ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

УДК 517.9

*Г.Г. ЛАПТЕВ*

# ОБ ОТСУТСТВИИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В ОКРЕСТНОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ГРАНИЦЫ

## Введение

Данная статья посвящена нахождению условий отсутствия нетривиальных решений полулинейных дифференциальных неравенств и систем неравенств эллиптического типа в окрестности конической точки границы. Приводится также результат для соответствующей параболической задачи. Отсутствие решения является следствием наличия в рассматриваемых неравенствах сингулярности вида $1/|x|^\sigma$, $\sigma > 2$.

Теория линейных краевых задач в конических областях ведет свой отсчет с классической работы В.А. Кондратьева [1]. Современное состояние исследований можно найти в [2] (см. также литературу там). Изучение полулинейных и нелинейных уравнений проводится преимущественно на основе известных утверждений для соответствующих линейных задач. При этом получают достаточно тонкие оценки на рост решений [3], [4]. Следствием этих оценок является, в частности, отсутствие нетривиального решения при некоторых дополнительных условиях.

В данной работе для доказательства отсутствия решения применяется метод пробных функций [5]–[8] без использования каких-либо сведений из линейной теории. Аналогичные результаты для ограниченной области (без конической точки) другим методом доказаны в [9], методом пробных функций в [10], [11] (рассмотрены также эволюционные задачи). Отсутствие решений в неограниченных конических областях методом пробных функций изучалось в [12].

Пусть $K_\omega$ — область на единичной сфере $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, с достаточно гладкой границей $\partial K_\omega$. Конусом $K$ называется множество

$$K = \{x = x(r, \omega) : 0 < r < +\infty,\ \omega \in K_\omega\},$$

где $(r, \omega)$ — сферические координаты точки $x$ в $\mathbb{R}^N$. Боковую поверхность конуса обозначим $\partial K$.

Для простоты будем считать, что коническая точка совпадает с $x = 0$. Под окрестностью $K_R$ конической точки понимается область $\{x \in K : |x| < R\}$ с полной границей $\partial K_R$.

Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с кусочно-гладкой границей. Далее используются пространства С.Л. Соболева $W_q^1(\Omega)$, $W_q^2(\Omega)$, а также локальное пространство $L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, элементы которого принадлежат $L_q(\Omega')$ для любого компактного подмножества $\Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$. Через $C(\overline{\Omega})$ обозначается пространство непрерывных функций, через $C^m(\overline{\Omega})$ — пространство гладких функций. При изучении параболической задачи используются анизотропные варианты соответствующих пространств. Символ $\Delta$ обозначает оператор Лапласа. Для двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $\varphi(x)$ полагаем $\nabla u \nabla \varphi = \sum\limits_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Выражение $\int\limits_{\partial K_R} \frac{\partial u}{\partial n}\, dx$ означает интеграл от

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 971-30551), программы “Ведущие научные школы” (проект 00-15-96047) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00884).

производной функции $u$ по направлению внешней нормали $n$ к границе области $\partial K_R$. Через $c$ с индексами будем обозначать постоянные.

Напомним, что оператор Лапласа $\Delta$ в сферических координатах $(r,\omega)$ имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega,$$

где $\Delta_\omega$ — оператор Бельтрами–Лапласа на единичной сфере $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$.

В дальнейшем постоянно используются наименьшее (первое) собственное значение $\lambda_\omega \equiv \lambda_1(K_\omega) > 0$ и соответствующая собственная функция $\Phi(\omega)$ оператора $\Delta_\omega$, являющиеся решением задачи

$$\begin{gathered} \Delta_\omega\Phi + \lambda\Phi = 0 \quad \text{в} \quad K_\omega, \\ \Phi|_{\partial K_\omega} = 0. \end{gathered}$$

Хорошо известно, что $\Phi(\omega) > 0$ для $\omega \in K_\omega$. Предполагается, что $\Phi(\omega) \le 1$.

## 1. Эллиптическое неравенство

Пусть $R$ — фиксированное число. Рассмотрим проблему отсутствия слабых решений задачи

$$\begin{gathered} -\Delta u \ge u^q/|x|^\sigma \quad \text{в} \quad K_R, \quad q > 1, \quad \sigma > 2, \\ u \ge 0, u \not\equiv 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Далее слабое решение будет пониматься в следующем смысле.

**Определение 1.** Пусть $u(x) \in C(\overline{K_R}\setminus\{0\})$. Неотрицательная функция $u(x)$ называется слабым решением задачи (1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x) \in W^2_\infty(K_R)$ такой, что $\varphi|_{\partial K_R} = 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x = 0$, выполнено интегральное неравенство

$$\int_{\partial K_R} u\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dx - \int_{K_R} u\Delta\varphi\,dx \ge \int_{K_R}\frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi\,dx. \tag{2}$$

Благодаря наложенным условиям все входящие в неравенство (2) интегралы имеют смысл. Условие $u(x) \in C(\overline{K_R}\setminus\{0\})$ предполагает, что функция $u(x)$ имеет непрерывный след на поверхности области $K_R$ за исключением точки $x = 0$. Это обеспечивает, в частности, существование первого интеграла в левой части (2). Но ничего не предполагаем о поведении решения в вершине конуса. Можно записать, например, что $u(x) \in C(\overline{K_R \setminus K_r})$ для всех $r < R$. Именно в таком смысле нужно понимать проводимые далее выкладки.

Заметим, что определение обобщенного решения может быть расширено, в частности, рассмотрением вместо пространства непрерывных функций пространства локально суммируемых функций $L_{q,\mathrm{loc}}(K_R \setminus \{0\})$.

Приведем пример решения задачи (1) для случая так называемой суперкритической сингулярности, когда степень $\sigma > 2$.

Рассмотрим функцию

$$u(r,\omega) = \varepsilon r^s\Phi(\omega),$$

где $\Phi(x)$ — введенная выше собственная функция оператора Бельтрами–Лапласа, $\varepsilon > 0$. Используя выражения для оператора Лапласа в сферических координатах и учитывая, что $-\Delta_\omega\Phi = \lambda_\omega\Phi$, получим

$$-\Delta u = -\varepsilon\left(s(s-1)r^{s-2}\Phi(\omega) + s\frac{N-1}{r}r^{s-1}\Phi(\omega) + \frac{r^s}{r^2}\Delta_\omega\Phi\right) = -\varepsilon\Phi r^{s-2}\{s^2 + s(N-2) - \lambda_\omega\}.$$

Корнями выражения в фигурных скобках являются

$$s_* = -\frac{N-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega} < 0, \quad s^* = -\frac{N-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega} > 0, \tag{3}$$

поэтому оно меньше нуля, если

$$s_* < s < s^*.$$

Выберем параметр $s$ так, чтобы $s^2 + s(N-2) - \lambda_\omega = -\delta < 0$, $s - 2 = sq - \sigma$ и $\varepsilon = \delta^{1/(q-1)}$. Тогда

$$-\varepsilon \Phi r^{s-2}(-\delta) = \varepsilon\delta\Phi r^{sq-\sigma} = \frac{(\varepsilon r^s)^q}{|x|^\sigma}\Phi.$$

Поскольку предполагаем $\Phi \le 1$, то $\Phi \ge \Phi^q$, и последнее выражение оценивается в виде

$$-\Delta u = \frac{(\varepsilon r^s)^q}{|x|^\sigma}\Phi \ge \frac{(\varepsilon r^s \Phi)^q}{|x|^\sigma} = \frac{u^q}{|x|^\sigma}.$$

Заметим, что последнее неравенство получено при двух условиях:

$$\begin{cases} s_* < s < s^*, \\ s - 2 = sq - \sigma, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_* < \frac{\sigma-2}{q-1} < s^*, \\ s = \frac{\sigma-2}{q-1}. \end{cases}$$

Поскольку для изучаемого здесь случая $\sigma > 2$ и $q > 1$, то в силу $s_* < 0$ всегда выполнено неравенство $s_* < \frac{\sigma-2}{q-1}$. Остается только условие

$$\frac{\sigma-2}{q-1} < s^* \Rightarrow q > 1 + \frac{\sigma-2}{s^*} = q^*.$$

Итак, при $\sigma > 2$, $q > q^*$ введенная функция $u(x)$ является решением задачи (1).

Приведем один из основных результатов работы.

**Теорема 1.** *При* $\sigma > 2$ *и*

$$1 < q \le q^* = 1 + \frac{\sigma-2}{s^*}$$

*задача* (1) *не имеет нетривиального решения.*

Перед доказательством теоремы приведем некоторые вспомогательные построения. Как отмечалось выше, в используемом методе главным является подходящий выбор пробных функций. Введем функцию

$$\xi(x) \equiv \xi(r,\omega) = \left(r^{s_*} - \frac{s_* R^{s_*-2}}{2} r^2 + \frac{s_*-2}{2} R^{s_*}\right)\Phi(\omega),$$

где $s_* < 0$ определено формулой (3). Очевидно, $\xi(R,\omega) = 0$, $\partial\xi/\partial r(R,\omega) = 0$ и всюду, кроме $x = 0$, в $K_R$ выполняется соотношение

$$\Delta\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r} - \frac{\lambda_\omega \xi}{r^2} = R^{s_*-2}\left(-\frac{N s_*}{R^2} - \frac{\lambda_\omega s_*}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{\lambda_\omega}{r^2}\right)\Phi(\omega) > 0,$$

т. к. $s_* < 0$ и $r \le R$.

Пробную функцию будем брать в виде произведения

$$\varphi_\rho(x) = \eta_\rho(x)\xi(x). \tag{4}$$

Здесь $\eta_\rho(x) \equiv \eta_\rho(|x|) = \eta_\rho(r) \in C^2[0,\infty)$ — срезающая (в нуле) функция такая, что $\eta_\rho(r) = 0$ для $0 \le r \le \rho$, $\eta_\rho(r) \equiv 1$ для $r > 2\rho$ и при достаточно малых $\rho$

$$\frac{\eta_\rho^p}{\eta_\rho^{p-1}} = \eta_\rho \le c_\eta, \quad \frac{|d\eta_\rho/dr|^p}{\eta_\rho^{p-1}} \le \frac{c_\eta}{\rho^p}, \quad \frac{|\Delta\eta_\rho|^p}{\eta_\rho^{p-1}} \le \frac{c_\eta}{\rho^{2p}},$$

где $c_\eta$ не зависит от $\rho$. Возможность построения такой функции $\eta_\rho$ известна из работ [7], [8].

Очевидны также неравенства (при достаточно малых $\rho$ и $x \in K_{2\rho} \setminus K_\rho$)

$$c_{\xi 0}\Phi(\omega)\rho^{s_*} \le \xi(r,\omega) \le c_{\xi 1}\Phi(\omega)\rho^{s_*}, \quad \left|\frac{\partial \xi}{\partial r}(r,\omega)\right| \le c_{\xi 1}\Phi(\omega)\rho^{s_*-1}, \quad |\Delta\xi| \le c_{\xi 1}\Phi(\omega)\rho^{s_*-2},$$

где $c_{\xi 0}$, $c_{\xi 1}$ зависят от $R$, но не зависят от $\rho$ и $r$.

В дальнейшем понадобится оценка интеграла

$$\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} |x|^{\sigma(p-1)}\, dx$$

при $p > 1$, зависящая от $\rho$. Для ее получения воспользуемся приведенными выше неравенствами и известной формулой

$$\Delta\varphi_\rho = \Delta(\eta_\rho\xi) = \Delta\eta_\rho\xi + 2(\nabla\eta_\rho, \nabla\xi) + \eta_\rho\Delta\xi = \Delta\eta_\rho\xi + 2\frac{d\eta_\rho}{dr}\frac{\partial\xi}{\partial r} + \eta_\rho\Delta\xi.$$

Тогда в области $\rho < |x| < 2\rho$ имеем

$$\frac{|\Delta\varphi_\rho|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} = \frac{|\Delta(\eta_\rho\xi)|^p}{\eta_\rho^{p-1}\xi^{p-1}} \le c_p\frac{|\Delta\eta_\rho|^p}{\eta_\rho^{p-1}}\frac{\xi^p}{\xi^{p-1}} + c_p\frac{|d\eta_\rho/dr|^p}{\eta_\rho^{p-1}}\frac{|\partial\xi/\partial r|^p}{\xi^{p-1}} + c_p\frac{|\eta_\rho|^p}{\eta_\rho^{p-1}}\frac{|\Delta\xi|^p}{\xi^{p-1}} \le$$
$$\le c_p c_\eta \frac{c_{\xi 1}^p}{c_{\xi 0}^{p-1}}\Phi(\omega)\rho^{s_*-2p}.$$

Отсюда для искомого интеграла получаем

$$\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} |x|^{\sigma(p-1)}\, dx \le c_p c_\eta \frac{c_{\xi 1}^p}{c_{\xi 0}^{p-1}}\rho^{s_*-2p}\int_\rho^{2\rho} r^{\sigma(p-1)}r^{N-1}dr \int_{K_\omega}\Phi(\omega)\,d\omega \le$$
$$\le c_{Np\eta\xi}\rho^{p(\sigma-2)+s_*+N-\sigma}, \tag{5}$$

где постоянная $c_{Np\eta\xi}$ не зависит от $\rho$.

**Доказательство теоремы 1.** От противного. Пусть $u(x)$ — решение задачи (1) с $\sigma > 2$ и $1 < q \le q^*$. Наша цель — показать, что тогда $u \equiv 0$. Согласно определению 1 с пробной функцией $\varphi(x) = \varphi_\rho(x)$ (где взято $p = q' > 1$) это означает

$$\int_{K_R}\frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_\rho\,dx \le \int_{\partial K_R} u\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial n}\,dx - \int_{K_R} u\Delta\varphi_\rho\,dx =$$
$$= \int_{\{|x|=R\}\cap\partial K_R} u\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial r}\,dx + \int_{\{|x|<R\}\cap\partial K_R} u\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial n}\,dx - \int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} u\Delta\varphi_\rho\,dx - \int_{K_R\setminus K_{2\rho}} u\Delta\varphi_\rho\,dx. \tag{6}$$

Рассмотрим интегралы в правой части. По построению при $|x| = R$ имеем $\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial r} = 0$, поэтому первый интеграл равен нулю. Из предположения $u \ge 0$ в $K_R$ в силу неравенства $\Delta\xi \ge 0$ заключаем, что последний интеграл меньше нуля. Наконец, на боковой поверхности конуса $K_R$ имеем

$$\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial n} = \Theta(r)\frac{\partial\Phi(\omega)}{\partial n_\omega} \le 0,$$

где $\Theta(r)$ — не зависящая от $\omega$ неотрицательная функция, $n_\omega$ — внешняя нормаль к границе области $K_\omega$. Вывод о неотрицательности производной $\partial\Phi(\omega)/\partial n_\omega$ сделан на том основании, что $\Phi(w) \ge 0$ в $K_\omega$ и $\Phi(\omega)|_{\partial K_\omega} = 0$ по построению. Таким образом, и второй интеграл в правой части неравенства (6) неположителен. В совокупности из приведенных рассуждений следует, что

$$\int_{K_R}\frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_\rho\,dx \le \int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} u|\Delta\varphi_\rho|\,dx.$$

Для оценки правой части этого неравенства применим неравенство Гёльдера. Получим

$$\int_{K_R} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_\rho\, dx = \int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_\rho\, dx + \int_{K_R\setminus K_{2\rho}} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\, dx \leq$$

$$\leq \int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} u|\Delta\varphi_\rho|\, dx \leq \left(\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_\rho\, dx\right)^{1/q} \left(\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}}|x|^{\sigma(q'-1)}\, dx\right)^{1/q'}, \quad (7)$$

откуда с учетом оценки (5) для второго интеграла справа будем иметь

$$\int_{K_R\setminus K_{2\rho}} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\, dx \leq \int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}}|x|^{\sigma(q'-1)}\, dx \leq c_0\rho^{q'(\sigma-2)+s_*+N-\sigma}. \quad (8)$$

Так как подинтегральное выражение в левой части не зависит от $\rho$, можем перейти к пределу по $\rho \to 0$. В случае $q'(\sigma-2)+s_*+N-\sigma \geq 0$ это приводит к соотношению $\int\limits_{K_R} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\, dx \leq c_0$. Тогда в силу равностепенной непрерывности интеграла по мере и ввиду оценки $\varphi_\rho \leq \xi$

$$\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_\rho\, dx \leq \int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\, dx = \varepsilon(\rho) \to 0 \ \text{ при } \ \rho \to 0.$$

Возвращаясь к неравенству (7), получим

$$\int_{K_R\setminus K_{2\rho}} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\, dx \leq \varepsilon^{1/q}(\rho)c_0^{1/q'} \to 0$$

при $\rho \to 0$, т. е. в пределе

$$\int_{K_R} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\, dx = 0,$$

откуда в силу положительности $\xi$ в $K_R$ следует $u \equiv 0$, что противоречит нашему предположению о существовании нетривиального решения (техника исследования критического случая $q'(\sigma-2)+s_*+N-\sigma = 0$ заимствована из [7], [8]).

Элементарными преобразованиями из неравенства

$$q'(\sigma-2)+s_*+N-\sigma \geq 0$$

получаем условие отсутствия нетривиального решения: $1 < q \leq q^*$. $\square$

В отличие от известного случая аналогичной задачи с сингулярностью в области, содержащей малый шар с центром в нуле [9]–[11], когда при $\sigma \geq 2$ решения нет при любых $q > 1$, для конуса определен критический показатель $q^* > 1$. Поэтому мы не рассматриваем "критический" для вырождения случай $\sigma = 2$, а ограничиваемся случаем $\sigma > 2$.

## 2. Система неравенств

Докажем аналогичный предыдущему результат для системы неравенств

$$\begin{gathered} -\Delta u \geq v^{q_1}/|x|^{\sigma_1} \ \text{ в } \ K_R, \quad q_1 > 1, \quad \sigma_1 > 2, \\ -\Delta v \geq u^{q_2}/|x|^{\sigma_2} \ \text{ в } \ K_R, \quad q_2 > 1, \quad \sigma_2 > 2, \\ u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad u \not\equiv 0, \quad v \not\equiv 0. \end{gathered} \quad (9)$$

**Определение 2.** Пусть $u(x), v(x) \in C(\overline{K_R}\setminus\{0\})$. Пара неотрицательных функций $u(x)$, $v(x)$ называется слабым решением задачи (9), если для любой неотрицательной пробной функции

$\varphi(x) \in W^2_\infty(K_R)$ такой, что $\varphi|_{\partial K_R} = 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x = 0$, выполнены интегральные неравенства

$$\int_{\partial K_R} u\frac{\partial \varphi}{\partial n}\,dx - \int_{K_R} u\Delta\varphi\,dx \geq \int_{K_R} \frac{v^{q_1}}{|x|^{\sigma_1}}\varphi\,dx,$$
$$\int_{\partial K_R} v\frac{\partial \varphi}{\partial n}\,dx - \int_{K_R} v\Delta\varphi\,dx \geq \int_{K_R} \frac{u^{q_2}}{|x|^{\sigma_2}}\varphi\,dx.$$

**Теорема 2.** *При* $\sigma_1 > 2$, $\sigma_2 > 2$, $q_1 > 1$, $q_2 > 1$ *и* $\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq 0$, *где* $\gamma_1 = q_1(\sigma_2 - 2) + \sigma_1 - 2 - s^*(q_1 q_2 - 1)$, $\gamma_2 = q_2(\sigma_1 - 2) + \sigma_2 - 2 - s^*(q_1 q_2 - 1)$, *задача* (9) *не имеет (нетривиального) решения.*

**Доказательство.** Из определения слабого решения, действуя аналогично доказательству теоремы 1, получаем

$$\int_{K_R} \frac{v^{q_1}}{|x|^{\sigma_1}}\varphi_\rho\,dx \leq \left(\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^{q_2}}{|x|^{\sigma_2}}\varphi_\rho\,dx\right)^{1/q_2} \left(\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^{q_2'}}{\varphi_\rho^{q_2'-1}}|x|^{\sigma_2(q_2'-1)}\,dx\right)^{1/q_2'} \equiv$$
$$\equiv \left(\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^{q_2}}{|x|^{\sigma_2}}\varphi_\rho\,dx\right)^{1/q_2} J_2^{1/q_2'}, \quad (10)$$

и также

$$\int_{K_R} \frac{u^{q_2}}{|x|^{\sigma_2}}\varphi_\rho\,dx \leq \left(\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{v^{q_1}}{|x|^{\sigma_1}}\varphi_\rho\,dx\right)^{1/q_1} J_1^{1/q_1'}, \quad (11)$$

где для определенных очевидным образом интегралов $J_1$ и $J_2$ из (5), с $p = q_1'$ и $p = q_2'$ соответственно имеем оценки

$$J_i \leq c\rho^{q_i'(\sigma_i - 2) + s_* + N - \sigma_i}, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя неравенство (11) в (10), приходим к оценке

$$\int_{K_R} \frac{v^{q_1}}{|x|^{\sigma_1}}\varphi_\rho\,dx \leq \left(\left(\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{v^{q_1}}{|x|^{\sigma_1}}\varphi_\rho\,dx\right)^{1/q_1} J_1^{1/q_1'}\right)^{1/q_2} J_2^{1/q_2'},$$

т. е.

$$\int_{K_R} \frac{v^{q_1}}{|x|^{\sigma_1}}\varphi_\rho\,dx \leq \left(J_1^{1/(q_1' q_2)} J_2^{1/q_2'}\right)^{q_1 q_2/(q_1 q_2 - 1)} = \left(J_1^{q_1 - 1} J_2^{q_1(q_2 - 1)}\right)^{1/(q_1 q_2 - 1)} \leq c\rho^{\gamma_1/(q_1 q_2 - 1)}.$$

Отсюда при $\gamma_1 \geq 0$ следует отсутствие нетривиального решения $v(x)$. Аналогично, подставляя (10) в (11), получим

$$\int_{K_R} \frac{u^{q_2}}{|x|^{\sigma_2}}\varphi_\rho\,dx \leq c\rho^{\gamma_2/(q_1 q_2 - 1)},$$

что дает отсутствие нетривиального решения $u(x)$ при $\gamma_2 \geq 0$.

Заметим, что если $u \equiv 0$, то в силу неравенства (10) получаем $v \equiv 0$, и наоборот (по неравенству (11)). Объединяя полученные условия отсутствия нетривиального решения для $u(x)$ и $v(x)$, приходим к утверждению теоремы. □

## 3. Эволюционная задача

Введем фиксированное число $R_0$ и коническую область $K_0 \equiv K_{R_0} = \{x \in K : |x| < R_0\}$. Рассмотрим эволюционное (параболическое) неравенство

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq u^q/|x|^\sigma \quad \text{в} \quad K_0 \times \mathbb{R}_+, \quad u \geq 0, \quad u \not\equiv 0,\\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0.\end{gathered} \tag{12}$$

**Определение 3.** Неотрицательная функция $u(x,t) \in C(\overline{K_0} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+)$ называется слабым решением задачи (12), если для любого конуса $K_R$, $R \leq R_0$, чисел $t_1 > t_0 \geq 0$ и неотрицательной функции $\varphi(x,t) \in W^2_\infty(K_R \times \mathbb{R})$ такой, что $\varphi(x,t)|_{\partial K_R} = 0$ и $\varphi(x,t) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ для всех $t \geq 0$, выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\int_{K_R} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi\, dx\, dt \leq -\int_{t_0}^{t_1}\int_{K_R} u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Delta\varphi\right) dx\, dt \,+\\ + \int_{K_R} u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\, dx - \int_{K_R} u(x,t_0)\varphi(x,t_0)\, dx + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial K_R} u\frac{\partial\varphi}{\partial n} dx\, dt.\end{aligned} \tag{13}$$

Убедимся, что введенный ранее критический показатель $q^*$ для эллиптического неравенства не меняется и в случае эволюционной задачи (12).

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (12). Зафиксируем некоторые $t_0$ и $t_1$, $t_1 - t_0 = \tau$ и выберем пробную функцию

$$\varphi_{\rho,\tau}(x,t) = T_\tau(t)\varphi_\rho(x),$$

где $\varphi_\rho(x)$ определено формулой (4), $T_\tau$ — стандартная срезающая функция, $T_\tau(t) \in C^2[t_0,t_1]$ и $T_\tau(t) = 1$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau/2$, $T_\tau(t_1) = T'_\tau(t_1) = 0$, $0 \leq T_\tau(t) \leq 1$,

$$\int_{t_0+\tau/2}^{t_1} \frac{|T'_\tau|^{q'}}{T_\tau^{q'-1}} dt \leq c_T \tau^{1-q'},$$

где $c_T$ не зависит от $\tau$. Как известно, такой выбор возможен [6], [7].

Тогда по определению решения для некоторого $R < R_0$

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\int_{K_R} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_{\rho,\tau} dx\, dt \leq -\int_{K_R} u(x,t_0)\varphi_\rho\, dx - \int_{\operatorname{supp}|T'_\tau|}\int_{K_R} uT'_\tau\varphi_\rho\, dx\, dt \,-\\ -\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Delta\varphi_\rho<0} uT_\tau\Delta\varphi_\rho\, dx\, dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial K_R} u\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial n}T_\tau\, dx\, dt.\end{aligned}$$

При указанном выборе функции $\varphi_\rho$ последний интеграл является неположительным, поэтому можно записать такое неравенство

$$\int_{K_R} u(x,t_0)\varphi_\rho\, dx + \int_{t_0}^{t_1}\int_{K_R} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_{\rho,\tau} dx\, dt \leq \int_{t_0+\tau/2}^{t_1} |T'_\tau| \int_{K_R} u\varphi_\rho\, dx\, dt + \int_{t_0}^{t_1} T_\tau \int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} u|\Delta\varphi_\rho|\, dx\, dt.$$

Применяя для оценки правой части неравенство Гёльдера

$$\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} u(x,t_0)\varphi_\rho\,dx + \int_{K_R\setminus K_{2\rho}} u(x,t_0)\xi\,dx + \int_{t_0}^{t_0+\tau/2}\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_\rho\,dx\,dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+\tau/2}\int_{K_R\setminus K_{2\rho}} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\,dx\,dt + \int_{t_0+\tau/2}^{t_1}\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_{\rho,\tau}dx\,dt + \int_{t_0+\tau/2}^{t_1}\int_{K_R\setminus K_{2\rho}} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi T_\tau\,dx\,dt \le$$
$$\le \left(\int_{t_0+\tau/2}^{t_1}\int_{K_R} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_\rho T_\tau\,dx\,dt\right)^{1/q} \left(\int_{t_0+\tau/2}^{t_1} \frac{|T_\tau'|^{q'}}{T_\tau^{q'-1}}dt\int_{K_R}\varphi_\rho|x|^{\sigma(q'-1)}dx\right)^{1/q'} +$$
$$+ \left(\int_{t_0}^{t_1}\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\varphi_\rho T_\tau\,dx\,dt\right)^{1/q} \left(\int_{t_0}^{t_1} T_\tau\,dt\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho}\frac{|\Delta\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}}|x|^{\sigma(q'-1)}dx\right)^{1/q'}, \quad (14)$$

получим

$$\int_{K_R\setminus K_{2\rho}} u(x,t_0)\xi\,dx + \int_{t_0}^{t_0+\tau/2}\int_{K_R\setminus K_{2\rho}} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\,dx\,dt \le$$
$$\le \int_{t_0+\tau/2}^{t_1} \frac{|T_\tau'|^{q'}}{T_\tau^{q'-1}}dt\int_{K_R}\varphi_\rho|x|^{\sigma(q'-1)}dx + \int_{t_0}^{t_1} T_\tau\,dt\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho}\frac{|\Delta\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}}|x|^{\sigma(q'-1)}dx. \quad (15)$$

Второй интеграл справа оценим аналогично эллиптическому случаю (8):

$$\int_{t_0}^{t_1} T_\tau\,dt\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho}\frac{|\Delta\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}}|x|^{\sigma(q'-1)}\,dx \le c_0\tau\rho^{q'(\sigma-2)+s_*+N-\sigma}.$$

Для первого интеграла в правой части (15) будем иметь

$$\int_{t_0+\tau/2}^{t_1} \frac{|T_\tau'|^{q'}}{T_\tau^{q'-1}}dt\int_{K_R}\varphi_\rho|x|^{\sigma(q'-1)}dx \le c_T c_1\tau^{1-q'}R^{\sigma(q'-1)+s_*+N},$$

где постоянная $c_1$ возникает при интегрировании функции $\varphi_\rho$ и, как можно убедиться, не зависит от $R$.

Тогда из (15) следует оценка

$$\int_{K_R\setminus K_{2\rho}} u(x,t_0)\xi\,dx + \int_{t_0}^{t_0+\tau/2}\int_{K_R\setminus K_{2\rho}} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\,dx\,dt \le$$
$$\le c_T c_1\tau^{1-q'}R^{\sigma(q'-1)+s_*+N} + c_0\tau\rho^{q'(\sigma-2)+s_*+N-\sigma}.$$

Переходя к пределу по $\rho\to 0$ при фиксированных $t_0$ и $\tau$, в случае

$$q'(\sigma-2)+s_*+N-\sigma \ge 0$$

получим

$$\int_{K_R} u(x,t_0)\xi\,dx + \int_{t_0}^{t_0+\tau/2}\int_{K_R} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\,dx\,dt \le c_T c_1\tau^{1-q'}R^{\sigma(q'-1)+s_*+N} + c_0\tau. \quad (16)$$

Аналогично эллиптическому случаю из равностепенной непрерывности интеграла вытекает соотношение (в силу произвольности $\tau$ здесь можно взять в качестве верхнего предела интегрирования $t_1$)

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{K_{2\rho}\setminus K_\rho} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\,dx\,dt \to 0, \quad \rho\to 0.$$

Тогда, вспоминая неравенство (14) и замечая, что последний интеграл в нем стремится к нулю при $\rho \to 0$, повторяя последующие выкладки, приходим к выводу, что при $q'(\sigma-2)+s_*+N-\sigma \geq 0$ вместо оценки (16) имеем

$$\int_{K_R} u(x,t_0)\xi\,dx + \int_{t_0}^{t_0+\tau/2}\int_{K_R} \frac{u^q}{|x|^\sigma}\xi\,dx\,dt \leq c_T c_1 \tau^{1-q'} R^{\sigma(q'-1)+s_*+N}. \tag{17}$$

Поскольку в неравенстве (17) все слагаемые слева положительны, а справа имеем фиксированное $R$ и $\frac{1}{\tau^{q'-1}} \to 0$ при $\tau \to \infty$, то отсюда сразу следует

**Теорема 3.** *При $q>1$, $\sigma>2$ и $1<q\leq q^* = 1+\frac{\sigma-2}{s^*}$ задача* (12) *не имеет решения.*

Полученное утверждение указывает на то, что решение не существует в ограниченной по $x$ области $K_R$ (т. е. имеет место так называемое “полное” разрушение решения). В то же время по $t$ доказано отсутствие глобального решения. На самом деле (см. [9] в случае окрестности нуля) в данном случае не существует даже локального по $t$ решения, т. е. разрушение носит “полный” и “мгновенный” характер.

**Определение 4.** Функция $u(x,t)$ называется локальным слабым решением задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq u^q/|x|^\sigma, \quad u \geq 0, \quad u \not\equiv 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \ \text{ в } \ K_0, \end{gathered} \tag{18}$$

если существует такое число $T_0>0$, что $u(x,t) \in C(\overline{K_0}\setminus\{0\}\times[0,T_0))$ и для любых $0 \leq t_0 < t_1 < T_0$ выполнены предположения о функции $\varphi(x,t)$ из определения 3 и интегральное неравенство (13) (заметим, что в данном случае вместо $\mathbb{R}_+$ берем интервал $(0,T_0)$).

**Теорема 4.** *Задача* (18) *не имеет локального решения при $q>1$, $\sigma>2$ и $1<q\leq q^*$.*

**Доказательство.** Пусть существуют $T_0>0$ и локальное решение $u(x,t)$. Тогда из (17) при $t_0<T_0$ и $t_0+\tau<T_0$ имеем

$$\int_{K_R} u(x,t_0)\xi\,dx \leq c_T c_1 \tau^{1-q'} R^{\sigma(q'-1)+s_*+N}. \tag{19}$$

Далее используем свойство бесконечной скорости распространения возмущений для параболических уравнений и неравенств (доказываемое, исходя из положительности фундаментального решения), которое означает, что если $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq 0$ и $u_0 \geq 0$ ($u_0 \not\equiv 0$), то для любого момента времени $t_0>0$ существует такое $\varepsilon>0$, что $u(x,t_0) \geq \varepsilon > 0$ для всех $x \in K_0$ (аналогичные аргументы используются в работе [9]).

Тогда из (19) получим

$$c_T c_1 \tau^{1-q'} R^{\sigma(q'-1)+s_*+N} \geq \int_{K_R} u(x,t_0)\xi\,dx \geq \varepsilon c_\xi R^{s_*+N},$$

где $c_\xi$ — константа, возникающая при интегрировании функции $\xi$ и не зависящая от $R$. Отсюда

$$\frac{c_\xi \varepsilon}{c_T c_1 \tau^{1-q'}} \leq R^{\sigma(q'-1)}.$$

Левая часть строго больше нуля и не зависит от $R$, тогда как правая часть стремится к нулю при $R \to 0$. Получено противоречие, из которого вытекает отсутствие даже локального по времени решения задачи (12). $\square$

В заключение автор выражает благодарность С.И. Похожаеву за постановку задачи и В.В. Курте за полезное обсуждение результатов.

## Литература


1. Кондратьев В.А. *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
2. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* – М.: Наука. – 1991. – 336 с.
3. Кондратьев В.А. *О решениях слабонелинейных эллиптических уравнений в окрестности конической точки границы* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 2. – С. 298–305.
4. Коньков А.А. *О неотрицательных решениях квазилинейных эллиптических неравенств* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т. 63. – № 2. – С. 41–127.
5. Курта В.В. *Об отсутствии положительных решений у полулинейных эллиптических уравнений* // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 162–169.
6. Курта В.В. *Некоторые вопросы качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.* Дис. … докт. физ.-матем. наук. – М.: – 1994. – 323 с.
7. Митидиери Э., Похожаев С.И. *Отсутствие глобальных положительных решений квазилинейных эллиптических неравенств* // Докл. РАН. – 1998. – Т. 359. – № 4. – С. 456–460.
8. Митидиери Э., Похожаев С.И. *Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в* $\mathbb{R}^N$ // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 192–222.
9. Brezis H., Cabré X. *Some simple nonlinear PDE's without solutions* // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. B. – 1998. – V. 8. – P. 223–262.
10. Митидиери Э., Похожаев С.И. *Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных* // Тр. МИАН. – 2001. – Т. 234. – 384 с.
11. Лаптев Г.Г. *Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств* // Тр. МИАН. – 2001. – Т. 232. – С. 223–235.
12. Лаптев Г.Г. *Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. 64. – № 6. – С. 108–124.



*Тульский государственный университет*



*Поступила*
14.03.2001