \in \phi(S_1) \cup \phi(S_2)$ и $(i, \lambda) = (i_1, \lambda_1) \cdots (i_n, \lambda_n)$ в полугруппе $I \times \Lambda$, т.е. $(i, \lambda) \in \phi(S_1) \vee \phi(S_2)$. Таким образом, включение $\phi(S_1 \vee S_2) \subseteq \phi(S_1) \vee \phi(S_2)$ также выполнено. Пусть теперь $(i, \lambda) \in \phi(S_1) \cap \phi(S_2)$. Это равносильно наличию элементов $a, b \in G$, для которых $(a, i, \lambda) \in S_1$ и $(b, i, \lambda) \in S_2$. Поскольку S периодическая, идемпотент $(p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)$ является некоторой степенью как элемента (a, i, λ), так и элемента (b, i, λ). Поэтому имеем $(p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda) \in S_1 \cap S_2$, что влечет $(i, \lambda) \in \phi(S_1 \cap S_2)$. Следовательно, включение $\phi(S_1 \cap S_2) \supseteq \phi(S_1) \cap \phi(S_2)$ тоже справедливо. Мы доказали, что отображение $\phi : \mathrm{Sub}\, S \longrightarrow \mathrm{Sub}\, I \times \Lambda$ есть решеточный гомоморфизм. Легко видеть, что ϕ сюръективен.

Обозначим через $\ker \phi$ ядро гомоморфизма ϕ. Тогда $(\mathrm{Sub}\, S)/\ker \phi \cong \mathrm{Sub}\, I \times \Lambda$ и, т.к. полугруппа $I \times \Lambda$ изоморфна прямоугольной связке S/θ, получаем $(\mathrm{Sub}\, S)/\ker \phi \cong \mathrm{Sub}\, S/\theta$. Заметим теперь, что для $S_1, S_2 \in \mathrm{Sub}\, S$ выполнено $(S_1, S_2) \in \ker \phi$ в том и только том случае, если включение $(a, i, \lambda) \in S_1$ для какого-то $a \in G$ равносильно включению $(b, i, \lambda) \in S_2$ для какого-то $b \in G$. Последнее ввиду периодичности S означает, что идемпотент $(p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)$ принадлежит S_1 тогда и только тогда, когда $(p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)$ принадлежит S_2, т.е. $E(S_1) = E(S_2)$. Следовательно, конгруэнция $\ker \phi$ совпадает с конгруэнцией $\sim$, определенной в условии предложения. Отсюда, в частности, заключаем, что $(\mathrm{Sub}\, S)/\sim \, \cong \mathrm{Sub}\, S/\theta$.

Покажем, что каждый класс конгруэнции $\sim$ вкладывается в решетку подгрупп структурной группы G. Действительно, пусть L — произвольный такой класс. По определению, найдется подмножество $E \subseteq E(S)$ такое, что для любой подполугруппы $T \in L$ имеем $E(T) = E$. Зафиксируем в E произвольный идемпотент e и рассмотрим соответствие $\psi : T \mapsto eTe$, $T \in L$. В силу утверждений (1) и (3) предложения 2.2 это соответствие отображает решетку L в решетку подгрупп группы eSe. Проверим, что ψ есть решеточный гомоморфизм, т.е. $\psi(S_1 \vee S_2) = \psi(S_1) \vee \psi(S_2)$ и $\psi(S_1 \cap S_2) = \psi(S_1) \cap \psi(S_2)$ для любых $S_1, S_2 \in L$. В самом деле, пусть $x \in \psi(S_1 \vee S_2)$, т.е. $x = eye$ для какого-то $y \in S_1 \vee S_2$. Тогда существуют $y_1, \ldots, y_k \in S_1 \cup S_2$ такие, что $y = y_1 \cdots y_k$. Обозначим через e_i идемпотент, являющийся единицей той групповой компоненты в S, которой принадлежит элемент y_i, $i = 1, \ldots, k$. Ввиду утверждения (4) предложения 2.2 имеем $(e_i e e_i)^{n_i} = e_i$ для подходящего натурального числа n_i. Отсюда получаем $x = eye = ey_1 \cdots y_k e = e(y_1 e_1) \cdots (y_k e_k)e = ey_1(e_1 e e_1)^{n_1} \cdots y_k(e_k e e_k)^{n_k} e$ и, поскольку $e_1, \ldots, e_k \in E \subseteq S_1 \cap S_2$, $x \in eS_1e \vee eS_2e = \psi(S_1) \vee \psi(S_2)$. Следовательно, $\psi(S_1 \vee S_2) \subseteq \psi(S_1) \vee \psi(S_2)$, а т.к. обратное включение очевидно, $\psi(S_1 \vee S_2) = \psi(S_1) \vee \psi(S_2)$. Предположим теперь, что $x \in \psi(S_1) \cap \psi(S_2)$. В этом случае $x = ey_1e = ey_2e$ для $y_1 \in S_1$ и $y_2 \in S_2$. Тогда $x \in S_1 \cap S_2$, т.к. $e \in E \subseteq S_1 \cap S_2$. К тому же $x = ey_1e = e(ey_1e)e = exe$. Поэтому $x \in e(S_1 \cap S_2)e = \psi(S_1 \cap S_2)$. Таким образом, имеем $\psi(S_1 \cap S_2) \supseteq \psi(S_1) \cap \psi(S_2)$, откуда легко следует равенство $\psi(S_1 \cap S_2) = \psi(S_1) \cap \psi(S_2)$.

Заметим далее, что гомоморфизм $\psi : L \longrightarrow \mathrm{Sub}\, eSe$ инъективен. Действительно, пусть $S_1, S_2 \in L$ и $\psi(S_1) = \psi(S_2)$, т.е. $eS_1e = eS_2e$. Последнее условие влечет, что $fS_1f = fS_2f$ для любого идемпотента $f \in E$. В самом деле, возьмем произвольный элемент $x \in fS_1f$. Тогда $x = fyf$ для некоторого $y \in S_1$. Кроме того, учитывая утверждение (4) предложения 2.2, имеем $(fef)^n = f$ для подходящего n. Отсюда выводим $x = fyf = (fef)^n y (fef)^n$ и, т.к. $y, e, f \in S_1$, $x \in feS_1ef$. Поскольку $feS_1ef = feS_2ef \subseteq fS_2f$, получаем $x \in fS_2f$. Следовательно, $fS_1f \subseteq fS_2f$ и, т.к. обратное включение доказывается аналогично, $fS_1f = fS_2f$. Применяя теперь утверждение (2) предложения 2.2, а также равенства $E(S_1) = E = E(S_2)$, делаем вывод, что $S_1 = \bigcup(fS_1f \mid f \in E) = \bigcup(fS_2f \mid f \in E) = S_2$. Инъективность ψ установлена.

Осталось заметить, что в силу утверждения (1) того же предложения подгруппа eSe изоморфна структурной группе G и, следовательно, гомоморфизм ψ индуцирует вложение решетки L в решетку подгрупп $\mathrm{Sub}\, G$. $\square$

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.1. Пусть многообразие полугрупп V удовлетворяет одному из ее условий: (1) или (2). В первом случае ввиду леммы 2.1 V включает в себя или класс всех полурешеток, или класс всех коммутативных нильполугрупп индекса два. Указанные классы являются в силу основного результата работы [2] решеточно универсальными. Следовательно, решеточно универсальным будет и многообразие V. Это же, очевидно, верно и в случае, когда V удовлетворяет условию (2).

Обратно, допустим, что ни одно из условий (1), (2) теоремы 1.1 не выполняется для многообразия V. Тогда V состоит из нильпотентных расширений прямоугольных связок групп и существует решетка L, не вложимая в решетку подгрупп никакой группы, принадлежащей V. В этом случае многообразие V также периодическое (см. лемму 2.1). Обозначим через L' произвольную простую решетку, включающую L как подрешетку и не удовлетворяющую никакому нетривиальному тождеству; в качестве L' можно взять, например, решетку разбиений подходящего бесконечного множества (см. [9], гл. 4, § 4, теоремы 2 и 4). Предположим от противного, что L' вкладывается в решетку подполугрупп $\mathrm{Sub}\,S$ некоторой полугруппы $S \in V$. Мы можем считать, что L' — подрешетка решетки $\mathrm{Sub}\,S$. Пусть I — идеал в S, являющийся прямоугольной связкой групп и такой, что полугруппа S/I нильпотентна. Ввиду леммы 2.2 на $\mathrm{Sub}\,S$ существует конгруэнция ρ такая, что каждый ее класс вкладывается в $\mathrm{Sub}\,I$ и $(\mathrm{Sub}\,S)/\rho \cong [\{0\}, S/I]$. Так как L' — подрешетка в $\mathrm{Sub}\,S$ и L' проста, ограничение конгруэнции ρ на L' является либо тривиальной, либо универсальной конгруэнцией решетки L'. В первом случае L' должна вкладываться в решетку $\mathrm{Sub}\,S/I$ подполугрупп нильпотентной полугруппы S/I, а этого не может быть в силу леммы 2.3 и того, что L' не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Пусть имеет место второй случай. Тогда L' вкладывается в решетку $\mathrm{Sub}\,I$. Отождествим без ограничения общности L' с соответствующей подрешеткой этой решетки. Через G и θ обозначим соответственно структурную группу и структурную конгруэнцию прямоугольной связки групп I. Поскольку $I \in V$, полугруппа I периодическая. Отсюда и из предложения 3.1 вытекает наличие конгруэнции $\sim$ на решетке $\mathrm{Sub}\,I$ такой, что $(\mathrm{Sub}\,I)/\sim\, \cong \mathrm{Sub}\,I/\theta$ и каждый класс этой конгруэнции вкладывается как решетка в решетку $\mathrm{Sub}\,G$. Из простоты решетки L' опять следует, что ограничение конгруэнции $\sim$ на L' либо тривиально, либо является универсальной конгруэнцией. В первом из этих случаев решетка L' должна вкладываться в решетку $\mathrm{Sub}\,I/\theta$ прямоугольной связки I/θ, а это не так ввиду выбора L' и леммы 2.4. Во втором случае L' вложима в решетку $\mathrm{Sub}\,G$, что влечет вложимость в эту же решетку подгрупп решетки L. Этого, однако, также не может быть, поскольку $G \in V$. Полученное противоречие показывает, что решетка L' не представима решеткой подполугрупп никакой полугруппы из V, т.е. многообразие V не решеточно универсально. $\square$

Следствие. В решетке многообразий полугрупп класс всех полурешеток и класс всех коммутативных нильполугрупп индекса два исчерпывают список минимальных негрупповых решеточно универсальных многообразий.

4. Доказательство Теоремы 1.2

Разобьем это доказательство на ряд лемм.

Лемма 4.1. *Для любой полугруппы S и любого ассоциативно-коммутативного кольца K с единицей решетка подполугрупп $\mathrm{Sub}\,S$ вложима в решетку подколец $\mathrm{Sub}\,KS$.*

Доказательство. Для каждой непустой подполугруппы H полугруппы S рассмотрим полугрупповое кольцо KH; ясно, что KH — подкольцо кольца KS. Определим отображение $\phi : \mathrm{Sub}\,S \longrightarrow \mathrm{Sub}\,KS$ по правилу: $\phi(H) = KH$ при $H \neq \emptyset$ и $\phi(\emptyset) = \{0\}$. Легко проверяется, что ϕ является вложением решетки $\mathrm{Sub}\,S$ в решетку $\mathrm{Sub}\,KS$. $\square$

Пусть полугруппа S содержит нуль. Отметим в полугрупповом кольце KS идеал $I = \{\alpha \cdot 0 \mid \alpha \in K\}$ и положим $K_0S = (KS)/I$; K_0S называется *сжатым* полугрупповым кольцом полугруппы S над K. Решетку всех подполугрупп в S, содержащих нуль, будем обозначать через $\mathrm{Sub}_0\,S$.

Следующая лемма доказывается аналогично предыдущей.

Лемма 4.2. *Для любой полугруппы S с нулем и любого ассоциативно-коммутативного кольца K с единицей решетка подполугрупп $\mathrm{Sub}_0\,S$ вложима в решетку подколец $\mathrm{Sub}\,K_0S$.*

Приводимое ниже утверждение является уточнением того факта, что класс коммутативных нильполугрупп индекса два решеточно универсален.

Лемма 4.3. *Любая решетка вкладывается в решетку $\mathrm{Sub}_0\,S$ для некоторой коммутативной нильполугруппы S индекса два.*

Доказательство. Для произвольной решетки L обозначим через L^0 решетку, полученную присоединением к L нуля (независимо от того, есть в L нуль или нет). Пусть S — коммутативная нильполугруппа индекса два, для которой существует вложение L^0 в $\mathrm{Sub}\, S$. Так как в $\mathrm{Sub}\, S$ единственная полугруппа, не содержащая нуля, — пустое множество, это вложение индуцирует, очевидно, вложение решетки L в решетку $\mathrm{Sub}_0\, S$. $\square$

Лемма 4.4. *Для любого простого числа p многообразие ассоциативных колец $[px = x^p = 0,\ xy = yx]$ является решеточно универсальным.*

Доказательство. Из лемм 4.2 и 4.3 вытекает, что произвольная решетка вкладывается в решетку подколец сжатого полугруппового кольца $(F_p)_0 S$ для подходящей коммутативной нильполугруппы S индекса два. Очевидно, что $(F_p)_0 S \in [px = x^p = 0,\ xy = yx]$. $\square$

Лемма 4.5. *Для любого простого числа p многообразие ассоциативных колец $[px = 0,\ x^p = x]$ является решеточно универсальным.*

Доказательство. Пусть L — произвольная решетка. Обозначим через S полурешетку, для которой L вложима в $\mathrm{Sub}\, S$. Тогда, учитывая лемму 4.1, получаем вложение L в решетку подколец полугруппового кольца $F_p S$. Ясно, что $F_p S \in [px = 0,\ x^p = x]$. $\square$

Следующее утверждение доказано в [10].

Лемма 4.6. *Многообразие ассоциативных колец ненильпотентно тогда и только тогда, когда оно включает в качестве подмногообразия хотя бы одно из многообразий вида $[px = x^p = 0,\ xy = yx]$ или $[px = 0,\ x^p = x]$, где p — простое число.*

Теорема 1.2 теперь следует из лемм 4.4, 4.5 и 4.6. $\square$

5. Доказательство Теоремы 1.3

Докажем сначала утверждение, касающееся булевых алгебр, из которого и будет следовать указанная теорема.

Предложение 5.1. *Класс булевых алгебр решеточно универсален.*

Доказательство. Для произвольной решетки L обозначим через S полурешетку такую, что L вложима в $\mathrm{Sub}\, S$. Пусть S^1 — полурешетка, полученная присоединением к S единицы. Полугрупповое кольцо $F_2 S^1$ является, очевидно, булевым. Рассмотрим решетку $\mathrm{Sub}_1\ F_2 S^1$ подколец этого кольца, содержащих единицу, и определим отображение $\psi : \mathrm{Sub}\, S \longrightarrow \mathrm{Sub}_1\ F_2 S^1$ по правилу $\psi(H) = F_2 H^1$, где H — подполугруппа в S. Легко видеть, что ψ — вложение $\mathrm{Sub}\, S$ в $\mathrm{Sub}_1\ F_2 S^1$. Таким образом, L вкладывается в $\mathrm{Sub}_1\ F_2 S^1$. Обозначим теперь через A булеву алгебру, соответствующую булеву кольцу $F_2 S^1$. Ясно, что решетка подалгебр $\mathrm{Sub}\, A$ изоморфна решетке подколец $\mathrm{Sub}_1\ F_2 S^1$. Отсюда получаем вложимость L в $\mathrm{Sub}\, A$. $\square$

Из доказанного предложения вытекает представимость любой решетки решеткой подрешеток подходящей дистрибутивной решетки, а именно, булевой алгебры. Теорема 1.3 следует теперь из того, что многообразие дистрибутивных решеток содержится в любом нетривиальном решеточном многообразии. $\square$

В заключение автор выражает благодарность участникам семинара Л.Н. Шеврина "Алгебраические системы" за полезные обсуждения результатов работы.

Литература

1. Whitman Ph. M. *Lattices, equivalence relations, and subgroups* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1946. – V. 52. – P. 507–522.
2. Репницкий В.Б. О представлении решеток решетками подполугрупп // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 60–70.
3. Hong D. *On sublattice lattice varieties* // Alg. Univers. – 1990. – V. 27. – P. 411–412.
4. Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп.* Т. 1. – М.: Мир, 1972. – 286 с.
5. *Общая алгебра*, Т. 1. / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1990. – 592 с.
6. Chrislock J. *A certain class of identities on semigroups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 21. – № 1. – P.i89–190.
7. Сапир М.В., Суханов Е.В. *О многообразиях периодических полугрупп* // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 4. – С.48–55.
8. Репницкий В.Б., Кацман С.И. *Коммутативные полугруппы, решетка подполугрупп которых удовлетворяет нетривиальному тождеству* // Матем. сб. – 1988. – Т. 137. – № 4. – С. 462–482.
9. Гретцер Г. *Общая теория решеток.* – М.: Мир, 1982. – 456 с.
10. Львов И.В. *О многообразиях ассоциативных колец.* II // Алгебра и логика. – 1973. – Т. 12. – № 6. – С. 667–688.
11. *Общая алгебра*, Т. 2. / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – 480 с.

Уральский государственный университет

Поступила
26.05.1997