ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 4 (491)

УДК 517.929

*Л.З. ФИШМАН*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПАСНЫХ И БЕЗОПАСНЫХ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим задачу об определении опасных и безопасных границ для уравнения

$$\ddot{x} = a_1 x + b_1 x(t-\tau) + b_2 \dot{x}(t-\tau) + a_2 \dot{x} + f(x, \dot{x}, x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)), \tag{1}$$

где $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ — постоянные, $\tau > 0$.

Предположим, что аналитическая или достаточно гладкая функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ разлагается в ряд

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + f^{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \cdots,$$

где

$$f^{(2)} = \sum_{1 \le i \le k \le 4} a_{ik} x_i x_k, \quad f^{(3)} = \sum_{1 \le i \le k \le p \le 4} a_{ikp} x_i x_k x_p,$$

$a_{ik}$, $a_{ikp}$ — постоянные коэффициенты.

Допустим, что характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -a_1 - b_1 e^{-p\tau} & p - a_2 - b_2 e^{-p\tau} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

имеет корни $p_{1,2} = \pm i\omega$ и $p_j$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0$, $j > 2$.

Задачи, связанные с опасными и безопасными границами областей устойчивости состояний равновесия систем с запаздыванием, рассматривались в ([1]–[4]; [5], с. 8; [6], с. 126; [7], с. 291; [8]–[10]). В работах ([2]; [3]; [5], с. 8; [6], с. 126; [7], с. 291) даны способы и алгоритмы исследования устойчивости систем с запаздыванием в критических случаях, основанные на сведении их к "укороченным" системам уравнений без запаздывания. В [2] для систем с запаздыванием разработан подход к исследованию устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней, основанный на сведении их к системам второго порядка без запаздывания. В [3] подход, разработанный в [2], развит на критический случай произвольного конечного числа $m$ критических корней для систем с запаздыванием. В [3] показано, что в критическом случае $m$ корней с нулевыми действительными частями задача об устойчивости систем с запаздыванием эквивалентна задаче об устойчивости систем уравнений без запаздывания порядка $m$. В ([4]; [6], с. 137) получены выражения величины, подобной первой ляпуновской для уравнений первого порядка с запаздыванием и систем второго порядка, содержащих члены с запаздыванием только в нелинейной части. В [8], [9] в краткой форме (без вывода) для систем произвольного порядка с запаздыванием приведены формулы величины, подобной первой ляпуновской в критическом случае пары чисто мнимых корней, и величин, подобных первой и второй ляпуновским в критическом случае одного нулевого корня. Вместе с тем в ([1]–[4]; [5], с. 8; [6], с. 126; [7], с. 291;

Работа выполнена при финансовой поддержке научной программы Министерства образования Российской Федерации "Университеты России — фундаментальные исследования" (проект № 992870).

[8]–[10]) нет таких достаточно простых и удобных алгоритмов и формул для вычисления величин, подобных ляпуновским для уравнений с запаздыванием, какие имеются для вычисления ляпуновских величин систем без запаздывания ([11], с. 28).

В данной работе получена формула величины, подобной первой ляпуновской для уравнения (1), через коэффициенты этого уравнения изложена методика ее вывода. В основе этой методики лежит подход к решению задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней для систем с запаздыванием, разработанный в [2].

Запишем уравнение (1) в виде системы

$$\dot{x}^* = Ax^* + Bx^*(t-\tau) + F(x^*, x^*(t-\tau)), \tag{3}$$

где вектор $x^*$ имеет компоненты $x_1^* = x$ и $x_2^* = \dot{x}$, матрицы $A = [a_{ik}^*]$, $B = [b_{ik}^*]$ $(i,k = 1,2)$ имеют элементы $a_{11}^* = b_{11}^* = b_{12}^* = 0$, $a_{12}^* = 1$, $a_{21}^* = a_1$, $a_{22}^* = a_2$, $b_{21}^* = b_1$, $b_{22}^* = b_2$; вектор-функция $F(x^*, x^*(t-\tau))$ имеет компоненты $F_1 = 0$ и $F_2 = f(x_1^*, x_2^*, x_1^*(t-\tau), x_2^*(t-\tau))$.

Следуя подходу, разработанному в [2], запишем систему (3) в операторной форме

$$\frac{dx_t(\theta)}{dt} = Lx_t(\theta) + R(x_t(\theta)), \tag{4}$$

где $x_t(\theta) = x^*(t+\theta)$, $x^*(t)$ — вектор с компонентами $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, представляющий собой решение системы (3) при $t > 0$ с непрерывно-дифференцируемой начальной вектор-функцией $x_0(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$,

$$Lx_t(\theta) = \begin{cases} \frac{dx_t(\theta)}{d\theta} & (-\tau \le \theta < 0); \\ Ax_t(0) + Bx_t(-\tau) & (\theta = 0), \end{cases}$$

$$R(x_t(\theta)) = \begin{cases} 0 & (-\tau \le \theta < 0); \\ F(x_t(0), x_t(-\tau)) & (\theta = 0). \end{cases}$$

По способу из [2] приведем систему (4) к канонической форме. Рассмотрим функционалы

$$f_j[x(\theta)] = \sum_{i=1}^{2} \Delta_{i1}(p_j)\left[x_i(0) + \sum_{l=1}^{2}\int_{-\tau}^{0} e^{-p_j(\nu+\tau)} x_l(\nu) b_{il}^* d\nu\right], \quad j = 1,2,$$

где $p_{1,2} = \pm i\omega$; $\Delta_{i1}(p_j)$ — алгебраические дополнения элементов $i$-й строки и 1-го столбца определителей $\Delta(p_j)$; $x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$ — компоненты вектора $x(\theta)$.

Вводим векторы $\beta_j(\theta)$ с компонентами

$$\beta_j^{(i)}(\theta) = \exp(p_j\theta)\frac{\Delta_{2i}(p_j)}{\Delta_{21}(p_j)\Delta_j}, \quad i = 1,2, \quad j = 1,2,$$

где $\Delta_{2i}(p_j)$ — алгебраические дополнения элементов 2-й строки и $i$-го столбца определителей $\Delta(p_j)$, $\Delta_{21}(p_j)$ — алгебраическое дополнение элемента 2-й строки и 1-го столбца определителей $\Delta(p_j)$, $\Delta_{21}(p_j) = 1$, величины

$$\Delta_j = \frac{d\Delta(p)}{dp}\bigg|_{p=p_j} = 2p_j + e^{-p_j\tau}(\tau b_1 + \tau p_j b_2 - b_2) - a_2 \ne 0, \quad j = 1,2.$$

Заменим векторную переменную $x_t(\theta)$ на скалярные комплексно-сопряженные переменные $y_1(t)$, $y_2(t)$ и векторную переменную $z_t(\theta)$ по формулам

$$y_j(t) = f_j[x_t(\theta)], \quad z_t(\theta) = x_t(\theta) - \sum_{j=1}^{2}\beta_j(\theta)y_j(t). \tag{5}$$

Используя (5), от системы (4) приходим к системе в канонической форме

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= p_j y_j + \Phi(y_1, y_2, z_t(\theta)), \quad j = 1, 2, \\ \frac{dz_t(\theta)}{dt} &= L z_t(\theta) + H(y_1, y_2, z_t(\theta)), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\Phi = f(\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + z_{1t}(0), \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + z_{2t}(0), \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + z_{1t}(-\tau), \alpha_{41} y_1 + \alpha_{42} y_2 + z_{2t}(-\tau)),$$
$$H = R(\beta_1(\theta) y_1 + \beta_2(\theta) y_2 + z_t(\theta)) - (\beta_1(\theta) + \beta_2(\theta))\Phi,$$
$$\alpha_{1j} = 1/\Delta_j, \quad \alpha_{2j} = p_j/\Delta_j, \quad \alpha_{kj} = e^{-p_j \tau} \alpha_{k-2,j} \quad (k = 3, 4).$$

Следуя [2], от системы (6) перейдем к "укороченной" системе второго порядка без запаздывания. В частном случае, когда у функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ нет квадратичных членов ($f^{(2)} = 0$), она не содержит членов ниже третьего порядка и имеет вид

$$f = f^{(3)} + \cdots = \sum_{1 \le i \le k \le p \le 4} a_{ikp} x_i x_k x_p + \cdots,$$

"укороченная" система второго порядка без запаздывания получается из первых двух уравнений системы (6), в которых полагается $z_t(\theta) = 0$, и имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_j = p_j y_j + \Phi(y_1, y_2, 0) = p_j y_j + \sum_{1 \le i \le k \le p \le 4} a_{ikp} (\alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2) \times \\ \times (\alpha_{k1} y_1 + \alpha_{k2} y_2)(\alpha_{p1} y_1 + \alpha_{p2} y_2) + \cdots = p_j y_j + \sum_{k \ge 3} \sum_{r+q=k} D_{rq} y_1^r y_2^q + \cdots, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициент $D_{21}$ в системе (7), например, имеет вид

$$\begin{aligned} D_{21} &= \frac{1}{\Delta_1^2 \Delta_2} \sum_{1 \le i \le k \le p \le 4} a_{ikp} (\sigma_{i1} \sigma_{k1} \sigma_{p2} + \sigma_{i1} \sigma_{k2} \sigma_{p1} + \sigma_{i2} \sigma_{k1} \sigma_{p1}) = \\ &= \frac{1}{\Delta_1^2 \Delta_2} \Big[ 3 \sum_{i=1}^{4} a_{iii} \sigma_{i1}^2 \sigma_{i2} + \sum_{i=1}^{4} \sum_{p=i+1}^{4} a_{iip} (\sigma_{i1}^2 \sigma_{p2} + 2\sigma_{i1} \sigma_{i2} \sigma_{p1}) + \sum_{i=1}^{4} \sum_{p=i+1}^{4} a_{ipp} (\sigma_{i2} \sigma_{p1}^2 + 2\sigma_{i1} \sigma_{p1} \sigma_{p2}) + \\ &\qquad + \sum_{1 < i < k < p < 4} a_{ikp} (\sigma_{i1} \sigma_{k1} \sigma_{p2} + \sigma_{i1} \sigma_{k2} \sigma_{p1} + \sigma_{i2} \sigma_{k1} \sigma_{p1}) \Big], \end{aligned} \tag{8}$$

где $\sigma_{1j} = 1$, $\sigma_{2j} = p_j$, $\sigma_{3j} = \exp(-p_j \tau)$, $\sigma_{4j} = p_j \sigma_{3j}$, $j = 1, 2$. Величина, подобная первой ляпуновской, в данном случае для уравнения (1) будет приведена ниже.

В общем случае при $f^{(2)} \ne 0$ также приходим к "укороченной" системе второго порядка без запаздывания

$$\dot{y}_j = p_j y_j + Q(y_1, y_2), \tag{9}$$

где $Q(y_1, y_2) = \sum_{k \ge 2} \sum_{r+q=k} A_{rq} y_1^r y_2^q + \cdots$.

Коэффициенты $A_{20}$, $A_{11}$, $A_{21}$ выражаются через коэффициенты уравнения (1) следующим образом:

$$A_{20} = E_{20}/\Delta_1^2, \quad A_{11} = E_{11}/\Delta_1 \Delta_2,$$

где

$$E_{20} = a_{11} + a_{22}p_1^2 + a_{33}\sigma_{31}^2 + a_{44}p_1^2\sigma_{31}^2 + a_{12}p_1 + \\ + a_{13}\sigma_{31} + a_{14}p_1\sigma_{31} + a_{23}p_1\sigma_{31} + a_{24}p_1^2\sigma_{31} + a_{34}p_1\sigma_{31}^2, \quad (10)$$

$$E_{11} = 2[a_{11} + a_{33} + \omega^2(a_{22} + a_{44}) + \omega\sin\omega\tau(a_{14} - a_{23}) + \cos\omega\tau(a_{24}\omega^2 + a_{13})]; \quad (11)$$

$$A_{21} = C_{21} + D_{21}, \quad (12)$$

$$C_{21} = \frac{1}{\Delta_1^2\Delta_2}\Big[2\sum_{i=1}^{4} a_{ii}(\sigma_{i1}\gamma_{11}^{(i)} + \sigma_{i2}\gamma_{20}^{(i)}) + \sum_{1\le i<k\le 4} a_{ik}(\sigma_{k1}\gamma_{11}^{(i)} + \sigma_{i1}\gamma_{11}^{(k)} + \sigma_{i2}\gamma_{20}^{(k)} + \sigma_{k2}\gamma_{20}^{(i)})\Big], \quad (13)$$

$D_{21}$ определяется формулой (8).

В формуле (13)

$$\gamma_{rq}^{(k)} = \sum_{l=1}^{2} \Delta_{lk}(\lambda)B_{rq}^{(l)}/\Delta(\lambda), \quad k = 1, 2, \\ \gamma_{rq}^{(k)} = \exp(-\lambda\tau)\gamma_{rq}^{(k-2)} + E_{rq}L_{rq}^{(k-2)}, \quad k = 3, 4, \quad (14)$$

где $\lambda = (r - q)i\omega$, $\Delta(\lambda)$ — определитель из формулы (2), в котором $p = \lambda$,

$$B_{rq}^{(1)} = -E_{rq}(\alpha_{11} + \alpha_{12}), \\ B_{rq}^{(2)} = E_{rq}\Big(1 - \alpha_{21} - \alpha_{22} + \sum_{k=1}^{2} b_k L_{rq}^{(k)}\Big), \quad (15) \\ L_{rq}^{(k)} = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{p_j - \lambda}(e^{-p_j\tau} - e^{-\lambda\tau})\alpha_{kj}, \quad k = 1, 2,$$

$$\Delta_{11} = \lambda - a_2 - b_2e^{-\lambda\tau}, \quad \Delta_{12} = a_1 + b_1e^{-\lambda\tau}, \quad \Delta_{21} = 1, \quad \Delta_{22} = \lambda. \quad (16)$$

Вид остальных коэффициентов системы (9) не приводится, т. к. они не входят в выражение величины, подобной первой ляпуновской.

Отметим также, что т. к. уравнение (1) является частным случаем системы с запаздыванием, рассмотренной в [8], то формулы (8), (10)–(15) для коэффициентов $A_{20}$, $A_{11}$, $A_{21}$ и величин $\gamma_{rq}^{(k)}$ могут быть получены как частный случай из соответствующих формул, приведенных в [8].

Для системы (9) первая ляпуновская величина находится по формуле ([13], с. 204)

$$g = 2\,\mathrm{Re}\,A_{21} - i/\omega A_{11}(A_{20} - A_{02}) = 2\,\mathrm{Re}\,A_{21} - 2A_{11}\,\mathrm{Im}(A_{20})/\omega. \quad (17)$$

В частном случае $g = \mathrm{Re}\,A_{21} = \mathrm{Re}\,D_{21}$, когда $f = \sum_{1\le i\le k\le p\le 4} a_{ikp}x_ix_kx_p$. В (17) использована комплексная сопряженность $A_{20}$ и $A_{02}$. Если $g < 0$, то граница области устойчивости системы (9) безопасная, если $g > 0$ опасная ([11], с. 25).

Величина $g$ для уравнения (1) будет подобна первой ляпуновской [2]. Если $g < 0$, то граница области устойчивости уравнения (1) безопасная, если $g > 0$ опасная.

**Пример 1.** Найдем величину $g$ для уравнения

$$\ddot{x} = a_1x + b_1x(t-\tau) + a_2\dot{x} + b_2\dot{x}(t-\tau) + r_1x^2 + \\ + r_2x^2(t-\tau) + r_3xx(t-\tau) + r_4x^3 + r_5x^2x(t-\tau) + r_6xx^2(t-\tau) + r_7x^3(t-\tau), \quad (18)$$

представляющего собой частный случай (1).

По формулам (8), (10)–(13) для уравнения (18) находим коэффициенты

$$A_{20} = (r_1 + e^{-p_1\tau} r_2 + e^{-p_1\tau} r_3)/\Delta_1^2,$$
$$A_{11} = 2(r_1 + r_2 + \cos(\omega\tau) r_3)/\Delta_1\Delta_2, \tag{19}$$

$$A_{21} = \frac{1}{\Delta_1^2\Delta_2}[2r_1(\gamma_{11}^{(1)} + \gamma_{20}^{(1)})2r_2(e^{(-p_1\tau)}\gamma_{11}^{(3)} +$$
$$+e^{(-p_2\tau)}\gamma_{20}^{(3)}) + r_3(e^{-p_1\tau}\gamma_{11}^{(1)} + \gamma_{20}^{(3)} + e^{-p_2\tau}\gamma_{20}^{(1)}) +$$
$$+r_3\gamma_{11}^{(3)} + 3r_4 + 2r_5\cos(\omega\tau) + r_6(2 + e^{-2p_1\tau}) + 3r_7 e^{-p_1\tau}], \tag{20}$$

$$\Delta_j = 2p_j + e^{-p_j\tau}(\tau b_1 + \tau p_j b_2 - b_2) - a_2, \quad p_{1,2} = \pm i\omega. \tag{21}$$

Величины $\gamma_{rq}^{(1)}$, $\gamma_{rq}^{(3)}$, входящие в выражение (20), определяются по формулам (14)–(16), в которых следует положить $E_{rq} = \Delta_1^r\Delta_2^q A_{rq}$, где $A_{rq}$ определяются формулами (19).

Подставляя выражения (19), (20) для $A_{20}$, $A_{11}$, $A_{21}$ в формулу (17), получим выражение величины $g$ для уравнения (18).

Пусть в уравнении (18) $a_1 = b_2 = r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 0$, $r_7 \neq 0$, $\tau = 1$. Уравнение границы области устойчивости, соответствующей паре чисто мнимых корней $p_1 = i\omega$, $p_2 = -i\omega$, в этом случае имеет вид ([12], с. 130)

$$a_2 = -\omega \operatorname{tg}\omega, \quad b_1 = -\omega^2/\cos\omega \quad (0 < \omega < \pi/2). \tag{22}$$

Как следует из формул (19)–(21), $A_{20} = A_{11} = C_{21} = 0$, $A_{21} = 3r_7 e^{-p_1}/\Delta_1^2\Delta_2$, $\Delta_j = 2p_j - a_2 + b_1 e^{-p_j}$. По формуле (17)

$$g = \operatorname{Re} A_{21} = \operatorname{Re}\frac{3r_7}{\Delta_1^2\Delta_2}e^{-p_j} = \frac{3r_7}{(\Delta_1\Delta_2)^2}\operatorname{Re}[(\cos\omega - i\sin\omega)(-2i\omega - a_2 + b_1 e^{i\omega})]. \tag{23}$$

Подставляя выражения (22) для $a_2$, $b_1$ в формулу (23), получаем

$$g = \frac{6r_7}{(\Delta_1\Delta_2)^2}(-\omega\sin\omega - \omega^2/\cos\omega). \tag{24}$$

Из (24) следует, что в случае $a_1 = b_2 = r_1 = r_2 = \cdots = r_6 = 0$, $\tau = 1$ граница области устойчивости состояния равновесия $x = 0$ уравнения (18) при $r_7 > 0$ ($g < 0$) безопасная, а при $r_7 < 0$ опасная.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = -x + x^3(t - \tau) + \dot{x}^5(t - \tau). \tag{25}$$

Найдем для него величину $g$. Характеристическое уравнение $\Delta(p) = p^2 + 1 = 0$ имеет корни $p_{1,2} = \pm i$. Величины $\Delta_j = 2p_j$, $j = 1, 2$.

По формулам (8), (17) получаем

$$g = \operatorname{Re} D_{21} = \operatorname{Re}\frac{1}{\Delta_1^2\Delta_2}e^{-i\tau} = -\widetilde{\Delta}\sin\tau, \quad \widetilde{\Delta} > 0.$$

Величина $\widetilde{\Delta}$ в данном случае не имеет значения, нужен только ее знак. Поэтому значение $\widetilde{\Delta}$ не приводится.

При $\tau = 0$ для уравнения (25) первая ляпуновская величина $L_1 = g = 0$, вторая $L_2 = \pi/24 > 0$ ([11], с. 47). Отсюда следует, что при $\tau = 0$ состояние равновесия $x = 0$ уравнения (25) неустойчиво. При любом малом $\tau > 0$ величина $g < 0$. Отсюда следует, что состояние равновесия $x = 0$ уравнения (25), неустойчивое при $\tau = 0$, становится устойчивым при любом малом $\tau > 0$.

Заметим, что в случае, когда характеристическое уравнение (2) имеет один нулевой корень $p_1 = 0$ и остальные корни $p_j$ с $\operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0$, как следует из [9], такого результата быть не может.

## Литература


1. Мышкис А.Д., Шиманов С.Н., Эльсгольц Л.Э. *Устойчивость и колебания систем с запаздыванием* // Тр. Межд. симпозиума по нелинейным колебаниям. – Киев, 1963. – Т. 2. – С. 241–267.
2. Шиманов С.Н. *Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием* // Сиб. матем. журн. – 1961. – Т. 2. – № 3. – С. 467–480.
3. Осипов Ю.С. *О принципе сведе́ния в критических случаях устойчивости движения систем с запаздыванием времени* // ПММ. – 1965. – Т. 25. – № 5. – С. 810–820.
4. Фишман Л.З. *О рождении периодического решения у систем дифференциальных уравнений с запаздыванием* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 12. – С. 96–107.
5. Колесов Ю.С., Швитра Д.Н. *Автоколебания в системах с запаздыванием.* – Вильнюс: Изд-во “Мокслас”, 1979. – 146 с.
6. Хессард Б., Казаринов Н., Вэн И. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла.* – М.: Мир, 1985. – 280 с.
7. Хейл Дж.К. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
8. Фишман Л.З. *Критерии определения опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием* // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 10. – С. 185–187.
9. Фишман Л.З. *Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием в случае нулевого корня* // Дифференц. уравнения. – 1990. – № 10. – С. 1830–1832.
10. Фишман Л.З. *О рождении периодического решения у систем дифференциальных уравнений с запаздыванием* // Динамика систем (Динамические системы и процессы управления). – Горький, 1975. – Вып. 6. – С. 65–72.
11. Баутин Н.Н. *Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости.* – М.: Наука, 1984. – 176 с.
12. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – М.: Наука, 1971. – 296 с.
13. Неймарк Ю.И. *Динамические системы и управляемые процессы.* – М.: Наука, 1978. – 336 с.



*Нижегородский государственный университет*



*Поступила* 04.12.2000