ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 5 (528)

УДК 517.983

В.С. МОКЕЙЧЕВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО БАЗИСНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЛЬКО АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, и A — линейный оператор, действующий из H в H. Если λ — собственное значение для A и $v_{(1)}$ — соответствующий собственный элемент, т.е. $v_{(1)} \neq 0$, $(A-\lambda I)v_{(1)} = 0$, то в случае разрешимости уравнения $(A-\lambda I)v = a_1 v_{(1)}$, где $a_1 \neq 0$ — число, его решение $v_{(2)}$ называют первым присоединенным элементом. Решение $v_{(3)}$, если оно существует, уравнения $(A-\lambda I)v = a_2 v_{(2)}$ ($a_2 \neq 0$ — число) называют вторым присоединенным элементом и т.д. Множество $\{v_{(1)}, v_{(2)}, \dots\}$ называют цепочкой из собственного и присоединеных элементов (СПЭ).

Возникает вопрос: при каких условиях система СПЭ $\{y_{(1)}, y_{(2)}, \dots\}$ оператора A является базисом в H или базисом Рисса в H?

Система элементов

$$\{e_{(1)}, e_{(2)}, \dots\} \tag{1}$$

является базисом Рисса в H, если для каждого элемента $f \in H$ существует такая последовательность чисел $\{f_k,\ k = 1, 2, \dots\}$, что

$$f = \sum f_k e_{(k)}, \quad c_1\Big(\sum |f_k|^2\Big)^{1/2} \leq \|f\| \leq c_2\Big(\sum |f_k|^2\Big)^{1/2}, \tag{2}$$

где $c_1 > 0$, c_2 не зависят от f.

Число c_1 называем нижней постоянной для базиса Рисса (1). Здесь, как и далее, если особо не оговорено, суммирование производится по всем $k = 1, 2, \dots$

Наиболее общий результат о базисности принадлежит А.С. Маркусу ([1], с. 28): *пусть B — нормальный, полный, компактный, линейный оператор конечного порядка, спектр которого лежит на конечном числе лучей, $C = TB$ компактен, $(E+T)$ обратим, T ограничен, при некотором $p \in (0, 1]$ оператор $(E + T(B)^{1+p})$ обратим, $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}(r^{-1}g(r, B)) < +\infty$, тогда некоторая система СПЭ оператора $(B + C)$ является базисом Рисса со скобками в H.*

При этом система $\{z_{(k)}\}$ называется базисом Рисса со скобками в H, если она является базисом в H, и каждый элемент $z_{(k)}$ единственным образом представим в виде линейной комбинации элементов системы $\{w_{(r)},\ r = 1, 2, \dots\}$, являющейся базисом Рисса в H.

Понятно, что в случаях, когда операторы B, C конкретные, имеются более сильные результаты о базисности СПЭ. Обычно они формулируются в терминах разложимости функций по собственным функциям рассматриваемого оператора. В принципе, решая проблему разложимости по собственным функциям, решаем проблему базисности, однако базисности не во всем H, а в некотором его подпространстве. Так как будем рассматривать только абстрактный случай, то остановимся на недостатках теоремы А.С. Маркуса.

Во-первых, она не дает ответа на вопрос: существует ли система СПЭ оператора, являющаяся базисом Рисса в H?

Во-вторых, ее применение к неограниченным операторам крайне затруднительно.

В-третьих, и это самое главное, она не применима во многих случаях; простой пример:

$$y^{(')}(t) + ay^{(')}(t+\tau) = \lambda y(t), \quad y(t+2\pi) = y(t),$$

где a, τ — числа; чтобы воспользоваться теоремой Маркуса, должны положить $B^{-1}z(t) = z^{(')}(t) + az^{(')}(t+\tau) + cz(t)$, при этом число c гарантирует существование B; в зависимости от τ спектр оператора B может не лежать на конечном числе лучей, хотя базисность (в соответствующем H) собственных функций $\exp(ikt)$, $k = 0, -1, 1-2, 2, \dots$, очевидна.

Сформулируем основное утверждение.

Теорема 1. *Пусть оператор A имеет сопряженный A^*, хотя бы одно регулярное значение λ_0, и $y = \{y_{(k)},\ k = 1, 2, \dots\}$, $y^* = \{y^*_{(k)},\ k = 1, 2, \dots\}$ такие СПЭ соответственно операторов A и A^*, что при некотором M:*

1) *если $y^*_{(m_r)}$ принадлежит множеству $\{y^*_{(M)},\ y^*_{(M+1)}, \dots\}$, то и каждый элемент цепочки $\{y^*_{(m_1)}, \dots, y^*_{(m_r)}\}$ принадлежит отмеченному множеству;*
2) *при некотором базисе Рисса (1) в H, при всех $N_1 \geq N \geq M$, любых числах t_k выполняются оценки*

$$\Big\| \sum_{k=M}^{N} t_k [y^*_{(k)} - e_{(k)}] \Big\| \leq b_1 \Big(\sum_{k=M}^{N_1} |t_k|^2 \Big)^{1/2}, \tag{3}$$

$$\Big\| \sum_{k=M}^{N} t_k [y^*_{(k)} - y_{(k)}] \Big\| \leq b_2 \Big(\sum_{k=M}^{N} |t_k|^2 \Big)^{1/2}, \tag{4}$$

причем $c_1 > b_1 + b_2$, $c_1 - b_1 \leq 1$.

Тогда, заменив, если в этом есть необходимость, первые $M-1$ элементов в y на новые, получим последовательность СПЭ оператора A, являющуюся базисом Рисса в H.

Замечание 1. В сформулированной теореме утверждается, что полученная система СПЭ будет базисом Рисса, а не базисом Рисса со скобками.

Замечание 2. Ранее условились считать, что в цепочке СПЭ на первом месте стоит собственный элемент, на втором — первый присоединеный (к собственному) элемент и т. д.

Замечание 3. В случае

$$\sum \|y_{(k)} - e_{(k)}\|^2 < +\infty, \quad \sum \|y^*_{(k)} - e_{(k)}\|^2 < +\infty$$

оценки (3), (4) выполняются автоматически, причем числа b_1, b_2 можно выбрать меньше любого наперед заданного положительного числа. По этой причине характеризуем предположения 2) в теореме как предположения об асимптотике.

Замечание 4. В определение присоединенных элементов введены числовые параметры $a_1, a_2, \dots$; с их помощью легче добиться выполнения (3), (4). Например, если собственный элемент $e_{(r)}$, а первый присоединенный $e_{(r)} + r^2 e_{(r+1)}$, то последний следует заменить на $r^{-2}(e_{(r)} + r^2 e_{(r+1)})$, т. е. взять $a_1 = r^{-2}$.

Замечание 5. Для числовых объектов используем записи a_r, y_k, $f_m, \dots$, для элементов гильбертового пространства — $a_{(k)}, y_{(k)}, f_{(m)}, \dots$; если недоразумения не возникают, то индексы будем опускать.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм. Считаем при этом, что выполнены предположения теоремы.

Лемма 1. *Базисом Рисса в H является последовательность*

$$\{e_{(1)}, \dots, e_{(M-1)}, y^*_{(M)}, y^*_{(M+1)}, \dots\}, \tag{5}$$

причем нижняя постоянная для него не меньше $c_1 - b_1$.

Доказательство. По определению базиса Рисса для каждого элемента имеем соотношения (2). Из них и (3) следует сходимость в H по норме ряда $\sum\limits_{k\ge M^*} f_k[y^*_{(k)}-e_{(k)}]$. Их сумма определяет линейный оператор Tf. В силу (3) имеем $\|Tf\|\le (b_1/c_1)c_1\Big(\sum\limits_{k\ge M}|f_k|^2\Big)^{1/2}\le (b_1/c_1)\|f\|$. Из этих оценок следует, что оператор T является сжатием. В этом случае оператор $(I+T)$ обратим, т. е. уравнение $f+Tf=g\in H$ однозначно разрешимо. Так как $f=\sum f_k e_{(k)}$, то $g=f+Tf=\sum f_k e_{(k)}+\sum\limits_{k\ge M} f_k[y^*_{(k)}-e_{(k)}]=\sum\limits_{k=1}^{M-1} f_k e_{(k)}+\sum\limits_{k\ge M} f_k y^*_{(k)}$, т. е. система (5) — базис в H. С другой стороны,

$$\|g\|\ge\|f\|-\|Tf\|\ge c_1\Big(\sum|f_k|^2\Big)^{1/2}-b_1\Big(\sum_{k\ge M}|f_k|^2\Big)^{1/2},$$

$$\|g\|\le c_1\Big(\sum|f_k|^2\Big)^{1/2}+b_1\Big(\sum_{k\ge M}|f_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Поэтому последовательность (5) является базисом Рисса с нижней постоянной (c_1-b_1). $\square$

Обозначим через $H(M)$ подпространство в H, натянутое на $\{y^*_{(M)},y^*_{(M+1)},\dots\}$. Всюду ниже $H(M)^\perp$ — ортогональное дополнение к $H(M)$.

Лемма 2. *Выполняются включения*

$$((A-\lambda_0 I)^*)^{-1}H(M)\subset H(M). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $y^*_{(r)}\in H(M)$. Тогда он либо собственный элемент, либо присоединеный. Если он собственный, сответствующий собственному значению μ, то $(A-\lambda_0 I)^*y^*_{(r)}=(\mu-\overline{\lambda}_0)y^*_{(r)}$. Поэтому

$$((A-\lambda_0 I)^*)^{-1}y^*_{(r)}=(\mu-\overline{\lambda}_0)^{-1}y^*_{(r)},$$

т. е. имеет место требуемое. Предположим, что $y^*_{(r)}$ — первый присоединенный элемент, соответствующий собственному значению μ. Тогда $(A^*-\mu I)y^*_{(r)}=a_{1,r}y^*_{(m)}$, причем $y^*_{(m)}$ — собственный элемент оператора A^*, соответствующий собственному значению μ и $a_{1,r}\ne 0$. В силу предположения 1) теоремы 1 $y^*_{(m)}\in H(M)$. По выше доказанному $((A-\lambda_0 I)^*)^{-1}y^*_{(m)}\in H(M)$. Из последних равенств следует

$$((A-\lambda_0 I)^*)^{-1}y^*_{(r)}=(\mu-\overline{\lambda}_0)^{-1}(y^*_{(r)}-a_{1,r}((A-\lambda_0 I)^*)^{-1}y^*_{(m)}).$$

Так как оба слагаемых в правой части принадлежат $H(M)$, то и левая принадлежит $H(M)$. Аналогично проверяется утверждение, когда $y^*_{(r)}$ — второй, третий и т. д. присоединенные элементы. Включение (6) доказано. $\square$

Лемма 3. *При ортобазисе $z_{(1)},\dots,z_{(M-1)}$ в $H(M)^\perp$ базисом Рисса в H является последовательность*

$$\{z_{(1)},\dots,z_{(M-1)},y^*_{(M)},y^*_{(M+1)},\dots\}, \tag{7}$$

причем нижняя константа для базиса Рисса не меньше c_1-b_1.

Доказательство. Так как $H(M)^\perp$ — ортогональное дополнение к $H(M)$, то каждый элемент $f\in H$ единственным образом представим в виде $f=f_{(1)}+f_{(2)}$, где $f_{(1)}\in H(M)^\perp$, $f_{(2)}\in H(M)$. Поэтому $\|f\|=\|f_{(1)}\|+\|f_{(2)}\|$. Однако $\{z_{(1)},\dots,z_{(M-1)}\}$ — ортобазис в $H(M)^\perp$, $\{y^*_{(M)},y^*_{(M+1)},\dots\}$ — базис Рисса в $H(M)$ с нижней постоянной (c_1-b_1), следовательно,

$$f=\sum_{k=1}^{M-1}h_k z_{(k)}+\sum_{k=M}^{+\infty}h_k y^*_{(k)},$$

причем

$$\|f\| \geq \left(\sum_{k=1}^{M-1} |h_k|^2 \right)^{1/2} + (c_1 - b_1) \left(\sum_{k \geq M} |h_k|^2 \right)^{1/2}.$$

В силу предположения теоремы 1 $c_1 - b_1 \leq 1$. Следовательно, $\|f\| \geq (c_1 - b_1)\big(\sum |h_k|^2\big)^{1/2}$. $\square$

Лемма 4. $((A - \lambda_0 I)^{-1})H(M)^{\perp} = H(M)^{\perp}$.

Доказательство. Пусть $f \in H(M)^{\perp}$. Это означает,что $\langle f, h\rangle = 0$ при всех $h \in H(M)$. Здесь и далее $\langle\, , \rangle$ — символ скалярного произведения в H. Хорошо известна формула

$$((A - \lambda_0 I)^{-1})^* = ((A - \lambda_0 I)^*)^{-1}.$$

Поэтому

$$\langle (A - \lambda_0 I)^{-1} f, h\rangle = \langle f, ((A - \lambda_0 I)^*)^{-1} h\rangle. \tag{8}$$

В силу лемм 2, 3 имеем $((A - \lambda_0 I)^*)^{-1} h \in H(M)$. Отсюда и из (8) следует $(A - \lambda_0 I)^{-1} f \perp h$. В силу произвольности $h \in H(M)$ имеем $(A - \lambda_0 I)^{-1} f \in H(M)^{\perp}$. Итак, доказано включение

$$(A - \lambda_0 I)^{-1} H(M)^{\perp} \subset H(M)^{\perp}. \tag{9}$$

Размерность $H(M)^{\perp}$ равна $M - 1$. Если бы элементы $(A - \lambda_0 I)^{-1} z_{(j)}$, $j = 1, \ldots, M - 1$, были линейно зависимыми, то получили бы

$$(A - \lambda_0 I)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{M-1} t_j z_{(j)} \right) = 0, \quad \sum_{j=1}^{M} |t_j| \neq 0,$$

что противоречило бы обратимости оператора $(A - \lambda_0 I)^{-1}$. Итак, доказано, что $(A - \lambda_0 I)^{-1} z_{(j)}$, $j = 1, \ldots, M - 1$, — базис в $H(M)^{\perp}$. В этом случае в (9) имеет место равенство. $\square$

Лемма 5. *Существует линейно независимая система СПЭ $\{w_{(1)}, \ldots, w_{(M-1)}\}$ оператора A, принадлежащих $H(M)^{\perp}$.*

Доказательство. Так как $Az_{(j)} \in H(M)^{\perp}$, ибо $(A - \lambda_0 I)H(M)^{\perp} = H(M)^{\perp}$, то $Az_{(j)} = \sum\limits_{r=1}^{M-1} t_{j,r} z_{(r)}$, $j = 1, \ldots, M - 1$.

Выпишем матрицу $D = (t_{j,r})$ и ее линейно независимую систему ξ_k, $k = 1, \ldots, M - 1$, собственных и присоединенных векторов, соответствующих собственным значениям $\mu_1, \ldots, \mu_{M-1}$. Это означает $D\xi_k = \mu_k \xi_k$, если ξ_k — собственный вектор, $D\xi_k = \mu_k \xi_k + \xi_{k-1}$, если ξ_k — первый присоединеный вектор (в этом случае $\mu_{k-1} = \mu_k$) и т. д. Через $\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,M-1}$ обозначим координаты вектора ξ_k.

Зная ξ_j, вычислим $w_{(j)} = \sum\limits_{k=1}^{M-1} \xi_{j,k} z_{(k)}$, $j = 1, \ldots, M - 1$. Очевидно, они принадлежат $H(M)^{\perp}$ и линейно независимы. Убедимся в том, что $w_{(j)}$ — собственный элемент, если ξ_j — собственный вектор; $w_{(j)}$ — первый присоединенный элемент, если ξ_j — первый присоединенный вектор и т. д.

Пусть ξ_j — собственный вектор матрицы D. Тогда

$$Aw_{(j)} = \sum_{k=1}^{M-1} \xi_{j,k} A z_{(k)} = \sum_{k=1}^{M-1} \xi_{j,k} \sum_{r=1}^{M-1} t_{k,r} z_{(r)} = \sum_{r=1}^{M-1} \left(\sum_{k=1}^{M-1} \xi_{j,k} t_{k,r} \right) z_{(r)} = \sum_{r=1}^{M-1} \mu_j \xi_{j,r} z_{(r)} = \mu_j w_{(j)}.$$

Если ξ_j — первый присоединенный вектор, то $D\xi_j = \xi_{j-1} + \mu_{j-1}\xi_j$, где ξ_{j-1} — собственный вектор, соответствующий μ_{j-1}. Поэтому

$$Aw_{(j)} = \sum_{r=1}^{M-1} (\xi_{j-1,r} z_{(r)} + \mu_{j-1} \xi_{j,r} z_{(r)}) = w_{(j-1)} + \mu_{j-1} w_{(j)},$$

т. е. $w_{(j)}$ — первый присоединенный элемент оператора A (для него взяли $a_{1,j}=1$). Аналогично проверим остальные случаи. □

Доказательство теоремы 1. Так как (7) — базис Рисса в H и выполняются оценки (4), то аналогично доказательству леммы 1 легко докажем базисность в смысле Рисса последовательности

$$\{z_{(1)},\dots,z_{(M-1)},y_{(M)},y_{(M+1)},\dots\}. \tag{10}$$

При этом нижняя постоянная не меньше $(c_1-b_1-b_2)$. Элементы $z_{(1)},\dots,z_{(M-1)}$ являются линейными комбинациями элементов $w_{(1)},\dots,w_{(M-1)}$, ибо последние образуют базис в $H(M)^{\perp}$.Поэтому

$$z_{(r)}=\sum_{j=1}^{M-1} z_{r,j}w_{(j)},\quad r=1,\dots,M-1.$$

При всех $\{t_k\}$ выполняются оценки

$$\sum_{r=1}^{M-1}|t_k|^2\ge b_3\sum_{j=1}^{M-1}\Big|\sum_{r=1}^{M-1}t_r z_{r,j}\Big|^2,$$

где $b_3=\Big(\sum\limits_{r=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{M-1}|z_{r,j}|^2\Big)^{-1}$. Так как (10) — базис Рисса в H, то

$$f=\sum_{k=1}^{M-1}t_k z_{(k)}+\sum_{k=M}^{+\infty}f_k y_{(k)},$$

$$\|f\|\ge(c_1-b_1-b_2)\Big(\sum_{k=1}^{M-1}|t_k|^2+\sum_{k=M}^{+\infty}|f_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Из последних соотношений следуют равенства

$$f=\sum_{j=1}^{M-1}\Big(\sum_{r=1}^{M-1}t_r z_{r,j}\Big)w_{(j)}+\sum_{k=M}^{+\infty}f_k y_{(k)}$$

и оценки

$$\|f\|\ge b_4(c_1-b_1-b_2)\Big(\sum_{j=1}^{M-1}\Big|\sum_{r=1}^{M-1}t_r z_{r,j}\Big|^2+\sum_{k=M}^{+\infty}|f_k|^2\Big)^{1/2},$$

в которых $b_4=\min(b_3,1)$. В силу базисности в смысле Рисса последовательности (10) почти очевидно,

$$\|f\|\le b_5\Big(\sum_{j=1}^{M-1}\Big|\sum_{r=1}^{M-1}t_r z_{r,j}\Big|^2+\sum_{k=1}^{+\infty}|f_k|^2\Big)^{1/2},$$

и постоянная b_5 не зависит от $\{t_r\}$, $\{f_k\}$, т. е. базисом Рисса в H является последовательность

$$\{w_{(1)},\dots,w_{(M-1)},y_{(M)},y_{(M+1)},\dots\} \tag{11}$$

СПЭ оператора A. □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1, и система СПЭ y удовлетворяет условию, аналогичному 1) теоремы 1, причем $c_1>2b_1+b_2$, $c_1-2b_1\le 1$. Тогда, заменив (если в этом есть необходимость) первые $M-1$ элементов в последовательности y^*, получим базис Рисса в H, составленный из СПЭ оператора A^*.*

Доказательство. Так как (11) — базис Рисса в H, то ортогональное дополнение $(H(1,M))^{\perp}$ к множеству $\{y_{(M)}, y_{(M+1)}, \dots\}$ имеет размерность $M-1$. В этом случае аналогично лемме 4 докажем $((A-\lambda_0 I))^{-1}(H(1,M))^{\perp} = (H(1,M))^{\perp}$. Это позволит выписать новые СПЭ $f_{(1)}, \dots, f_{(M-1)}$ оператора A^*, которые образуют базис в $(H(1,M))^{\perp}$. Следовательно,

$$\{f_{(1)}, \dots, f_{(M-1)}, y_{(M)}, y_{(M+1)}, \dots\}$$

— базис Рисса в H. При этом нижняя постоянная для него не меньше $(c_1 - b_1 - b_2)$. Учитывая этот факт и оценки (4), $c_1 > 2b_1 + b_2$, как при доказательстве леммы 1, докажем, что $\{f_{(1)}, \dots, f_{(M-1)}, y^*_{(M)}, y^*_{(M+1)}, \dots\}$ — базис Рисса в H. □

Всюду ниже

$$\{y_{(k)},\ k = 1, 2, \dots\}, \tag{12}$$

$$\{y^*_{(k)},\ k = 1, 2, \dots\}, \tag{13}$$

полученные в теоремах 1, 2 — *базисы Рисса, образованные СПЭ соответственно операторов* A, A^*.

Каждый элемент базисов (12), (13) соответствует некоторому собственному значению. Эти собственные значения обозначим через $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots$ (для оператора A) и $\eta_1 \neq \eta_2 \neq \cdots$ (для сопряженного оператора).

Все ли собственные значения операторов A, A^* присутствуют в отмеченных множествах? Какова связь выписанных множеств?

Ожидаемый ответ на второй вопрос $\{\mu_k\} = \{\overline{\eta}_k\}$. Ниже докажем, что при предположениях теорем 1, 2 это действительно так.

Отметим, что в общем случае отмеченное равенство может и не выполниться. Примеры типа $Ae_{(k)} = e_{(k-1)}$, $k = 2, 3, \dots$, $Ae_{(1)} = 0$ убеждают в этом.

Пусть $\{y_{(r,\nu)},\ \nu \in J_r\}$ — все элементы базиса Рисса (12), которые соответствуют собственному значению μ_r, и $H(\mu_r)$ — подпространство, натянутое на выписанные элементы. Аналогично $\{y^*_{(r,\nu)},\ \nu \in J^*_r\}$ — все элементы базиса (13), которые соответствуют собственному значению η_r, и $H(\eta_r)^*$– подпространство в H, натянутое на выписанные элементы.

Напомним, что $\mu_r \neq \mu_k$ ($\eta_r \neq \eta_k$), если $r \neq k$.

Лемма 6. $H(\mu_r) \perp H(\eta_m)^*$, *если* $\mu_r \neq \overline{\eta}_m$.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\langle y_{(r,\nu)}, y^*_{(m,s)} \rangle = 0. \tag{14}$$

Если $y_{(r,\nu)}$, $y^*_{(m,s)}$ — собственные злементы, то равенство (14) давно известно. Пусть $y_{(r,\nu)}$ первый присоединенный и $y^*_{(m,s)}$ собственный. Тогда $\nu = 2$, $s = 1$, $(A - \mu_r I)y_{(r,2)} = a_{2,r} y_{(r,1)}$. В этом случае

$$\langle Ay_{(r,2)}, y^*_{(m,1)} \rangle = \langle a_{2,r} y_{(r,1)} + \mu_r y_{(r,2)}, y^*_{(m,1)} \rangle = \mu_r \langle y_{(r,2)}, y^*_{(m,1)} \rangle.$$

При этом учтено, что для собственных элементов ортогональность доказана. С другой стороны,

$$\langle Ay_{(r,2)}, y^*_{(m,1)} \rangle = \langle y_{(r,2)}, A^* y^*_{(m,1)} \rangle = \overline{\eta}_m \langle y_{(r,2)}, y^*_{(m,1)} \rangle,$$

т. е. (14) проверено при $\nu = 2$, $s = 1$. Аналогично проверяются остальные возможности. □

Теорема 3. *Если СПЭ* (12), (13) *соответственно операторов* A, A^* — *базисы Рисса в* H, *то*

$$\{\overline{\eta}_r,\ r = 1, 2, \dots\} = \{\mu_r,\ r = 1, 2, \dots\},$$

и других собственных значений у операторов A, A^* *нет.*

Доказательство. Если бы $\mu_r \neq \overline{\eta}_k$ при всех k, то в силу леммы 6 оказалось бы, что $y_{(r,\nu)}$ ортогонален всем элементам базиса (13). Противоречие. Следовательно, $\mu_r \in \{\overline{\eta}_k\}$ и $\{\mu_r\} \subset \{\overline{\eta}_k\}$. Аналогично проверим как обратное включение, так и отсутствие других собственных значений. $\square$

Замечание 6. Предположим, что при некотором k $H(\mu_k) \perp H(\eta_r)^*$, если $r \neq k$. Тогда $H(\mu_k) = H(\eta_k)^*$.

Замечание 7. Частично результаты анонсированы в [2].

Литература

1. Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.* – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.
2. Мокейчев В.С. *Базисность в смысле Рисса собственных и присоединенных элементов* // Тез. докл. 12-й Сарат. зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения" – Саратов, 2004. – С. 124–125.

Казанский государственный университет

Поступила 17.02.2004