ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.929

В.В. ВЛАСОВ

О БАЗИСНОСТИ СЕМЕЙСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В предлагаемой работе приводятся результаты о свойствах системы экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа в шкале пространств Соболева с целочисленным индексом. Из этих свойств наиболее важными являются полнота и базисность Рисса системы экспоненциальных решений. На их основе получены неулучшаемые, ранее неизвестные оценки решений указанных уравнений.

Результаты данной статьи обобщают результаты работ [1], [3] и существенно опираются на них.

1. Определения, обозначения и формулировки результатов

Рассмотрим начальную задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$\sum_{j=0}^{n}\Big(B_j u(t-h_j)+D_j\frac{du}{dt}(t-h_j)\Big)=0, \quad t\in\mathbb{R}_+=(0,+\infty), \tag{1}$$

$$u(t)=y(t), \quad t\in[-h,0), \quad u(+0)=y(-0)=\varphi_0. \tag{2}$$

Здесь B_j, D_j, $j=0,1,\dots,n$, — матрицы размера $m\times m$ с постоянными комплексными элементами, числа h_j таковы, что $0=h_0<h_1<\dots<h_n=h$.

Обозначим через $\mathcal{L}(\lambda)$ матрицу-функцию

$$\mathcal{L}(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}(B_j+\lambda D_j)\exp(-\lambda h_j),$$

через $l(\lambda)=\det\mathcal{L}(\lambda)$ — характеристический квазимногочлен [4] уравнения (1), через λ_q — нули функции $l(\lambda)$, упорядоченные по возрастанию модулей с учетом кратности, через Λ — множество всех нулей функции $l(\lambda)$, через ν_q — кратности λ_q. Собственные векторы, входящие в каноническую систему [5] собственных и присоединенных (корневых) векторов матрицы-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающие числу λ_q, обозначим через $x_{q,j,0}$, их присоединенные порядка s — через $x_{q,j,s}$ (индекс j показывает, каким по счету является вектор $x_{q,j,0}$ в специально выбранном базисе подпространства решений уравнения $\mathcal{L}(\lambda_q)x=0$).

Введем систему экспоненциальных решений уравнения (1)

$$y_{q,j,s}(t)=\exp(\lambda_q t)\Big(\frac{t^s}{s!}x_{q,j,0}+\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}x_{q,j,1}+\dots+x_{q,j,s}\Big). \tag{3}$$

Обозначим через $W^p_{2,\gamma}((a,b),\mathbb{C}^m)$, $-\infty<a<b\le+\infty$, $p=1,2,\dots$, весовые пространства Соболева вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^m$, снабженные нормами

$$\|v\|_{W^p_{2,\gamma}(a,b)}\equiv\Big(\int_a^b\exp(-2\gamma t)\Big(\sum_{j=0}^{p}\|v^{(j)}(t)\|^2_{\mathbb{C}^m}\Big)dt\Big)^{1/2}, \quad \gamma\ge 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 02-01-00790, 00-15–96100.

Здесь и далее $W_{2,0}^p \equiv W_2^p$, $v^{(j)}(t) = \frac{d^j}{dt^j}v(t)$; $p, j = 1, 2, \dots$

Определение 1. Вектор-функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W_{2,\gamma}^p((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}_+$, назовем решением задачи (1), (2), если $u(t)$ тождественно удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

Приведем результат о разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $W_{2,\gamma}^p((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$, $p \geq 2$.

Лемма 1. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, *а начальная функция* $y(s)$ *принадлежит пространству* $W_2^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$ *и удовлетворяет условиям согласования*

$$\sum_{j=0}^{n}(B_j y^{(k)}(-h_j) + D_j y^{(k+1)}(-h_j)) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-2. \tag{4}$$

Тогда найдется такое $\gamma_0 \geq 0$, *что для любого* $\gamma \geq \gamma_0$ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве* $W_{2,\gamma}^p((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$, *при этом справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^p(-h,+\infty)} \leq d_0 \|y\|_{W_2^p(-h,0)}$$

с постоянной d_0, *не зависящей от функции* $y(t)$.

Обозначим через $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$ подпространство функций $\{y(s)\}$ пространства $W_2^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$, удовлетворяющих условиям согласования (4), $k = 0, 1, \dots, p-2$.

Сформулируем результаты о свойствах системы экспоненциальных решений уравнения (1).

Предложение 1. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда экспоненциальные решения* (3) *уравнения* (1) *образуют минимальную систему в пространстве* $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Лемма 2. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$. *Тогда найдутся такие постоянные* α_1 *и* α_2, *что множество* Λ *лежит в полосе* $\{\lambda : \alpha_1 < \operatorname{Re}\lambda < \alpha_2\}$, *а система экспоненциальных решений* $\{y_{q,j,s}(t)\}$ *полна в пространстве* $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Пусть $B(\lambda_q,\rho)$ — круг радиуса ρ с центром в точке λ_q, а $G(\Lambda,\rho) \equiv \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{\lambda_q \in \Lambda} B(\lambda_q,\rho))$.

Лемма 3. *Если* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, *то найдется такая система замкнутых контуров*

$$\Gamma_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \alpha_2,\ c_n \leq \operatorname{Im}\lambda \leq c_{n+1}\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \alpha_2,\ \operatorname{Im}\lambda = c_{n+1}\} \cup$$
$$\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \alpha_1,\ c_n \leq \operatorname{Im}\lambda \leq c_{n+1}\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \alpha_2,\ \operatorname{Im}\lambda = c_n\},$$

целиком принадлежащих области $G(\Lambda,\rho)$ *при некотором достаточно малом* $\rho > 0$.

При этом выполняются следующие условия:

(i) *последовательность вещественных чисел* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *такова, что* $0 < \delta \leq c_{n+1} - c_n \leq \Delta < +\infty$, *где* δ *и* Δ — *положительные постоянные*;

(ii) *количество* $N(\Gamma_n)$ *нулей функции* $l(\lambda)$ (*с учетом кратности*), *лежащих в областях, границами которых являются контуры* Γ_n, *равномерно ограничено по* n, *т. е.* $\max_n N(\Gamma_n) \leq M$.

Обозначим через $\mathcal{W}_n$ подпространства пространства $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$, являющиеся линейной оболочкой всех экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$ вида (3), отвечающих числам λ_q, лежащим в областях, границами которых являются контуры Γ_n, а через V_{λ_q} — подпространства пространства $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$, являющиеся линейной оболочкой всех экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$, отвечающих числу λ_q.

Приведем формулировки основных результатов статьи.

Теорема 1. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$. *Тогда семейство подпространств* $\{\mathcal{W}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Теорему 1 в случае, когда множество Λ отделимо, уточняет

Теорема 2. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, *множество* Λ *отделимо, т. е.* $\inf\limits_{\lambda_p \neq \lambda_q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$. *Тогда семейство подпространств* $\{V_{\lambda_q}\}_{\lambda_q \in \Lambda}$ *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W^p_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Приведем результат об оценке решений задачи (1), (2).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, а вектор-функция* $y(t)$ *принадлежит пространству* $W^p_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$. *Тогда для любого решения* $u(t) \in W^p_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ *задачи* (1), (2) *выполнена оценка*

$$\|u(t)\|_{W^p_2(t-h,t)} \equiv \left(\int_{-h}^{0} \sum_{j=0}^{p} \|u^{(j)}(t+s)\|^2_{\mathbb{C}^m}\, ds \right)^{1/2} \leq d \exp(\varkappa t)(t+1)^{N-1} \|y\|_{W^p_2(-h,0)}, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где $\varkappa = \sup\limits_{\lambda_q \in \Lambda} \operatorname{Re} \lambda_q$, $N = \max\limits_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$, *а постоянная* d *не зависит от вектор-функции* $y(t)$.

Замечание 1. Известно ([6], с. 26), что для квазимногочленов величина $N = \max\limits_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$ конечна, причем в [6] приведена ее оценка.

Замечание 2. В случае $p = 1$ условия согласования (4) не вводятся, и при этом полагается $W^1_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m) \equiv W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$. Отметим, что при $p = 1$ доказательства теорем 1–3 приведены в [1], а при $p = 2$ — в [3].

2. Доказательства основных результатов

При доказательствах существенно используются результаты из [1]–[3]. Для удобства читателей приведем их формулировки.

Определение 2. Вектор-функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W^1_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ при некотором $\gamma \geq 0$, назовем сильным решением задачи (1), (2), если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и условию (2).

Лемма 3′ [1]. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда найдется такое* $\gamma_0 \geq 0$, *что при всех* $\gamma \geq \gamma_0$ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ *для любой вектор-функции* $y(t) \in W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$, *и для ее решения справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(-h,+\infty)} \leq d_1 \|y\|_{W^1_2(-h,0)}$$

с постоянной d_1, *не зависящей от функции* $y(t)$.

Принимая во внимание лемму 3 из [7], введем аналогично [8] полугруппу U_t $(t \geq 0)$ ограниченных операторов, действующих в пространстве $W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ согласно правилу

$$(U_t y)(s) = u(t+s), \quad s \in (-h,0), \quad t \geq 0,$$

где $u(\cdot)$ — сильное решение задачи (1), (2), отвечающее начальной функции $y(t)$.

Лемма 2′ [1]. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда семейство операторов* U_t $(t \geq 0)$ *образует* C^0-*полугруппу в пространстве* $W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ *с генератором* $\mathbb{D}$, *имеющим область определения*

$$\operatorname{Dom}(\mathbb{D}) = \left\{ \varphi \in W^2_2((-h,0),\mathbb{C}^m),\ \sum_{j=0}^{n} (B_j \varphi(-h_j) + D_j \varphi^{(1)}(-h_j)) = 0 \right\}$$

и действующим по правилу $(\mathbb{D}\varphi)(s) = \varphi^{(1)}(s)$, $s \in (-h,0)$.

Существенную роль в дальнейшем играет

Лемма 4. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда резольвента* $R(\lambda, \mathbb{D})$ *оператора* $\mathbb{D}$ *в точках существования представима в виде*

$$(R(\lambda,\mathbb{D})f)(t) = ((\mathbb{D}-\lambda I)^{-1}f)(t) = \exp(\lambda t)\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\Big[\sum_{j=0}^{n}\exp(-\lambda h_j)D_j f(0) -$$

$$-\sum_{j=0}^{n}\exp(-\lambda h_j)\int_{-h_j}^{0}(D_j f^{(1)}(\tau) + B_j f(\tau))\exp(-\lambda\tau)d\tau\Big] +$$

$$+\exp(\lambda t)\int_0^t \exp(-\lambda\tau)f(\tau)d\tau, \quad t\in[-h,0], \quad (6)$$

при этом оператор $R^p(\lambda, \mathbb{D})$ ($\lambda \in G(\Lambda,\rho)$, $p \in \mathbb{N}$) *отображает пространство* $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$ *на подпространство* $W_{2,v}^{p+1}((-h,0),\mathbb{C}^m)$, *причем для любого* $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$ *справедливо неравенство*

$$\|R^p(\lambda,\mathbb{D})f\|_{W_2^{p+1}(-h,0)} \le c\|f\|_{W_2^1(-h,0)} \quad (7)$$

с постоянной c, *не зависящей от функции* $f(t) \in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что оператор $R(\lambda,\mathbb{D})$ ($\lambda \in G(\Lambda,\rho)$) отображает подпространство $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$ в пространство $W_2^{p+1}((-h,0),\mathbb{C}^m)$. Действительно, из явного вида оператора $R(\lambda,\mathbb{D})$ вытекает, что вольтерров интегральный оператор в правой части (6) переводит подпространство $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$ в пространство $W_2^{p+1}((-h,0),\mathbb{C}^m)$, а первое слагаемое в правой части (6), очевидно, принадлежит пространству $W_2^{p+1}((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Нетрудно убедиться также, что справедлива оценка (7). Докажем это индукцией по p. Пусть при $n = p-1$ справедлива оценка

$$\|R^{p-1}(\lambda,\mathbb{D})f\|_{W_2^p[-h,0]} \le c\|f\|_{W_2^1[-h,0]}, \quad \lambda \in G(\Lambda,\rho). \quad (8)$$

Учитывая то, что оператор $[\frac{d}{dt}R(\lambda,\mathbb{D})]$ ограничен в пространстве $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\|R^p(\lambda,\mathbb{D})f\|^2_{W_2^{p+1}(-h,0)} \le c_1\left(\left\|\frac{d}{dt}R^p(\lambda,\mathbb{D})f\right\|^2_{W_2^p(-h,0)} +\right.$$

$$\left.+\|R^p(\lambda,\mathbb{D})f\|^2_{W_2^p(-h,0)}\right) = c_1\left(\left\|\left(\frac{d}{dt}R(\lambda,\mathbb{D})\right)R^{p-1}(\lambda,\mathbb{D})f\right\|^2_{W_2^p(-h,0)} +\right.$$

$$\left.+\|R^{p-1}(\lambda,\mathbb{D})f\|^2_{W_2^p(-h,0)}\right) \le d_1\|R^{p-1}(\lambda,\mathbb{D})f\|^2_{W_2^p(-h,0)}. \quad (9)$$

Поскольку при $p = 1$ неравенство (7) установлено в [3], то из (8), (9) вытекает искомое неравенство (7) при $n = p$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что подпространство $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$ отображается оператором $R(\lambda,\mathbb{D})$ ($\lambda \in G(\Lambda,\rho)$) на подпространство $W_{2,v}^{p+1}((-h,0),\mathbb{C}^m)$. Заметим, что в случае $p = 1$ этот факт установлен в [3].

Рассмотрим функцию $u_1(t) = (R(\lambda,\mathbb{D})f)(t)$, где $f(t) \in W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$. Функция $u_1(t) \in W_2^{p+1}((-h,0),\mathbb{C}^m)$ и удовлетворяет уравнению

$$u_1^{(1)}(t) - \lambda u_1(t) = f(t), \quad t \in [-h,0].$$

Согласно теореме о следах ([9], с. 30) выполнены соотношения

$$(u_1^{(k+1)}(t) - \lambda u_1^{(k)}(t))|_{t=-h_j} = f^{(k)}(-h_j), \quad k = 0,1,\ldots,p-2; \quad j = 0,1,\ldots,n. \quad (10)$$

По доказанному в [3] функция $u_1(t)$ удовлетворяет условиям согласования при $k = 0$

$$\sum_{j=0}^{n}(B_j u_1(-h_j) + D_j u_1^{(1)}(-h_j)) = 0. \tag{11}$$

Согласно предположению из включения $f(t) \in W_{2,v}^{p}((-h,0),\mathbb{C}^m)$ вытекает

$$\sum_{j=0}^{n}(B_j f^{(k)}(-h_j) + D_j f^{(k+1)}(-h_j)) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,p-2. \tag{12}$$

Из соотношений (10), (11), а также (12) при $k = 0$ получим

$$\sum_{j=0}^{n}(B_j u_1^{(1)}(-h_j) + D_j u_1^{(2)}(-h_j)) - \lambda\sum_{j=0}^{n}(B_j u_1(-h_j) + D_j u_1^{(1)}(-h_j)) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n}(B_j f(-h_j) + D_j f^{(1)}(-h_j)) = 0.$$

Тем самым условия согласования (4) выполнены для функции $u_1(t)$ при $k = 1$. Продолжая этот рекуррентный процесс, на l-м шаге получим

$$\sum_{j=0}^{n}(B_j u_1^{(l)}(-h_j) + D_j u_1^{(l+1)}(-h_j)) - \lambda\sum_{j=0}^{n}(B_j u_1^{(l-1)}(-h_j) + D_j u^{(l)}(-h_j)) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n}(B_j f^{(l-1)}(-h_j) + D_j f^{(l)}(-h_j)) = 0, \quad l = 0,1,\ldots,p-2. \tag{13}$$

Таким образом, функция $u_1(t)$ удовлетворяет условиям согласования (4) при $k = 0,1,\ldots,p-1$.

Наконец, перейдем к доказательству (индукцией по p) сюръективности отображения $R^p(\lambda,\mathbb{D}) : W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m) \to W_{2,v}^{p+1}((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Предположим, что отображение $R^{p-1}(\lambda,\mathbb{D})$ является сюръекцией. На функцию $u(t) \in W_{2,v}^{p+1}((-h,0),\mathbb{C}^m)$ подействуем оператором $(\mathbb{D} - \lambda I)$: $(\mathbb{D} - \lambda I)u(t) = f_1(t)$. По функции $f_1(t)$ построим функции $u_1(t) = (R(\lambda,\mathbb{D})f_1)(t)$ и $w(t) = u(t) - u_1(t)$. Очевидно, функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} - \lambda w(t) = 0, \quad \lambda \in G(\Lambda,\rho), \quad t \in [-h,0], \tag{14}$$

а также условиям согласования

$$\sum_{j=0}^{n}(B_j w(-h_j) + D_j w^{(1)}(-h_j)) = 0. \tag{15}$$

Из уравнения (14) получаем $w(t) = \exp(\lambda t)c$, а из условия (15) вытекает

$$\mathcal{L}(\lambda)c = 0. \tag{16}$$

Поскольку $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$, то вектор $c \equiv 0$, т. е. $u(t) \equiv u_1(t)$.

Таким образом сюръективность отображения $R^p(\lambda,\mathbb{D})$ доказана. $\square$

В дальнейшем будет использоваться

Предложение 2 [3]. *Пусть H_1 и H_2 — сепарабельные гильбертовы пространства, $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ — базис Рисса пространства H_1, $\mathcal{B}$ — ограниченный и ограниченно обратимый оператор, отображающий пространство H_1 на пространство H_2. Тогда система векторов $\{\mathcal{B}y_j\}_{j=1}^{\infty}$ образует базис Рисса пространства H_2.*

Следствие. Пусть H_1 и H_2 — сепарабельные гильбертовы пространства, $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ — базис Рисса из подпространств пространства H_1, $\mathcal{B}$ — ограниченный и ограниченно обратимый оператор, отображающий пространство H_1 на пространство H_2. Тогда система подпространств $\{\mathcal{B}V_j\}_{j=1}^{\infty}$ образует базис Рисса из подпространств пространства H_2.

Учитывая лемму 4 и следствие из предложения 2, поясним, каким образом могут быть установлены теоремы 1–3 данной статьи.

Теорема 1 вытекает из теоремы 1 [1], леммы 4 и следствия из предложения 2. Отметим, что подпространства $\mathcal{W}_n$ и V_{λ_q} являются инвариантными для оператора $R(\lambda, \mathbb{D})$ при $\lambda \in G(\Lambda, \rho)$.

Принимая во внимание теорему 1 [1] и рассматривая в качестве $\mathcal{B}$ оператор $R^{p-1}(\lambda, \mathbb{D})$, $\lambda \in G(\Lambda, \rho)$, и полагая $H_1 = W_2^1((-h,0), \mathbb{C}^m)$, $H_2 = W_{2,v}^p((-h,0), \mathbb{C}^m)$, на основании леммы 4 и следствия из предложения 2 получим, что система подпространств $\{\mathcal{W}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $W_{2,v}^p((-h,0), \mathbb{C}^m)$.

В свою очередь, теорема 2 вытекает из теоремы 3 [1], леммы 4 и следствия из предложения 2.

Результат о корректной разрешимости для более общих дифференциально-разностных уравнений вида (1) в гильбертовом пространстве установлен в [2] (теорема 1). Лемма 1 данной статьи является следствием теоремы 2 [2].

Доказательство предложения 1 вытекает из предложения 1 [2], а также из того, что ограниченный и ограниченно обратимый оператор $R^{p-1}(\lambda, \mathbb{D})$, $\lambda \in G(\Lambda, \rho)$, переводит минимальную систему $\{y_{q,j,s}(t)\}$ в минимальную систему $(R^{p-1}(\lambda, \mathbb{D})y_{q,j,s})(t)$, $\lambda \in G(\Lambda, \rho)$. В свою очередь, в каждом из конечномерных подпространств V_{λ_q} элементы $y_{q,j,s}(t)$ и $(R^{p-1}(\lambda, \mathbb{D})y_{q,j,s})(t)$ связаны друг с другом невырожденным линейным преобразованием.

Доказательство первой части леммы 2 о локализации множества Λ установлено в [7]. Утверждение о полноте системы экспоненциальных решений в пространстве $W_{2,v}^p((-h,0), \mathbb{C}^m)$ вытекает из результата о полноте системы экспоненциальных решений в пространстве $W_2^1((-h,0), \mathbb{C}^m)$, доказанного в ([7], теорема 2), а также из того, что ограниченный и ограниченно обратимый оператор $R^{p-1}(\lambda, \mathbb{D})$, $\lambda \in G(\Lambda, \rho)$, переводит подпространства V_{λ_q} на себя, и тем самым полную систему — в полную систему.

Доказательство леммы 5 приведено в ([1], лемма 4).

Доказательство теоремы 3 опирается на теорему 2, использует соответствующие соображения из теоремы 1 [10] и проводится во многом аналогично теореме 1 из [11].

3. Некоторые замечания и комментарии

Результаты о базисности Рисса системы экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений в пространстве $W_{2,v}^1((-h,0), \mathbb{C}^m)$ установлены в [12]–[14], [1], в пространстве $W_{2,v}^2((-h,0), \mathbb{C}^m)$ — в [3]. Аналогичные результаты для скалярных уравнений n-го порядка доказаны в [11]. При ином понимании решений базисность системы экспоненциальных решений в пространстве $\mathbb{C}^m \oplus L_2((-h,0), \mathbb{C}^m)$ рассматривалась в [15]. Полнота системы экспоненциальных решений уравнений, близких (1), изучалась рядом авторов (см. [16], [17], а также указанную там библиографию).

Разрешимость и асимптотическое поведение решений дифференциально-разностных уравнений вида (1) изучались многими авторами. Ограничимся здесь указанием монографий [4], [8], [18]. При этом заметим, что в большинстве известных нам работ разрешимость изучалась не в пространствах Соболева W_2^n, а в пространствах C^n либо L_p. Разрешимость задачи вида (1), (2) и ее обобщений в пространствах Соболева установлена в [7], [1], [2], [19].

Оценки, сходные с (6), для которых величина $\varkappa$ заменяется на $\varkappa + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), давно и хорошо известны (напр., [18], [4], [8]). В этой связи возникла задача о получении более точных оценок решений уравнений нейтрального типа и, в частности, вопрос о том, можно ли уточнить ранее известные оценки и положить $\varepsilon = 0$.

Утвердительный ответ на этот вопрос в случае пространств $W_2^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$, $p=1,2$, был ранее получен в [12]–[14], [1], [3], в случае пространства $W_{2,v}^p((-h,0),\mathbb{C}^m)$, $p\in\mathbb{N}$, его дает теорема 3.

Литература

1. Власов В.В. *Об оценках решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 14–22.
2. Власов В.В., Сакбаев В.Ж. *О корректной разрешимости некоторых дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – № 6. – С. 939–942.
3. Власов В.В. *О свойствах системы экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 6. – С. 23–29.
4. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
5. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.
6. Зверкин А.М. *Разложение в ряд решений линейных дифференциально-разностных уравнений.* Ч. 1. *Квазиполиномы* // Тр. семин. по теории дифференц. уравнений с отклоняющ. аргументом. – М., 1965. – Т. 3. – С. 3–37.
7. Власов В.В. *Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 22–35.
8. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
9. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.
10. Милославский А.И. *Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений* // Сиб. матем. журн. – 1985. – Т. 26. – № 5. – С. 118–132.
11. Власов В.В. *Об одном классе дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 20–29.
12. Власов В.В. *Некоторые свойства системы элементарных решений дифференциально-разностных уравнений* // УМН. – 1996. – Т. 51. – Вып. 1. – С. 143–144.
13. Власов В.В. *О некоторых спектральных вопросах, возникающих в теории дифференциально-разностных уравнений* // УМН. – 1998. – Т. 53. – Вып. 4. – С. 217–218.
14. Власов В.В. *Некоторые свойства сильных и экспоненциальных решений дифференциально–разностных уравнений нейтрального типа* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 364. – № 5. – С. 583–585.
15. Lunel S.V., Yakubovich D.V. *A functional model approach to linear neutral functional differential equations* // Integral Equat. and Oper. Theory. – 1997. – V. 27. – P. 347-378.
16. Delfour M.C., Manitius A. *A structural operator F and its role in the theory of retarded systems. Part* II // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – V. 74. – P. 359–381.
17. Lunel S.V. *Series expansions and small solutions for Volterra equations of convolution type* // J. Different. Equat. – 1990. – V. 85. – № 1. – P. 17–53.
18. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
19. Власов В.В. *О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева* // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 1999. – Т. 227. – С. 109–121.

Московский физико-
технический институт
(государственный университет)

Поступила
02.07.2001