И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.764

А.В. СТОЛЯРОВ

ПРОСТРАНСТВО ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

В математической литературе геометрия пространств проективной связности и вложенных в них различных подмногообразий разработана достаточно полно, вопросы же пространства проективно-метрической связности и вложенных в них подмногообразий до настоящего времени оставались почти не изученными.

В данной работе найдено необходимое и достаточное условие, при котором пространство проективной связности $P_{n,n}$ является пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$ [1] с инвариантным полем локальных абсолютов (гиперквадрик), отличных от сдвоенных гиперплоскостей; изучаются некоторые вопросы внутренней геометрии полярной нормализации пространства $K_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$\overline{i},\overline{j},\overline{k},\overline{s},\overline{t}=\overline{0,n};\quad i,j,k,l,s,t=\overline{1,n};\quad u,v,w=\overline{1,r};\quad J=\overline{n+1,n+N}.$$

1. Рассмотрим расслоенное многообразие $\mathfrak{W}$ с n-мерной базой B_n, N-мерными слоями E_N и r-членной группой Ли G_r. Согласно теореме Картана–Лаптева [1], [2] система пфаффовых форм ω^u в расслоенном многообразии $\mathfrak{W}$ устанавливает фундаментально-групповую связность со структурной группой G_r, определенной инвариантными формами ω^u, тогда и только тогда, когда формы ω^u связаны структурными уравнениями

$$D\omega^u=\frac{1}{2}c^u_{vw}\omega^v\wedge\omega^w+\frac{1}{2}R^u_{ij}\theta^i\wedge\theta^j, \tag{1}$$

где $c^u_{vw}=-c^u_{wv}=\mathrm{const}$, $R^u_{ij}=-R^u_{ji}$, $D\theta^i=\theta^j\wedge\theta^i_j$, $\theta^i=a^i_jdu^j$ — базовые формы Пфаффа на B_n, u^i — координаты точки базы B_n.

Если $x^J(u)$ — слоевые координаты точки слоя $E_N(u)$, то определяющее связность отображение ψ соседнего слоя $E_N(u+du)$ на исходное пространство $E_N(u)$ имеет вид [1]

$$x^J(u+du)\xrightarrow{\psi}x^J(u,du)=x^J(u)-\xi^J_u(u)\omega^u(u,du)+\rho\varepsilon^J, \tag{2}$$

причем $\lim\limits_{\rho\to0}\varepsilon^J=0$.

Поле геометрического объекта X^J пространства $\mathfrak{W}$ называется [1] инвариантным относительно связности пространства, если при определяющем связность инфинитезимальном отображении (2) локальный объект соседнего слоя $E_N(u+du)$ отображается (в главном) в локальный объект исходного слоя $E_N(u)$. Согласно [1] поле геометрического объекта X^J инвариантно относительно связности только тогда, когда определяющая его система дифференциальных уравнений имеет вид

$$dX^J=\xi^J_u(X)\omega^u, \tag{3}$$

где $\xi^J_u(X)$ — система основных функций, определяющих объект X^J, ω^u — формы связности пространства.

Не всякое пространство $\mathfrak{W}$ со связностью обладает инвариантным относительно связности геометрическим объектом; наличие инвариантного относительно связности объекта X^J приводит к конечным соотношениям для компонент R^u_{ij} тензора кривизны-кручения.

2. Пусть расслоенное пространство $\mathfrak{W}$ с фундаментально-групповой связностью является пространством проективной связности $P_{n,n}$; базой пространства $P_{n,n}$ служит многообразие B_n, слоями — проективные пространства P_n размерности n, структурная группа G_r имеет порядок $r = n(n+2)$. Формы связности $\{\omega^u\} \equiv \{\omega_{\overline{i}}^{\overline{j}}\}$, $\omega_{\overline{k}}^{\overline{k}} = 0$ подчинены структурным уравнениям (ср. с (1))

$$D\omega_{\overline{i}}^{\overline{j}} = \omega_{\overline{i}}^{\overline{k}} \wedge \omega_{\overline{k}}^{\overline{j}} + \frac{1}{2} R_{\overline{i}st}^{\overline{j}} \omega_0^s \wedge \omega_0^t, \qquad \omega_{\overline{k}}^{\overline{k}} = 0; \tag{4}$$

при этом независимые первые интегралы $u^1, u^2, \ldots, u^n$ вполне интегрируемой системы линейно независимых уравнений $\omega_0^i = 0$ являются локальными координатами точки $A(u)$ базы B_n. С текущей точкой $A(u) \in B_n$ связывается n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к точечному реперу $\{A_{\overline{i}}(u)\}$, причем $A_0(u) \equiv A(u)$. Формы $\omega_{\overline{i}}^{\overline{j}}$ определяют главную часть отображения локального пространства $P_n(u+du)$ на исходное $P_n(u)$:

$$A_{\overline{i}}(u+du) \xrightarrow{\psi} A_{\overline{i}}(u, du) = A_{\overline{i}}(u) + \omega_{\overline{i}}^{\overline{k}} A_{\overline{k}}(u) + \rho \varepsilon_{\overline{i}}^{\overline{k}} A_{\overline{k}}, \tag{5}$$

где $\rho = \sqrt{(\omega_0^1)^2 + \cdots + (\omega_0^n)^2}$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_{\overline{i}}^{\overline{l}} = 0$. Структурные уравнения (4) обеспечивают инвариантность главной части отображения (5) относительно преобразований семейства реперов.

В структурных уравнениях (4) функции $R_{\overline{i}st}^{\overline{j}}$ кососимметричны по s, t и их совокупность представляет собой тензор кривизны-кручения пространства $P_{n,n}$:

$$\nabla_\delta R_{\overline{i}st}^{\overline{j}} + 2R_{\overline{i}st}^{\overline{j}} \pi_0^0 = 0, \tag{6}$$

где δ — символ дифференцирования по параметрам центропроективной группы фиксированного слоя, т. е. при $\omega_0^i = 0$, а $\pi_{\overline{i}}^{\overline{j}} = \omega_{\overline{i}}^{\overline{j}}|_{\omega_0^k = 0}$.

Между компонентами тензора кривизны-кручения существует линейная зависимость

$$R_{0st}^0 + R_{kst}^k = 0, \tag{7}$$

которая является результатом замыкания уравнения $\omega_{\overline{k}}^{\overline{k}} = 0$ (см. (4)).

Система функций R_{0st}^j согласно уравнениям (6) образует подтензор тензора $R_{\overline{i}st}^{\overline{j}}$, а именно, тензор кручения пространства $P_{n,n}$. Для пространства проективной связности $\overset{0}{P}_{n,n}$ без кручения из (4) следует уравнение $D\omega_0^j = \omega_0^l \wedge (\omega_l^j - \delta_l^j \omega_0^0)$, замыкая которое, получим

$$R_{(ikt)}^j = \delta_{(i}^j R_{|0|kt)}^0. \tag{8}$$

Соотношения (8) представляют собой аналоги известных тождеств Риччи.

Для пространства $\overset{0}{P}_{n,n}$ по аналогии с пространством аффинной связности $\overset{0}{A}_{n,n}$ без кручения тензор $R_{ik} \overset{\text{def}}{=} R_{ikj}^j$ назовем тензором Риччи; в случае симметрии тензора Риччи R_{ik} пространство $\overset{0}{P}_{n,n}$ назовем эквипроективным.

Из тождеств (8) находим

$$R_{jik}^j + 2R_{[ik]} = (n-2)R_{0ik}^0,$$

откуда с использованием (7) получим

$$2R_{[ik]} = (n-1)R_{0ik}^0. \tag{9}$$

Если $R_{\overline{i}kt}^{\overline{j}} \equiv 0$, то пространство $P_{n,n}$ представляет собой n-мерное проективное пространство P_n; при этом формы $\omega_{\overline{i}}^{\overline{j}}$ подчинены структурным уравнениям $D\omega_{\overline{i}}^{\overline{j}} = \omega_{\overline{i}}^{\overline{k}} \wedge \omega_{\overline{k}}^{\overline{j}}$ и линейному соотношению $\omega_{\overline{k}}^{\overline{k}} = 0$.

3. Согласно ([1], с. 339) пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$ называется пространство проективной связности $P_{n,n}$, обладающее инвариантным (в смысле п. 1) полем локальных гиперквадрик Q_{n-1} (локальных абсолютов).

Допустим, что пространство $P_{n,n}$ обладает инвариантным полем локальных гиперквадрик Q_{n-1}:

$$g_{\bar{i}\,\bar{j}}x^{\bar{i}}x^{\bar{j}} = 0, \quad g_{\bar{i}\,\bar{j}} = g_{\bar{j}\,\bar{i}}, \tag{10}$$

$$\delta g_{\bar{i}\,\bar{j}} - g_{\bar{i}\,\bar{k}}\pi_{\bar{j}}^{\bar{k}} - g_{\bar{k}\,\bar{j}}\pi_{\bar{i}}^{\bar{k}} = \theta \cdot g_{\bar{i}\,\bar{j}}, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_0^0. \tag{11}$$

В уравнениях (10) коэффициенты $g_{\bar{i}\,\bar{j}}$ определяются с точностью до скалярного множителя $\lambda \neq 0$: $\widetilde{g}_{\bar{i}\,\bar{j}} = \lambda g_{\bar{i}\,\bar{j}}$; дифференциальные уравнения (11) теперь запишутся в виде $\delta\widetilde{g}_{\bar{i}\,\bar{j}} - \widetilde{g}_{\bar{i}\,\bar{k}}\pi_{\bar{j}}^{\bar{k}} - \widetilde{g}_{\bar{k}\,\bar{j}}\pi_{\bar{i}}^{\bar{k}} = \delta(\ln\lambda + \theta)\widetilde{g}_{\bar{i}\,\bar{j}}$. Так как форма θ есть полный дифференциал, т. е. $\theta = \delta F$, то в последних уравнениях за счет соответствующего выбора λ можно считать $\widetilde{\theta} \overset{\text{def}}{=} \delta\ln\lambda + \theta = 0$.

Ниже предполагается выполненным такое нормирование коэффициентов уравнения локального абсолюта (10); при этом уравнения (11) примут вид

$$\begin{aligned}
&(\text{а}) \quad \delta g_{ij} - g_{ik}\pi_j^k - g_{kj}\pi_i^k - g_{i0}\pi_j^0 - g_{0j}\pi_i^0 = 0,\\
&(\text{б}) \quad \delta g_{i0} - g_{i0}\pi_0^0 - g_{k0}\pi_i^k - g_{00}\pi_i^0 = 0,\\
&(\text{в}) \quad \delta g_{00} - 2g_{00}\pi_0^0 = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Считая $A \notin Q_{n-1}$, имеем $g_{00} \neq 0$; справедливо и обратное. Уравнение (12(в)) в силу $g_{00} \neq 0$ можно записать в виде

$$\delta\ln g_{00} - 2\pi_0^0 = 0. \tag{13}$$

Проведем нормировку вершины A_0 репера $R = \{A_{\bar{i}}\}$: $\widetilde{A}_0 = \mu A_0$, $\mu \neq 0$; с использованием (13) имеем $\delta\widetilde{A}_0 = (\delta\ln\mu + \pi_0^0)\widetilde{A}_0 = (\delta\ln\mu + \frac{1}{2}\delta\ln g_{00})\widetilde{A}_0$. Подбирая множитель μ соответствующим образом, получим $\widetilde{\pi}_0^0 \overset{\text{def}}{=} \delta\ln\mu + \frac{1}{2}\delta\ln g_{00} = 0$, т. е. за счет подбора нормирующего множителя μ можно форму π_0^0 привести к нулю:

$$\pi_0^0 = 0. \tag{14}$$

Из соотношений (13), (14) следует

$$\begin{aligned}
&(\text{а}) \quad d\ln g_{00} = m_k\omega_0^k,\\
&(\text{б}) \quad \omega_0^0 = p_k\omega_0^k.
\end{aligned} \tag{15}$$

Продолжая уравнения (15), находим

$$\begin{aligned}
&(\text{а}) \quad dm_k - m_l\omega_k^l = (\widetilde{m}_{kl} - m_kp_l + \frac{1}{2}m_jR_{0kl}^j)\omega_0^l, \quad \widetilde{m}_{[kl]} = 0;\\
&(\text{б}) \quad dp_k - p_l\omega_k^l + \omega_k^0 = p_{kl}\omega_0^l, \quad 2p_{[kl]} = \frac{2}{c}p_{[k}g_{l]0} + p_jR_{0kl}^j - R_{0kl}^0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Если в качестве поля m_k (см. (16(а)) взять поле нулевого тензора, то из соотношения (15(а)) находим $g_{00} = c = \text{const} \neq 0$.

Возьмем охват

$$a_{ij} \overset{\text{def}}{=} g_{ij} - \frac{g_{i0}g_{j0}}{c}, \quad a_{[ij]} = 0;$$

уравнение локального абсолюта (10) и уравнения (12(а), (б)) его инвариантности теперь запишутся соответственно в виде

$$a_{ij}x^ix^j + \frac{1}{c}(g_{i0}x^i + cx^0)^2 = 0, \quad c = \mathrm{const} \neq 0; \tag{17}$$

$$\delta g_{i0} - g_{k0}\pi_i^k - c\pi_i^0 = 0, \quad \delta a_{ij} - a_{ik}\pi_j^k - a_{kj}\pi_i^k = 0. \tag{18}$$

Из (18) следует, что компоненты полей квазитензора g_{i0} и симметричного тензора a_{ij} удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям

$$dg_{i0} - g_{k0}\omega_i^k - c\omega_i^0 = G_{ik}\omega_0^k, \tag{19}$$

$$da_{ij} - a_{ik}\omega_j^k - a_{kj}\omega_i^k = A_{ijk}\omega_0^k. \tag{20}$$

Разобьем исследования на два случая:

а) тензор a_{ij} ненулевой; б) тензор a_{ij} нулевой.

Отметим, что в случае б) локальный абсолют (17) вырождается в сдвоенную гиперплоскость $(g_{0i}x^i + cx^0)^2 = 0$; справедливо и обратное.

Ниже (пп. 3, 4) ограничимся случаем а), т. е. предполагая, что локальный абсолют (17) не вырождается в сдвоенную гиперплоскость; отметим, что геометрия пространства $P_{n,n}$, в котором задано поле квазитензора $v_k^0 = -\frac{1}{c}g_{k0}$, т. е. задано поле нормализующей гиперплоскости $g_{i0}x^i + cx^0 = 0$, изучалась в [3].

Продолжая уравнения (19), (20), с использованием (4), (15) получим

$$dG_{ij} - G_{il}\omega_j^l - G_{lj}\omega_i^l + (g_{j0} + cp_j)\omega_i^0 = G_{ijl}\omega_0^l, \tag{21}$$

$$dA_{ijk} - A_{ijt}\omega_k^t - A_{itk}\omega_j^t - A_{tjk}\omega_i^t + a_{ik}\omega_j^0 + a_{kj}\omega_i^0 = A_{ijkl}\omega_0^l, \tag{22}$$

где

$$2G_{i[jl]} = -2G_{i[j}p_{l]} + g_{t0}R_{ijl}^t + cR_{ijl}^0 + G_{it}R_{0jl}^t, \tag{23}$$

$$2A_{ij[kl]} = -2A_{ij[k}p_{l]} + a_{it}R_{jkl}^t + a_{tj}R_{ikl}^t + A_{ijt}R_{0kl}^t. \tag{24}$$

Согласно уравнениям (16(б)), (19)–(22), в качестве функций p_k, G_{ik}, A_{ijk} можно взять охваты

$$\begin{aligned} &(а) \quad p_k = -\frac{1}{c}g_{k_0}, \quad G_{ik} = a_{ik}, \\ &(б) \quad A_{ijk} = -\frac{1}{c}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0}); \end{aligned} \tag{25}$$

при этом в уравнениях (16(б)) в силу (19), (25) имеет место $p_{kl} = -\frac{1}{c}a_{kl}$, что в силу симметрии a_{kl} согласно (16(б)) приводит к конечным соотношениям

$$R_{0jk}^0 + \frac{1}{c}g_{t0}R_{0jk}^t = 0. \tag{26}$$

В уравнениях (20), (21) в силу соотношений (25) справедливо $G_{ijk} = A_{ijk}$, что согласно (23) приводит к конечным соотношениям

$$g_{t0}R_{ijk}^t + a_{it}R_{0jk}^t + cR_{ijk}^0 = 0. \tag{27}$$

Дифференцируя (25(б)), с использованием уравнений (19), (20) и соотношений (25(а)) получим

$$dA_{ijk} - A_{ijt}\omega_k^t - A_{itk}\omega_j^t - A_{tjk}\omega_i^t + a_{ik}\omega_j^0 + a_{kj}\omega_i^0 = -\frac{1}{c}(A_{ikl}g_{j0} + a_{ik}a_{jl} + A_{jkl}g_{i0} + a_{jk}a_{il})\omega_0^l.$$

Сравнивая последние уравнения с (22), имеем $A_{ijkl} = -\frac{1}{c}(A_{ikl}g_{j0} + a_{ik}a_{jl} + A_{jkl}g_{i0} + a_{jk}a_{il})$, откуда непосредственно следует

$$A_{ij[kl]} = -\frac{1}{c}(A_{i[kl]}g_{j0} + A_{j[kl]}g_{i0});$$

последние соотношения с использованием (25(б)) запишутся в виде

$$A_{ij[kl]} = -\frac{1}{c^2}(a_{i[k}g_{l]0}g_{j0} + a_{j[k}g_{l]0}g_{i0}). \tag{28}$$

Сравнение (24) и (28) с использованием (25) приводит к конечным соотношениям

$$a_{it}R^t_{jkl} + a_{tj}R^t_{ikl} - \frac{1}{c}(a_{it}g_{j0} + a_{jt}g_{i0})R^t_{0kl} = 0. \tag{29}$$

Итак, если пространство проективной связности $P_{n,n}$ обладает инвариантным полем локальных гиперквадрик Q_{n-1}, отличных от сдвоенных гиперплоскостей, то уравнение локального абсолюта запишется в виде (17), где компоненты полей квазитензора g_{i0} и симметричного тензора a_{ij} в силу (19), (20), (25) удовлетворяют уравнениям

$$dg_{i0} - g_{k0}\omega^k_i - c\omega^0_i = a_{ik}\omega^k_0, \tag{30}$$

$$da_{ij} - a_{ik}\omega^k_j - a_{kj}\omega^k_i = -\frac{1}{c}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0})\omega^k_0, \tag{31}$$

причем

$$\omega^0_0 = -\frac{1}{c}g_{0k}\omega^k_0 \tag{32}$$

и справедливы конечные соотношения (26), (27), (29).

Обратно, если коэффициенты a_{ij}, g_{i0} уравнения гиперквадрики (17) удовлетворяют уравнениям (30), (31), то объединенная система (30), (31) представляет собой систему вида (3) для объекта $\{X^J\} \equiv \{a_{ij}, g_{i0}\}$. В силу этого поле геометрического объекта $\{a_{ij}, g_{i0}\}$, т. е. поле локальных абсолютов (17), инвариантно относительно связности пространства $P_{n,n}$; последнее означает, что $P_{n,n}$ является пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$. Доказана

Теорема 1. *Для того чтобы пространство проективной связности $P_{n,n}$ обладало инвариантным полем гиперквадрик* (17)*, отличных от сдвоенных гиперплоскостей, т. е. чтобы оно являлось пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$ с полем локальных абсолютов* (17)*, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_{ij}, g_{i0} уравнения* (17) *удовлетворяли дифференциальным уравнениям* (30)*,* (31)*.*

Заметим, что наличие инвариантного поля локальных абсолютов (17) приводит к конечным соотношениям (26), (27), (29) для компонент тензора кривизны-кручения пространства $P_{n,n}$; одновременное выполнение этих соотношений есть условие полной интегрируемости объединенной системы дифференциальных уравнений (30)–(32).

Замечание 1. Каждый слой $P_n(A_0)$ пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ является проективно-метрическим пространством $K_n(A_0)$ с соответствующим локальным абсолютом $Q_{n-1}(A_0)$. В случае $R^{\bar{j}}_{\bar{i}st} \equiv 0$ пространство $K_{n,n}$ вырождается в проективно-метрическое пространство K_n с абсолютом (17), рассмотренное в [4].

Замечание 2. Если подтензоры R^j_{0kt}, $\{R^j_{ikt}, R^j_{0kt}\}$ тензора кривизны-кручения $R^{\bar{j}}_{\bar{i}st}$ пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ одновременно обращаются в нуль, то в силу (26), (27) справедливо $R^{\bar{j}}_{\bar{i}st} \equiv 0$, т. е. $K_{n,n}$ есть проективно-метрическое пространство K_n.

Отметим, что тензор кручения R^j_{0kt} пространства проективной связности $P_{n,n}$ есть тензор кручения соответствующего пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$; в случае $R^j_{0kt} \equiv 0$ пространство $K_{n,n}$ обозначим через $\overset{0}{K}_{n,n}$.

Для пространства $\overset{0}{K}_{n,n}$ в силу соотношений (9), (26) справедлива

Теорема 2. *Пространство проективно-метрической связности без кручения* $\overset{0}{K}_{n,n}$ *является эквипроективным* (*т. е.* $R_{[ik]} = 0$).

4. Поляра центра A_0 слоя $P_n(A_0)$ относительно локального абсолюта (17) пространства $K_{n,n}$ есть гиперплоскость $\Pi_{n-1}(A_0)$

$$g_{k0}x^k + cx^0 = 0. \tag{33}$$

Согласно [5] задание однозначного, непрерывного и дифференцируемого соответствия $A_0 \to \Pi_{n-1}(A_0)$ определяет нормализацию пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ полем квазитензора

$$q_i^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{c}g_{i0},$$

которую назовем полярной.

Нетрудно проверить, что система форм $\{\omega_0^j, \theta_i^j\}$, где

$$\theta_i^j = \omega_i^j + q_i^0\omega_0^j, \tag{34}$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева

$$\begin{aligned} D\omega_0^j &= \omega_0^l \wedge \theta_l^j + \frac{1}{2}r_{kt}^j\omega_0^k \wedge \omega_0^t, \\ D\theta_i^j &= \theta_i^l \wedge \theta_l^j + \frac{1}{2}r_{ikt}^j\omega_0^k \wedge \omega_0^t, \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$r_{kt}^j = R_{0kt}^j, \quad r_{ikt}^j = -\frac{2}{c}a_{i[k}\delta_{t]}^j + R_{ikt}^j - \frac{1}{c}g_{i0}R_{0kt}^j. \tag{36}$$

Следовательно, система форм $\{\omega_0^j, \theta_i^j\}$ определяет аффинную связность; соответствующее пространство аффинной связности обозначим через $A_{n,n}$. В структурных уравнениях (35) каждая из систем функций r_{kt}^j и r_{ikt}^j образует соответственно тензор кручения и тензор кривизны пространства $A_{n,n}$.

Дифференциальные уравнения (31) тензора a_{ij} в силу (34) можно переписать в виде

$$da_{ij} - a_{ik}\theta_j^k - a_{kj}\theta_i^k = 0.$$

Эти уравнения говорят о том, что связность ∇ пространства $A_{n,n}$ является метрической (вообще говоря, с кручением) с полем метрического тензора a_{ij}; при этом пространство $K_{n,n}$ обладает инвариантным полем локальных угловых абсолютов, определяемых в каждом локальном пространстве $K_n(A_0)$ пересечением локальной нормализующей гиперплоскости (33) с локальным гиперконусом направлений

$$a_{ij}x^ix^j = 0 \tag{37}$$

с вершиной в точке A_0. Локальный угловой абсолют есть $(n-2)$-квадрика пересечения локальной гиперплоскости (33) с локальным абсолютом (17). Поле гиперконуса направлений (37) задает основной поляритет ([5], с. 151), сохраняющийся при параллельном перенесении направлений.

Допустим, что пространство аффинной связности $A_{n,n}$ имеет нулевое кручение; последнее в силу (36) равносильно тому, что пространство $K_{n,n}$ без кручения:

$$r_{kt}^j = R_{0kt}^j = 0.$$

В этом случае тензор Риччи $r_{ik} \overset{\text{def}}{=} r_{ikj}^j$ пространства $A_{n,n}$ в силу (36) имеет строение

$$r_{ik} = -\frac{n-1}{c}a_{ik} + R_{ik}, \tag{38}$$

откуда с учетом теоремы 2 непосредственно следует

$$r_{[ik]} = R_{[ik]} = 0.$$

Таким образом, справедливы две теоремы:

Теорема 3. *Пространство аффинной связности $A_{n,n}$, индуцируемое полярной нормализацией пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$, является метрическим* (*вообще говоря, с кручением*) *с полем метрического тензора a_{ij}; если при этом пространство $A_{n,n}$ без кручения* (*т. е. $A_{n,n} \equiv \overset{0}{A}_{n,n}$*), *то его связность является эквиаффинной.*

Теорема 4. *Если в условиях теоремы* 3 *метрический тензор a_{ij} невырожден, то пространство $\overset{0}{A}_{n,n}$ является вейлевым $W_{n,n}$, и, следовательно, римановым $V_{n,n}$; при этом если тензор Риччи R_{ik} пространства $\overset{0}{K}_{n,n}$ нулевой, то пространство $V_{n,n}$ является эйнштейновым* ([6], с. 268).

Отметим, что 2-я часть теоремы 4 непосредственно следует из соотношений (38), ибо в случае $R_{ik} = 0$ тензор Риччи r_{ik} пространства $V_{n,n}$ пропорционален метрическому тензору a_{ik} с постоянным коэффициентом пропорциональности.

Замечание. Согласно ([5], с. 255; см. также [4]) пространство $\overset{0}{A}_{n,n}$, индуцируемое полярной нормализацией проективно-метрического пространства K_n с невырожденной метрикой ($|a_{ij}| \neq 0$), является римановым постоянной кривизны $K = -\frac{1}{c}$.

Литература

1. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–283.
2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – 247 с.
3. Столяров А.В. *Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ. – 1977. – Т. 8. – С. 25–46.
4. Столяров А.В. *Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Калининград: Изд-во Калинингр. ун-та, 2001. – Вып. 32. – С. 94–101.
5. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
6. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

Чувашский государственный педагогический университет

Поступила 12.03.2003