ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 519.642.2

Н.С. ГАББАСОВ

НОВЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) вида

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j} + \sum_{j=0}^{p}\int_{-1}^{1}K_j(t,s)x^{(j)}(s)ds = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{1}$$

где $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathbf{N}$, $j=\overline{1,q}$; K_j, $j=\overline{0,p}$, и y — известные гладкие функции, а x – искомая функция. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения теории (в частности, ИДУ (1) является обобщением ряда классов интегральных уравнений типа Фредгольма), так и приложений. К такого рода уравнениям приводит ряд важных задач теории переноса, упругости, рассеяния (см., напр., [1] и библиографию к ней; [2]), теории уравнений смешанного типа [3], а также теории некоторых нагруженных ИДУ [4]. Поскольку изучаемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких случаях, особенно актуальной является разработка эффективных методов их приближенного решения с соответствующим теоретическим обоснованием. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [5]–[16], в которых предложены и обоснованы специальные прямые методы решения интегральных уравнений третьего рода (т. е. ИДУ (1) при $p=0$) и уравнений второго рода (ИДУ (1) при $m_j=0$, $j=\overline{1,q}$, $K_j=0$, $j=\overline{1,p}$). В [17] на основе стандартных полиномов построен прямой проекционный метод решения ИДУ (1) в классе обобщенных функций.

В данной статье предложены новые варианты метода коллокации, приспособленные к решению ИДУ (1). Основное внимание уделено обоснованию исследуемых методов в смысле гл. I монографии [18]. Именно, доказаны теоремы существования и единственности решения соответствующего приближенного уравнения, установлены оценки погрешности приближенного решения и доказана сходимость последовательности приближенных решений к точному решению в некотором пространстве обобщенных функций. Исследованы также вопросы устойчивости и обусловленности аппроксимирующих уравнений.

1. *Основные пространства.* Пусть $C \equiv C(I)$ — пространство непрерывных на $I \equiv [-1,1]$ функций с обычной max-нормой и $m \in \mathbf{N}$. Следуя [19], скажем, что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m;0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$, если в точке $t=0$ существует тейлоровская производная $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (естественно считаем, что $C\{0;0\} \equiv C$). По норме

$$\|f\|_{C\{m;0\}} \equiv \|Tf\|_C + \sum_{i=0}^{m-1}|f^{\{i\}}(0)|,$$

где

$$Tf \equiv \left[f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{\{i\}}(0)t^i/i!\right]t^{-m} \equiv \mathcal{F}(t) \in C, \quad \mathcal{F}(0) \equiv \lim_{t\to 0}\mathcal{F}(t),$$

пространство $C\{m;0\}$ полно и нормально вложено в C [7].

Далее, обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на I функций. Наделим его нормой

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)|, \quad z \in C^{(p)}, \tag{2}$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 1 ([20]). *Пространство $C^{(p)}$ с нормой* (2) *полно и вложено в C.*

Следствие 1. Традиционная норма в $C^{(p)}$ и (2) эквивалентны, т. е.

$$\forall z \in C^{(p)} \; \exists d > 0 : \|z\|_{(p)} \leq \|z\|_{C^{(p)}} \leq d\|z\|_{(p)},$$

где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum\limits_{i=0}^{p} \|z^{(i)}\|_C$.

Теперь образуем основное для наших исследований пространство

$$Y \equiv C_0^{\{m\},(p)} \equiv C_0^{\{m\},(p)}(I) \equiv \{y \in C\{m; 0\} \mid Ty \in C^{(p)}\}.$$

В качестве нормы в нем выберем величину

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \quad y \in Y. \tag{3}$$

Пространство Y в норме (3) полно и вложено в $C\{m; 0\}$ [17].

Рассмотрим на основном пространстве Y семейство $X \equiv V^{(p)}\{m; 0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \, \text{P.F.} \; t^{-i-1}, \tag{4}$$

где $t \in I$, $z \in C^{(p)}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$ — произвольные постоянные, а P.F. t^{-k}, $k = \overline{1, m}$, — обобщенные функции, определенные на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$(\text{P.F.} \; t^{-k}, y) \equiv \text{P.F.} \int_{-1}^{1} y(t) t^{-k} dt, \quad y \in Y, \;\; k = \overline{1, m}.$$

Здесь знак "P.F." указывает на конечную часть интеграла по Адамару ([21], с. 144–150) (в дальнейшем для краткости этот знак будем опускать). Ясно, что векторное пространство X относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-1} |\alpha_i|$$

является банаховым.

2. *Метод коллокации, основанный на применении полинома Бернштейна.* Пусть дано ИДУ (1). Ради простоты выкладок и формулировок будем считать $q = 1$, $t_1 = 0$, т. е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv (Ux)(t) + (Kx)(t) = y(t), \quad t \in I, \tag{5}$$

$$Ux \equiv t^m x(t), \quad Kx \equiv \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} K_j(t, s) x^{(j)}(s) ds,$$

где $m \in \mathbf{N}$; $y \in Y$, K_j, $j = \overline{0,p}$, — известные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered} K_j(t,\cdot) \in Y, \quad K_j(\cdot,s) \in C\{m+p;0\}, \quad j=\overline{0,p}; \\ \varphi_{jl}(s) \equiv (K_j)_t^{\{l\}}(0,s) \in C\{m+p;0\}, \quad j=\overline{0,p}, \quad l=\overline{0,m-1}; \\ \psi_{jl}(t) \equiv (K_j)_s^{\{l\}}(t,0) \in Y, \quad j=\overline{0,p}, \quad l=\overline{0,m+p-1}, \end{gathered} \tag{6}$$

а $x \in X$ — искомая обобщенная функция. Фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора $A : X \to Y$ установлены в [17], там же указан метод отыскания точного решения ИДУ (1) в классе X.

Приближенное решение уравнения (5) ищем в виде образования

$$x_n \equiv x_n(t;\{c_i\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+p+n+1} t^{-i-1}, \tag{7}$$

$$g_n(t) \equiv (Jz_n)(t) + \sum_{i=0}^{p-1} c_{i+n+1}(t+1)^i, \tag{8}$$

$$z_n(t) \equiv 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{i} (t+1)^i (1-t)^{n-i}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{9}$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^{t} (t-s)^{p-1} z(s)ds,$$

$\binom{n}{i} = n!/(i!(n-i)!)$, $i = \overline{0,n}$, — биномиальные коэффициенты. Неизвестные параметры $c_i = c_i^{(n)}$, $i = \overline{0,m+p+n}$, определяем согласно нашему методу из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{aligned} & c_i = (DTy - DTKx_n)(t_i), \quad i=\overline{0,n}; \\ & (TAx_n - Ty)^{(i)}(-1) = 0, \quad i=\overline{0,p-1}; \\ & (Ax_n - y)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i=\overline{0,m-1}, \end{aligned} \tag{10}$$

где узлы коллокации $t_i = t_i^{(n)} \in I$ вычисляются по формуле

$$t_i = -1 + 2i/n, \quad i=\overline{0,n}. \tag{11}$$

Для вычислительного алгоритма (5)–(11) справедлива

Теорема 1. *Если однородное уравнение $Ax = 0$ имеет в X лишь тривиальное решение, то при всех $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, СЛАУ (10) обладает единственным решением $\{c_i^*\}$, и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_i^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по норме пространства X со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\| = O\left\{ \sum_{j=0}^{p} \left[\omega_t(h_j;n^{-1/2}) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega(\tau_{ji};n^{-1/2}) + \sum_{k=0}^{j+m-1} \omega(\eta_{jk};n^{-1/2}) \right] + \omega(DTy;n^{-1/2}) \right\}, \tag{12}$$

где $\omega(f;\Delta)$ — модуль непрерывности функции $f \in C$ в точке Δ, $0 < \Delta \leq 2$,

$$h_j \equiv D_tT_tK_j, \quad \tau_{ji} \equiv DTG_{ji}, \quad \eta_{jk} \equiv DT\psi_{jk} \in C, \quad i=\overline{0,m-1}, k=\overline{0,j+m-1}, \quad j=\overline{0,p},$$

$$G_{ji}(t) \equiv \int_{-1}^{1} (T_s^{i+j+1}K_j)(t,s)ds,$$

$$T_s^{i+j+1}K_j \equiv \left[K_j(t,s) - \sum_{l=0}^{i+j} \psi_{jl}(t)s^l/l! \right] s^{-i-j-1},$$

а $\omega_t(h;\Delta)$ — частный модуль непрерывности функции $h(t,s)$ по переменной t.

Доказательство. ИДУ (5) будем рассматривать как линейное операторное уравнение вида

$$Ax \equiv Ux + Kx = y, \quad x \in X \equiv V^{(p)}\{m;0\}, \quad y \in Y \equiv C_0^{\{m\},(p)}. \tag{13}$$

Обозначим через $X_n \subset X$ $(m+p+n+1)$-мерное подпространство элементов вида (7), а за $Y_n \subset Y$ примем класс Π_{m+p+n} алгебраических полиномов степени не выше $m+p+n$. Далее, введем линейный оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{m+p+n} : Y \to Y_n$, ставящий в соответствие любой функции $y \in Y$ полином

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{m+p+n}(y;t) \equiv (UJB_nDTy)(t) + \sum_{j=0}^{p-1}(Ty)^{(j)}(-1)t^m(t+1)^j/j! + \sum_{i=0}^{m-1} y^{\{i\}}(0)t^i/i!, \tag{14}$$

где $B_n : C \to \Pi_n$ — оператор Бернштейна [22] по системе узлов (11). Покажем предварительно, что система (7)–(10) эквивалентна следующему функциональному уравнению:

$$A_n x_n \equiv Ux_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n. \tag{15}$$

Действительно, пусть x_n^* — решение уравнения (15), т.е. $Ux_n^* + \Gamma_n(Kx_n^* - y) = 0$. В силу (7) и (14) последнее означает, что

$$(UJ(z_n^* + B_nDT(Kx_n^* - y)))(t) + \sum_{i=0}^{p-1}[c_{i+n+1}^* + (TKx_n^* - Ty)^{(i)}(-1)/i!]t^m(t+1)^i + \\ + \sum_{i=0}^{m-1}[c_{m+p+n-i}^* + (Kx_n^* - y)^{\{i\}}(0)/i!]t^i \equiv 0. \tag{16}$$

На основании леммы 2 [17] ясно, что тождество (16) равносильно следующей системе:

$$\begin{aligned} &z_n^*(t) \equiv (B_n(DTy - DTKx_n^*))(t); \\ &(TKx_n^* - Ty)^{(i)}(-1) = -c_{i+n+1}^* i!, \quad i = \overline{0,p-1}; \\ &(Kx_n^* - y)^{\{i\}}(0) = -c_{m+p+n-i}^* i!, \quad i = \overline{0,m-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

В левой и правой частях первого равенства системы (17) находятся полиномы Бернштейна некоторых функций соответственно со значениями c_i^* и $(DTy - DTKx_n^*)(t_i)$, $i = \overline{0,n}$, в узлах (11). Следовательно, с учетом (13)

$$(TAx_n^* - Ty)^{(i)}(-1) = c_{i+n+1}^* i! + (TKx_n^* - Ty)^{(i)}(-1),$$

$i = \overline{0,p-1}$, и $(Ax_n^* - y)^{\{i\}}(0) = c_{m+p+n-i}^* i! + (Kx_n^* - y)^{\{i\}}(0)$, $i = \overline{0,m-1}$, система (17) означает, что

$$\begin{aligned} &c_i^* = (DTy - DTKx_n^*)(t_i), \quad i = \overline{0,n}; \\ &(TAx_n^* - Ty)^{(i)}(-1) = 0, \quad i = \overline{0,p-1}; \\ &(Ax_n^* - y)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{0,m-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Итак, СЛАУ (10) имеет решение $c_i = c_i^*$, $i = \overline{0,m+p+n}$, т.е. решение уравнения (15) является решением системы (7)–(10).

Обратное становится вполне очевидным, если соответствующие уравнения в (18) умножить на выражения

$$2^{-n}\binom{n}{i}(t+1)^i(1-t)^{n-i}, \quad i = \overline{0,n},$$

соответственно и почленно сложить.

Таким образом, для получения утверждений теоремы 1 достаточно доказать существование и сходимость решений уравнений (15). А для этого понадобится

Лемма 2. *Для любой функции* $y \in Y$ *справедлива оценка* (*здесь и далее* d_i, $i = \overline{1,3}$, — *вполне определенные константы, значения которых не зависят от* n)

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \le d_1 \omega(DTy; n^{-1/2}).$$

Истинность леммы 2 легко следует из леммы 2 [17], (14), (3) и оценки [22]

$$\|f - B_n f\|_C \le d_1 \omega(f; n^{-1/2}), \quad f \in C. \tag{19}$$

Найдем теперь меру близости операторов A и A_n на X_n. Используя (5), (15), лемму 2 [17], (14) и (3), для произвольной функции $x_n \in X_n$ последовательно находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n K x_n\|_Y = \|DTKx_n - B_n DTKx_n\|_C. \tag{20}$$

Заметим, что (см., напр., [23], с. 432)

$$(\text{P.F. } t^{-k})^{(j)} = \rho_{k,j} \, \text{P.F. } t^{-k-j}, \tag{21}$$

где

$$\rho_{k,j} \equiv (-1)^j \prod_{l=1}^{j} (k + l - 1), \quad \rho_{k,0} \equiv 1.$$

На основании (5), (6), (4) и (21) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \rho_{i+1,j} \Big[G_{ji}(t) + \sum_{l=0}^{i+j} \psi_{jl}(t) \gamma_{jil} (l!)^{-1} \Big],$$

где

$$\gamma_{jil} \equiv \text{P.F.} \int_{-1}^{1} s^{l-i-j-1} ds, \quad l = \overline{0, i+j}, \;\; i = \overline{0, m-1}, \;\; j = \overline{0,p}.$$

Следовательно,

$$DTKx_n = \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} h_j(t,s) g_n^{(j)}(s) ds + \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+p+n+1} \rho_{i+1,j} \Big[\tau_{ji}(t) + \sum_{l=0}^{i+j} (l!)^{-1} \gamma_{jil} \eta_{jl}(t) \Big]. \tag{22}$$

В силу (22) и (19) последовательно выводим

$$\begin{aligned}
\|DTKx_n - B_n DTKx_n\|_C = \max_{t \in I} \Big| \sum_j \int_{-1}^{1} (h_j - B_n^t h_j)(t,s) g_n^{(j)}(s) ds + \\
+ \sum_j \sum_i c_{i+p+n+1} \rho_{i+1,j} \Big[(\tau_{ji} - B_n \tau_{ji})(t) + \sum_l (l!)^{-1} \gamma_{jil} (\eta_{jl} - B_n \eta_{jl})(t) \Big] \Big| \le \\
\le 2d_1 \|g_n\|_{C^{(p)}} \sum_j \omega_t(h_j; n^{-1/2}) + \sum_j \sum_i |c_{i+p+n+1}| \, |\rho_{i+1,j}| \Big[d_1 \omega(\tau_{ji}; n^{-1/2}) + \\
+ d_1 \sum_l |\gamma_{jil}| \omega(\eta_{jl}; n^{-1/2}) \Big] \le 2dd_1 \|x_n\|_X \sum_j \omega_t(h_j; n^{-1/2}) + \\
+ \rho d_1 \|x_n\|_X \sum_j \sum_i \omega(\tau_{ji}; n^{-1/2}) + 2\rho d_1 m \|x_n\|_X \sum_j \sum_{k=0}^{j+m-1} \omega(\eta_{jk}; n^{-1/2}) \le \\
\le d_2 \Big\{ \sum_j \Big[\omega_t(h_j; n^{-1/2}) + \sum_i \omega(\tau_{ji}; n^{-1/2}) + \sum_k \omega(\eta_{jk}; n^{-1/2}) \Big] \Big\} \|x_n\|_X.
\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь использованы соотношения $\rho \equiv \max_{i,j} |\rho_{i+1,j}| = m \prod_{l=1}^{p-1} (m+l)$, $\gamma \equiv \max_{l,i,j} |\gamma_{jil}| = 2$ и обозначение $d_2 \equiv \max\{2dd_1, 2d_1\rho m\}$. Из (20) и (23) следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \le d_2 \sum_{j=0}^{p} \Big[\omega_t(h_j; n^{-1/2}) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega(\tau_{ji}; n^{-1/2}) + \sum_{k=0}^{j+m-1} \omega(\eta_{jk}; n^{-1/2})\Big]. \qquad (24)$$

На основании неравенства (24) и леммы 2 из теоремы 7 ([18], с. 19) получаем утверждения теоремы 1 с оценкой (12). □

Следствие 2. Если существуют ограниченные производные $(h_j)_t^{(r)}$, $\tau_{ji}^{(r)}$, $\eta_{jk}^{(r)}$, $(DTy)^{(r)}$, $-1 \le t, s \le 1$, $r \ge 2$, то в условиях теоремы 1 верна оценка $\|x_n^* - x^*\| = O(1/n)$.

3. *Метод коллокации, основанный на применении интерполяционного полинома Эрмита–Фейера.* Приближенное решение задачи (5), (6) ищем в виде

$$x_n(t) \equiv \Big(J\Big\{\sum_{i=0}^{2n-1} c_i t^i\Big\}\Big)(t) + \sum_{i=0}^{p-1} c_{i+2n}(t+1)^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+p+2n} t^{-i-1}, \qquad (25)$$

где $c_i = c_i^{(n)}$, $i = \overline{0, m+p+2n-1}$, — подлежащие определению коэффициенты. Их находим из СЛАУ:

$$\begin{aligned} (DTAx_n - DTy)(\nu_i) &= 0, \quad i = \overline{1,n};\\ (d(DTUx_n)/dt)(\nu_i) &= 0, \quad i = \overline{1,n};\\ (TAx_n - Ty)^{(i)}(-1) &= 0, \quad i = \overline{0,p-1};\\ (Ax_n - y)^{\{i\}}(0) &= 0, \quad i = \overline{0,m-1}, \end{aligned} \qquad (26)$$

где $\{\nu_i\}$ — система узлов Чебышева первого рода.

Пусть $F_n \equiv F_{m+p+2n-1} : Y \to \Pi_{m+p+2n-1}$ — линейный оператор, сопоставляющий любой функции $y \in Y$ полином $F_n y$, однозначно определяемый условиями

$$\begin{aligned} (DTF_n y - DTy)(\nu_i) &= 0, \quad i = \overline{1,n};\\ (d(DTF_n y)/dt)(\nu_i) &= 0, \quad i = \overline{1,n};\\ (TF_n y - Ty)^{(i)}(-1) &= 0, \quad i = \overline{0,p-1};\\ (F_n y - y)^{\{i\}}(0) &= 0, \quad i = \overline{0,m-1}. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что

$$F_n y \equiv F_{m+p+2n-1}(y;t) = (UJ\Phi_n DTy)(t) + \sum_{j=0}^{p-1} (Ty)^{(j)}(-1) t^m (t+1)^j / j! + \sum_{i=0}^{m-1} y^{\{i\}}(0) t^i / i!, \qquad (27)$$

где $\Phi_n \equiv \Phi_{2n-1} : C \to \Pi_{2n-1}$ — оператор Эрмита–Фейера [22] по системе $\{\nu_i\}$.

Лемма 3. *Пусть $y \in Y$, причем $DTy \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \le 1$. Тогда справедлива оценка*

$$\|y - F_n y\|_Y \le d_3 n^{-\alpha/2}.$$

Доказательство легко следует из леммы 2 [17], равенств (27), (3) и оценки (см., напр., [24])

$$\|f - \Phi_n f\|_C \le d_3 n^{-\alpha/2}, \quad f \in \mathrm{Lip}\,\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1.$$

Относительно алгоритма (5), (6), (25), (26) справедлива

Теорема 2. *Пусть уравнение* $Ax = 0$ *имеет в* X *лишь тривиальное решение,* $h_j \equiv D_t T_t K_j$ *(по* t*),* $\tau_{ji} \equiv DTG_{ji}$*,* $\eta_{jk} \equiv DT\psi_{jk}$*,* $i = \overline{0, m-1}$*,* $k = \overline{0, j+m-1}$*,* $j = \overline{0, p}$*,* $DTy \in \mathrm{Lip}\,\alpha$*,* $0<\alpha\leq 1$*. Тогда при достаточно больших* n *приближенные решения* x_n^**, построенные согласно* (25), (26)*, существуют, единственны и сходятся к точному решению* $x^* = A^{-1}y$ *в смысле метрики пространства* X *со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\| = O(n^{-\alpha/2}).$$

Действительно, для получения требуемых утверждений достаточно повторить схему доказательства теоремы 1 с учетом того, что в данном случае СЛАУ (26) равносильна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv F_n A x_n = F_n y, \quad x_n \in X_n, \quad F_n y \in Y_n,$$

где X_n — множество всех образований x_n вида (25) таких, что $(d(DTUx_n)/dt)(\nu_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$, а подпространство Y_n состоит из всех полиномов $y_n \in \Pi_{m+p+2n-1}$, обладающих свойством

$$(d(DTy_n)/dt)(\nu_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

4. *Заключительные замечания.*

Замечание 1. В силу определения нормы в $X \equiv V^{(p)}\{m; 0\}$ нетрудно видеть, что из сходимости последовательности (x_n^*) к $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщенных функций, т. е. слабая сходимость.

Замечание 2. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^A(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемых методов. Один из результатов в этом направлении легко получить из теорем 1 и 2, а именно, из них вытекают соответствующие простые следствия: 1) если исходные данные $(h_j, \tau_{ji}, \eta_{jk}, DTy)$ уравнения (5) принадлежат классу $C^{(r)}$, $r - 1 \in \mathbf{N}$, то в условиях теоремы 1 справедлива оценка $\|\rho_n^A\|_Y = O(n^{-1})$; 2) если же исходные данные из класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то при выполнении условий теоремы 2 верна оценка $\|\rho_n^A\|_Y = O(n^{-\alpha/2})$.

Замечание 3. При $p = 0$ рассматриваемое уравнение (5) преобразуется в интегральное уравнение третьего рода с оператором $A : V\{m; 0\} \to C\{m; 0\}$, а прямой метод (10) — в специальный для уравнения третьего рода вариант метода коллокации, причем

$$DTy \equiv Ty, \quad h_0 \equiv T_t K_0,$$
$$G_{0i}(t) \equiv \int_{-1}^{1} (T_s^{i+1} K_0)(t, s) ds, \quad \psi_{0i}(t) \equiv (K_0)_s^{\{i\}}(t, 0), \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Поэтому теорема 1 содержит в себе известные результаты ([13], с. 186) по обоснованию специального варианта метода коллокации для решения уравнений третьего рода в классе $V\{m; 0\}$ обобщенных функций.

Замечание 4. Поскольку $C_0^{\{0\},(p)} \equiv C^{(p)} \equiv V^{(p)}\{0; 0\}$, то при $m=0$, $K_1 = K_2 = \cdots = K_p = 0$ ИДУ (5) превращается в уравнение второго рода в $C^{(p)}$, а предложенный метод (10) — в соответствующий вариант метода коллокации, причем $DTy \equiv Dy$ и $h_0 \equiv D_t K_0$. Следовательно, в этом частном случае оценка (12) принимает вид

$$\|x_n^* - x^*\|_{(p)} = O\{\omega_t(D_t K_0; n^{-1/2}) + \omega(Dy; n^{-1/2})\}.$$

Замечание 5. Если $m = p = 0$, то из ИДУ (5) получается уравнение Фредгольма второго рода в C. При этом метод (10) становится известным вариантом метода коллокации [25], причем $DTy \equiv y$ и $h_0 \equiv K_0$. Поэтому в данном случае оценка теоремы 1 совпадает с соответствующей уравнению второго рода в C оценкой [25].

Замечание 6. Суть предыдущих замечаний 3–5 остается в силе и в случае прямого метода (26).

Замечание 7. Так как в условиях теорем 1 и 2 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида

$$\|A_n^{-1}\| = O(1) \quad (A_n^{-1} : Y_n \to X_n, \ \ n \geq n_1),$$

то очевидно ([18], с. 23–24), что предложенные в данной работе прямые методы для уравнения (5) устойчивы относительно малых возмущений исходных данных. Более того, если ИДУ (5) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленными являются также СЛАУ (10) и (26).

Литература

1. Bart G.R., Warnock R.L. *Linear integral equations of the third kind* // SIAM J. Math. Anal. – 1973. – V. 4. – № 4. – P. 609–622.
2. Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. *Линейная теория переноса.* – М.: Мир, 1972. – 384 с.
3. Бжихатлов Х.Г. *Об одной краевой задаче со смещением* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 1. – С. 162–165.
4. Векуа Н.П. *Интегральные уравнения типа Фредгольма с интегралом в смысле Адамара* // Тр. Матем. ин-та АН Груз. ССР. – Тбилиси, 1940. – Т. 7. – С. 113–148.
5. Габбасов Н.С. *Обобщенный метод коллокации для интегральных уравнений третьего рода* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 9. – С. 1612–1614.
6. Габбасов Н.С. *Новые прямые методы решения интегральных уравнений третьего рода* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 4. – С. 15–23.
7. Габбасов Н.С. *Новый прямой метод решения интегральных уравнений третьего рода* // Матем. заметки. – 1991. – Т. 49. – Вып. 1. – С. 40–46.
8. Габбасов Н.С. *Новые варианты метода коллокации для интегральных уравнений третьего рода* // Матем. заметки. – 1991. – Т. 50. – Вып. 2. – С. 47–53.
9. Габбасов Н.С. *Об одном сплайн-методе численного решения интегральных уравнений третьего рода* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 9. – С. 1648–1650.
10. Габбасов Н.С. *Оптимальный проекционный метод решения одного класса интегральных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 2. – С. 333–335.
11. Gabbasov N.S. *Optimal spline method for solving integral equations of the third kind* // Short Communications of ICM. – Zurich, 1994. – P. 239.
12. Габбасов Н.С. *Методы решения одного класса интегральных уравнений* III *рода* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 5. – С. 19–28.
13. Габбасов Н.С. *Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1996. – 318 с.
14. Габбасов Н.С. *К теории линейных интегральных уравнений третьего рода* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 9. – С. 1192–1201.
15. Габбасов Н.С. *Оптимальный метод решения интегральных уравнений третьего рода* // Докл. РАН. – 1998. – Т. 362. – № 1. – С. 12–15.
16. Габбасов Н.С. *О приближенном решении интегральных уравнений второго рода в классе гладких функций* // Вестн. НГПИ. – 1998. – Вып. 1. – С. 53–54.
17. Габбасов Н.С. *Теория разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций* // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 9. – С. 1216–1226.
18. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
19. Прессдорф З. *Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек* // Матем. исследования. – Кишинев, 1972. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 116–132.

20. Габбасов Н.С. *Новый прямой метод решения интегральных уравнений первого рода* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 12. – С. 2122–2127.
21. Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* – М.: Наука, 1978. – 351 с.
22. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
23. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
24. Петерсен И. *О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений* // Изв. АН Эст ССР. Сер. физ.-матем. и тех. наук. – 1961. – № 1. – С. 3–12.
25. Каспшицкая М.Ф., Тукалевская Н.И. *К вопросу о сходимости метода коллокации* // Укр. матем. журн. – 1967. – Т. 19. – № 4. – С. 48–56.

Набережночелнинский государственный педагогический институт

Поступила
08.02.2000