Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Специализация :010101.65 - математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Дипломная работа)

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Работа завершена:
"____"_____ 2014г _____(А.М.Аскарова)
Работа допущена к защите:
Научный руководитель:
кандидат (физико-математические науки),
доцент, доцент, к.н. (доцент)
"____"_____ 2014г. _____ (Л.Г.Салехов)
Заведующий кафедрой
доктор (физико-математические науки),
профессор
доцент, к.н. (доцент)
"____"_____ 2014г. _____ (Ю.В.Обносов)

Казань-2014

Содержание

1. Введение

3

2. Определение пространства $\mathfrak{O}'_{-1}$

4

3. Преобразование Карлемана-Фурье в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$

7

4. Обобщенная функция $v.p.\frac{1}{t^n}, \forall n \in \mathbf{N}$

11

5.Различные методы решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в пространстве $\mathfrak{O}'_{-1}$

13

6.Аналитическое представление для обобщенных функций $T \in \mathfrak{O}'_{-1}$ через преобразования Карлемана-Фурье и копреобразования Фурье

23

7. Список использованной литературы

35

Введение

Многие задачи классической математической физики сводятся к краевым задачам для дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений - уравнений математической физики. Основными математическими средствами исследования этих задач служат теория дифференциальных уравнений (включая родственные области: интегральные уравнения и вариационное исчисление), теория функций, функциональный анализ, теория вероятностей, приближенные методы и вычислительная математика.

Среди задач математической физики выделяется важный класс корректно поставленных задач, т.е. задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи.

Точное определение обобщенного решения опирается на понятие обобщенной производной и обобщенной функции. Аппарат теории обобщенных функций служит удобным средством для исследования линейных краевых задач математической физики в обобщенной и классической постановках.

Обобщенные функции впервые в науку были введены П.Дираком в его квантомеханических исследованиях, в которых систематически использовалась знаменитая δ- функция. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л.Соболевым и Л.Шварцем.

На практике приходится использовать "промежуточные пространства"для более удобного исследования поставленной задачи, о которой и будет идти речь в данной работе.

Целью моей работы является ознакомление с одним пространством обобщенных функций, где действуют преобразование Фурье и Карлемана-Фурье, а так же их приложение к теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в этом пространстве.

Определение пространства $\mathfrak{O}'_{-1}$

Рассмотрим определение пространства $\mathfrak{O}_{-1}$.

$\mathfrak{O}_{-1}$ - пространство всех функций $\varphi(t)$ класса C^∞, определенных на E^n, таких,что $\varphi(t) = O(|t|^{-1})$ и $D^k\varphi(t) = O(|t|^{-1})$ при всех k. Сходимость определяется так: говорят , что последовательность φ_j сходится в $\mathfrak{O}_{-1}$, если последовательность φ_j сходится равномерно в любом порядке на любом компактном подмножестве E^n и если для любого k найдется константа C_k не зависящая от j, такая что

$$|D^k\varphi_j(t)| \le C_k|t|^{-1}$$

при всех t и $C_k > 0$.

Пространство $\mathfrak{O}'_{-1}$ есть пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{O}_{-1}$

Определение алгебры сверточных операторов на пространстве $\mathfrak{O}'_{-1}$

Рассмотрим определение сверточной алгебры. Свертка в пространстве обобщенных функций.

Определение.

Векторное пространство обобщенных функций снабженное сверткой называется сверточной алгеброй, если в этом пространстве введена операция свертка и она обладает следующими свойствами:

1) внутренним законом композиции

2) свойством ассоциативности

3) свойством коммутативности

Определение.

Пусть $\mathscr{A}$ - сверточная алгебра с единицей. $\mathscr{A} \subset \mathfrak{M} \subset D'(\mathbf{R^n})$, $\mathfrak{M}$ - в.п., сверточный модуль на сверточной алгебре, и определена свертка $A * M = M * A, \quad \forall A \in \mathscr{A}, \quad \forall M \in \mathfrak{M}$

$1) A*B*M = (A*B)*M = A*(B*M), \quad \forall A, B \in \mathscr{A}$ $2) (A+B)*M = (A*M)*(B*M), \quad \forall A, B \in \mathscr{A}$ дистрибутивность свертки по отношению к "+"

$3) A*(M+N) = (A*M)*(A*N), \quad \forall A \in \mathscr{A}, \quad \forall M, N \in \mathscr{M}$

Алгебра $\mathscr{A}$ является алгеброй сверточных операторов на $\mathfrak{M}$.

Производные в $\mathfrak{O}'_{-1}$

Пусть $T \in \mathfrak{O}'_{-1}$. Тогда производная D^kT определяется соотношением $\langle D^kT, \varphi\rangle = (-1)^{|k|}\langle T, D^k\varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathfrak{O}_{-1}$. Если $\varphi \in \mathfrak{O}_{-1}$, то $D^k\varphi \in \mathfrak{O}_{-1}$, поэтому выражение $\langle T, D^k\varphi\rangle$ определено. Очевидно, что $\langle T, D^k\varphi\rangle$-линейный функционал. Кроме того, если последовательность

$\{\varphi_j\}$ сходится в смысле $\mathfrak{O}_{-1}$, то $\{D^k\varphi_j\}$ тоже сходится в смысле $\mathfrak{O}_{-1}$. Следовательно, $\langle T, D^k\varphi\rangle$ - непрерывный функционал и D^kT - распределение из $\mathfrak{O}'_{-1}$.

Продолжение обобщенных функций из $\mathscr{D}'$ на $\mathfrak{O}'_{-1}$

Теорема. Пусть $T \in \mathscr{D}'$ и $T = O(|t|^\beta)$. Тогда T можно продолжить на $\mathfrak{O}'_{-1}$ т.ч. $-1+\beta+n<0$, где n есть размерность E^n. Это продолжение единственно. **Теорема представления для $\mathfrak{O}'_{-1}$** $n=1$

Пусть $n=1$ $T \in \mathfrak{O}'_{-1}$. Положим

$$\widehat{T}(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle T, \frac{1}{t-z}\rangle$$

Тогда $\widehat{T}(z)$ - аналитическая функция z в дополнении носителя T. Функция $\widehat{T}(z)$ дает представление распределения T в следующем смысле

$$\lim_{\epsilon\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\widehat{T}(x+\iota\epsilon)-\widehat{T}(x-\iota\epsilon)]\varphi(x)dx = \langle T,\varphi\rangle$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Кроме того, производные $\widehat{T}(z)$ и T связаны между собой равенством

$$\frac{d^k}{dz^k}\widehat{T}(z) = \widehat{T}^k(z).$$

Представление распределений из $\mathfrak{O}'_\alpha$

Теорема. Пусть $T \in \mathfrak{O}'_\alpha$ и k таково, что при $Imz \neq 0$

$$(t-z)^{-k-1} = O(|t|^\alpha)$$

Тогда

$$\widehat{S}(z) = \frac{k!}{2\pi\iota}\langle T, (t-z)^{-k-1}\rangle$$

есть аналитическая функция в дополнении (относительно плоскости z) носителя T. Эта функция дает представление для k-й производной T в следующем смысле

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}[\widehat{S}(x+\iota\epsilon)-\widehat{S}(x-\iota\epsilon)]\varphi(x)dx = \langle T^{(k)},\varphi\rangle$$

для всех $\varphi \in \mathscr{D}$

Представление распределений из $\mathfrak{O}'_\alpha$ с помощью деления на полином

Пусть $T \in \mathfrak{O}'_\alpha$, $P(t)$- полином без вещественных корней степени k, такой, что $-k-1 \leq \alpha$. Тогда

$$\frac{1}{P(t)(t-z)} \in \mathfrak{O}_\alpha$$

Пусть

$$[\widehat{T(P^{-1})}](z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle T, \frac{1}{P(t)(t-z)}\rangle$$

Можно показать

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{T(P^{-1})}](x+\iota\epsilon)\varphi(x)dx = \langle T, \frac{1}{P(t)}[\widehat{-\varphi}(t-\iota\epsilon)]\rangle$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{T(P^{-1})}](x-\iota\epsilon)\varphi(x)dx = \langle T, \frac{1}{P(t)}[\widehat{-\varphi}(t+\iota\epsilon)]\rangle$$

Отсюда

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\left([\widehat{T(P^{-1})}](x+\iota\epsilon) - [\widehat{T(P^{-1})}](x-\iota\epsilon)\right)P(x)\varphi(x)dx = \langle T, \varphi\rangle$$

для всех $\varphi \in \mathscr{D}$

Преобразование Карлемана-Фурье в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$

Введем преобразование, которое эффективно в $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$. Это преобразование называется преобразованием Карлемана-Фурье. Оно будет обозначаться символом $\mathscr{K}\mathscr{F}$. Итак, пусть $f(t)$ - функция медленного роста на оси $\mathbf{R}$, т.е. функция растущая не быстрее полинома на бесконечности, тогда преобразование Карлемана-Фурье определяется по формуле

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(f)(z) := \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{2\pi\iota tz} f(t)dt, Imz > 0 \\ -\int\limits_{-\infty}^0 e^{2\pi\iota tz} f(t)dt, Imz < 0 \end{cases}$$

$\mathscr{K}\mathscr{F}(f)(z)$ есть аналитическая функция при $Imz \neq 0$. А функция

$$\mathscr{K}\mathscr{F}^{-1}(f)(z) := \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^0 f(t)e^{-2\pi\iota tz}dt, Imz > 0 \\ -\int\limits_0^\infty f(t)e^{-2\pi\iota tz}dt, Imz < 0 \end{cases}$$

называется обратным преобразованием Карлемана-Фурье.

Если $T \in \mathscr{S}'\mathbf{R}$, то известна структура обобщенной функции T, т.е. она может быть представлена в виде

$$T = \frac{d^m}{dt^m} f(z), m \in \mathbf{N},$$

$\frac{d^m}{dt^m}$- производная в смысле обобщенных функций. Тогда преобразование Карлемана-Фурье обобщенной функции T определяется по формуле

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(T)(z) := (-2\pi\iota z)^m \mathscr{K}\mathscr{F}(f)(z)$$

Отметим связь преобразования $\mathscr{K}\mathscr{F}$ в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ с преобразованием $\mathscr{F}$ в пространстве $\mathscr{S}'\mathbf{R}$. Преобразование $\mathscr{K}\mathscr{F}$ является аналитическим представлением преобразования Фурье $\mathscr{F}$, т.е.

$$\mathscr{F}(T) = \mathscr{K}\mathscr{F}^+(T) - \mathscr{K}\mathscr{F}^-(T)$$

где равенство понимается в смысле обобщенных функций

$$\langle \mathscr{F}(T), \varphi \rangle = lim \int\limits_{\mathbf{R}} \{\mathscr{K}\mathscr{F}^+(t + \iota a) - \mathscr{K}\mathscr{F}^-(t - \iota a)\}\varphi(t)dt, \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

Пусть $\mathscr{S}'_+(\mathbf{R})$ пространство обобщенных функций с носителями, содержащимися в $\mathbf{R}_+ := [\mathbf{0}, +\infty]$. Это пространство, снабженное операцией свертка становится сверточной алгеброй, где свертка обобщенных функций S и $T \in \mathscr{S}'_+$ определяется по формуле

$$\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S \otimes T, \varphi(x+y) \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{S}$$

где $S \otimes T$ - тензорное (прямое) произведение от функций S и T, которое определено по итерационной формуле дуальности

$$\langle S \otimes T, \varphi(x+y) \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(y), \langle S(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

Здесь использована некорректная, но удобная символика, указывающая по каким переменным совершаются операции - внутренние и внешние скобки дуальности.

Пусть $T = \mathscr{Y}(t)$ - функция Хевисайда. Тогда имеем

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y}(t))(z) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{2\pi\imath tz} dt, Imz > 0 \\ 0, Imz < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi\imath z}, Imz > 0 \\ 0, Imz < 0 \end{cases} = \widehat{\delta_+}(z)$$

т.е. преобразование Коши для обобщенной функции δ_+. Тогда

$$\mathscr{F}(\mathscr{Y})(\xi) = \mathscr{K}\mathscr{F}^+(\mathscr{Y}) - \mathscr{K}\mathscr{F}^-(\mathscr{Y}) = \delta_+(\xi)$$

Итак

$$\mathscr{F}(\mathscr{Y})(\xi) = \delta_+(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}$$

откуда имеем

$$\delta_+(\xi) * \delta_+ = \mathscr{F}(\mathscr{Y})(\xi) * \mathscr{F}(\mathscr{Y})(\xi) = \mathscr{F}([\mathscr{Y}]^2)(\xi) = \mathscr{F}(\mathscr{Y})(\xi) = \delta_+(\xi)$$

Итак

$$\delta_+^{*2} = \delta_+$$

Далее вводим $\delta_- = \delta - \delta_+$, тогда

$$\delta_-^{*2} = (\delta - \delta_+) * (\delta - \delta_+) = \delta - 2\delta_+ + \delta_+ = \delta - \delta_+ = \delta_-$$

Тогда обобщенные функции δ_+ и δ_- порождают сверточные операторы $\{\delta_\pm * \bullet\}$, которые обладают свойствами:

1)$\delta_\pm^{*2} = \delta_\pm$

$2)\delta_+ * \delta_- = 0$
$3)\delta_+ + \delta_- = \delta$

Следовательно эти операторы $\{\delta_\pm * \bullet\}$ являются дополнительными проекторами, посредством которых некоторые пространства обобщенных функций удается представлять в виде прямых сумм подпространств. Например, возьмем пространство $\mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}}$, его можно представлять в следующем виде

$$\mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}} = \delta_+ * \mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}} \oplus \delta_- * \mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}}$$

где свертка δ_+ с любым элементом $T \in \mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}}$ определяется по формуле

$$\langle \delta_+ * T, \varphi \rangle := \langle T, \check{\delta}_+ * \varphi \rangle = \langle T, \delta_- * \varphi \rangle$$

$\forall \varphi \in \mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}}$. Заметим, что $\delta_- * \varphi \in \mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}}$ (в силу регулирующих свойств свертки). Теперь рассмотрим регулярную обобщенную функцию из $\mathscr{S}'_+$, порождаемую функцией $f(t)$ медленного роста, т.е. $\mathscr{Y}(t)f(t)$, тогда имеем

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y}(t)f(t))(z) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty f(t)e^{2\pi\iota tz}dt, Imz > 0 \\ 0, Imz < 0 \end{cases} = \begin{cases} \mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y}(t)f(t))(z), Imz > 0 \\ 0, Imz < 0 \end{cases}$$

откуда

$$\mathscr{F}(\mathscr{Y}f)(\xi) = \delta_+ * (\mathscr{F}f)(\xi) = \mathscr{F}\mathscr{K}^+(\mathscr{Y}f)(\xi), \qquad (\blacklozenge_+)$$

где $\mathscr{F}\mathscr{K}^+(\mathscr{Y}f)(\xi)$ - граничные значения в смысле обобщенных функций для $\mathscr{F}\mathscr{K}^+(\mathscr{Y}f)()$ для $Imz \to +0$, т.е.

$$\langle \mathscr{F}(\mathscr{Y}f)(\xi), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to +0} \int\limits_{\mathbf{R}} \{\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y}(t)f(t))(\xi + \iota\epsilon)\}\varphi(\xi)d\xi, \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

Аналогично, имеем

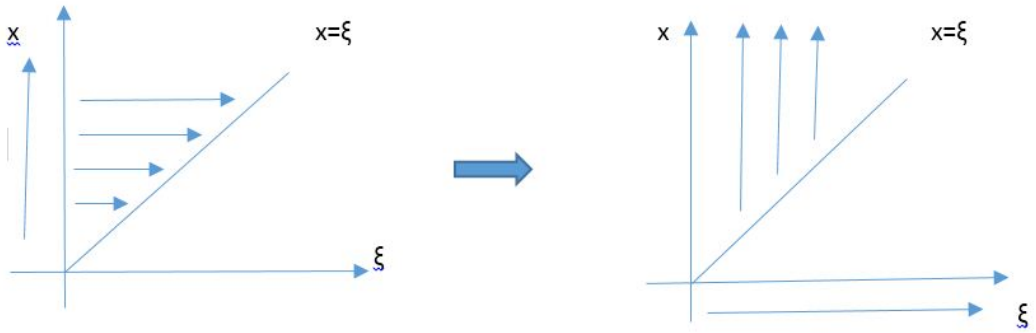
$$\mathscr{F}(\mathscr{Y}(-t))(z) = \begin{cases} 0, Imz > 0 \\ \int\limits_{-\infty}^0 e^{2\pi\iota tz}f(t)dt, Imz < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, Imz > 0 \\ \mathscr{K}\mathscr{F}_-(\mathscr{Y}(-t)f)(z), Imz < 0 \end{cases}$$

Откуда

$$\mathscr{F}(\mathscr{Y}(-t)f(t))(\xi) = \delta_- * (\mathscr{F}f)(\xi) = -\mathscr{F}\mathscr{K}^-(\mathscr{Y}(-t)f)(\xi), \qquad (\blacklozenge_-)$$

При гипотезе регулярности обобщенных функций F и G из $\mathscr{S}'_+$ имеем:

$$F = \mathscr{Y}(x)f(x), \qquad G = \mathscr{Y}(x)g(x)$$



А свертка

$$F * G = \mathscr{Y} \int_0^x g(\xi) f(x-\xi) d\xi = \mathscr{Y} \int_0^x f(\xi) g(x-\xi) d\xi$$

Тогда

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y} f * \mathscr{Y} f)^+(z) = \int_0^\infty e^{2\pi \imath x z} \left\{ \int_0^x f(\xi) g(x-\xi) d\xi \right\} dx =$$

Меняем порядок интегрирования по схеме Дирихле (смотри рисунок):

$$\int_0^\infty f(\xi) d\xi \int_\xi^\infty e^{2\pi \imath x z} g(x-\xi) dx =$$

замена в интеграле по x : $x - \xi = \eta$

$$\int_0^\infty f(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{2\pi \imath (\xi-\eta) z} g(\eta) d\eta = \int_0^\infty e^{2\pi \imath \xi z} f(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{2\pi \imath \eta z} g(\eta) d\eta =$$

$$= \mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y} f)^+(z) \mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y} g)^+(z)$$

Итак

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y} f * \mathscr{Y} f)^+(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y} f)^+(z) \mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y} g)^+(z)$$

откуда

$$\mathscr{F}(\mathscr{Y} f * \mathscr{Y} g)(\xi) = [\delta_+(\mathscr{F} f)(\xi)][\delta_+(\mathscr{F} g)(\xi)] = \mathscr{F}(\mathscr{Y} f)(\xi) \mathscr{F}(\mathscr{Y} g)(\xi)$$

- известное свойство преобразования Фурье о перестановке операций свертка и мультипликативное произведение.

Обобщенная функция $v.p.\frac{1}{t^n}, \forall n \in \mathbf{N}$

Возьмем $(n-1)$ производную от $\frac{1}{t}$, имеем

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\frac{1}{t}) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n}$$

отсюда определим обобщенную функцию $v.p.\frac{1}{t^n}, \forall n \in \mathbf{N}$ следующим образом

$$v.p.\frac{1}{t^n} := \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(v.p.\frac{1}{t}), \qquad (\blacksquare)$$

где $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$ - производная в смысле обобщенных функций.

$$\langle v.p.\frac{1}{t^n}, \varphi\rangle := \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\langle\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(v.p.\frac{1}{t}), \varphi\rangle = \frac{1}{(n-1)!}\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi^{(n-1)}(t)\rangle, \varphi \in \mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$$

Если $\varphi \in \mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$, то $\varphi^{(n-1)} \in \mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$. Отсюда обобщенная функция $v.p.\frac{1}{t^n} \in \mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$, значит существует представление Коши для $v.p.\frac{1}{t^n}$, которое в силу формулы, определяющей $v.p.\frac{1}{t^n}$, имеет вид

$$\widehat{(}v.p.\frac{1}{t^n})(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2z}, Imz > 0\\ -\frac{1}{2z}, Imz < 0\end{array}\right. =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{z^n}, Imz > 0\\ -\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{z^n}, Imz < 0\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2z^n}, Imz > 0\\ -\frac{1}{2z^n}, Imz < 0\end{array}\right.$$

Итак имеем

$$\widehat{(}v.p.\frac{1}{t^n})(z) = \left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2z^n}, Imz > 0\\ -\frac{1}{2z^n}, Imz < 0\end{array}\right.$$

Откуда

$$\langle v.p.\frac{1}{t^n}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}}\{\frac{1}{(t+\iota\epsilon)^n} - \frac{1}{(t-\iota\epsilon)^n}\}\varphi(t)dt, \forall\varphi \in \mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$$

. Иногда последнюю формулу берут в качестве определителя от функции $v.p.\frac{1}{t^n}$.

Далее, учитывая что

$$v.p.\frac{1}{t} = \pi\iota(\delta_- - \delta_+)$$

обобщенную функцию можно представить в виде

$$v.p.\frac{1}{t^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[\pi\iota(\delta_- - \delta_+)] = \frac{(-1)^{n-1}\pi\iota}{(n-1)!}\{\delta_-^{(n-1)} - \delta_+^{(n-1)}\}, \forall n \in \mathbf{N}$$

Поскольку пространство $\mathscr{S}'_+(\mathbf{R})$, снабженное сверткой, является сверточной алгеброй с единицей δ, то пространство $\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{S}'_+)$ функций аналитических в $Imz > 0$ - есть мультипликативная алгебра с единицей, изоморфная сверточной алгебре $\mathscr{S}'_+(\mathbf{R})$. А пространство $\mathscr{F}(\mathscr{S}'_+)$ обобщенных функций на оси $\mathbf{R}$, являющихся граничными значениями (в смысле обобщенные функции из$\mathscr{S}'$) аналитических функций в $Imz > 0$ - есть мультипликативная алгебра обобщенных функций.

Заметим, что $\delta_+ \in \mathscr{F}(\mathscr{S}')_+$, тогда существует мультипликативная степень $\delta_+^n, \forall n \in \mathbf{N}$.

Различные методы решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в пространстве $\mathfrak{D}'_{-1}$

I°

$$U''(t) + pU'(t) + qU(t) = W \qquad W \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}) \tag{1}$$

где p и q -константы из $\mathbf{R}$. Существует ли единственное решение уравнения (1) в $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$? Уравнение (1) можно рассматривать, как уравнение сверток в сверточном модуле $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$, т.е.

$$\delta''(t) + p\delta'(t) + q\delta(t) * U = W \tag{2}$$

Из теории уравнений сверток известно: если элементарное решение $\mathscr{E}(t)$ уравнения (2) принадлежит сверточной алгебре $\mathscr{A} = \theta'_c$ обобщенных функций быстрого убывания, то $\exists!$ решение уравнения (2), которое имеет вид:

$$U = \mathscr{E} * W \tag{3}$$

По определению элементарное решение $\mathscr{E}(t)$ имеем на оси $\mathbf{R}$:

$$\delta''(t) + p\delta'(t) + q\delta(t) * \mathscr{E}(t) = \delta(t) \tag{4}$$

или

$$\mathscr{E}''(t) + p\mathscr{E}'(t) + q\mathscr{E}(t) = \delta(t) \tag{5}$$

Для построения $\mathscr{E}(t) \in \theta'_c$ применяем преобразование $\mathscr{K}\mathscr{F}$. Представляя $\delta(t)$ в следующем виде:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\{\frac{1}{2}sgnt\}$$

имеем

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\delta(t))(z) = (-2\pi\imath z)\mathscr{K}\mathscr{F}(\frac{1}{2}sgnt)(z) = (-2\pi\imath z)\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\int_0^\infty e^{2\pi\imath tz}dt, Imz > 0\\ \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\imath tz}dt, Imz < 0\end{array}\right. =$$

$$= (2\pi\imath z)\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}-\frac{1}{2\pi\imath z}, Imz > 0\\ \frac{1}{2\pi\imath z}, Imz < 0\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}, Imz > 0\\ -\frac{1}{2}, Imz < 0\end{array}\right. \qquad \mathscr{F}(\delta) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Тогда образ уравнения (5) при преобразовании $\mathscr{K}\mathscr{F}$ будет

$$\left\{\begin{array}{c}\{(-2\pi\imath z)^2 + p(-2\pi\imath z) + q\}\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^+(z) = \frac{1}{2}, Imz > 0\\ \{(-2\pi\imath z)^2 + p(-2\pi\imath z) + q\}\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^-(z) = -\frac{1}{2}, Imz < 0\end{array}\right. \tag{6}$$

Из (6) имеем уравнение из $\mathscr{S}'$

$$\{(-2\pi\iota\xi)^2 + p(-2\pi\iota\xi) + q\}\mathscr{F}(\mathscr{E})(\xi) = 1, \qquad \forall\xi \in \mathbf{R} \tag{7}$$

Пусть $-2\pi\iota\xi) = \zeta$. Тогда имеем

$$(\zeta^2 + p\zeta + q)\mathscr{F}(\mathscr{E})(\zeta) = 1$$

$$\zeta^2 + p\zeta + q = 0, \qquad \zeta_{\iota n} = -\frac{p}{2 + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Для единственности решения уравнения (7) необходимо выполнение условий

$$p \neq 0, \qquad q \neq 0 \tag{8}$$

Далее возможны случаи:

1° $\frac{p^2}{4} = q$ тогда $-2\pi\iota\xi = -\frac{p}{2} \Rightarrow \xi_1 = \xi_2 = \frac{p}{4\pi\iota}$

Уравнение (1) имеет вид:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{p}{2}\right)^2 U = W, \tag{9}$$

а уравнение (7) имеет единственное решение

$$\mathscr{F}(\mathscr{E})(\xi) = \frac{1}{(\xi + \frac{p}{2})^2} = \frac{1}{({}_2\pi\iota\xi + \frac{p}{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{-4\pi^2(\xi - \frac{p}{4\pi\iota})^2} = -\frac{1}{4\pi^2(\xi - \frac{p}{4\pi}\iota)^2}, \qquad \forall\xi \in \mathbf{R} \tag{10}$$

Откуда

$$\mathscr{E}(t) = (\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\mathscr{E}) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi + \frac{p}{4\pi}i)^2} d\xi.$$

а) Пусть $p > 0$, тогда

$$\mathscr{E}(t) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi + \frac{p}{4\pi}i)^2} d\xi = -\frac{1}{4\pi^2} 2\pi\iota \begin{cases} t > 0 = \smile -res_{\zeta = \frac{p\iota}{4\pi}} \frac{e^{-2\pi\iota t\zeta}}{(\zeta + \frac{p}{4\pi}\iota)^2} \\ t < 0 = \frown 0 \end{cases}$$

Напомним что

$$res_{\zeta = -\frac{p\iota}{4\pi}} \frac{e^{-2\pi\iota t\zeta}}{(\zeta + \frac{p}{4\pi}\iota)^2} = \lim_{\zeta \to -\frac{p\iota}{4\pi}} \frac{d}{d\zeta}\{e^{-2\pi\iota t\zeta}\} = \lim_{\zeta \to -\frac{p\iota}{4\pi}} \{-2\pi t e^{-2\pi\iota t\zeta}\} = -2\pi t e^{-\frac{pt}{2}}, \qquad t > 0$$

Тогда

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{Y}(t)te^{-\frac{pt}{2}} \in \theta'_c$$

Поэтому $\exists!$ решение уравнения (9) в $\mathscr{S}'\mathbf{R}$ который имеет вид

$$U = \mathscr{Y}(t)te^{-\frac{pt}{2}} * W, \qquad \forall W \in \mathscr{S}'\mathbf{R}$$

b) Пусть $p > 0$. Тогда

$$\mathscr{E}(t) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota t\zeta}}{(\zeta + \frac{p}{4\pi}\iota)^2}d\zeta = -\frac{1}{4\pi^2}2\pi\iota \begin{cases} t > 0 \smile = 0 \\ -te^{-\frac{p}{2}t} \frown, t < 0 \end{cases} =$$

$$= \mathscr{Y}(-t)te^{-\frac{p}{2}t} = -2\pi\iota te^{-\frac{p}{2}t}, \qquad \mathscr{Y}(-t)te^{-\frac{p}{2}t} \in \theta'_c$$

$\Rightarrow \exists!$ решение уравнения (9) в $\mathscr{S}'\mathbf{R}$, которое имеет вид

$$U = -\mathscr{Y}(-t)te^{-\frac{p}{2}t} * W, \qquad \forall W \in \mathscr{S}'\mathbf{R}$$

2°. Пусть $\frac{p^2}{4} > q$, тогда $\xi_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \omega$, где $\omega = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} > 0 \Rightarrow -2\pi\iota\xi = -\frac{p^2}{4} \pm \omega \Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p^2}{4} \pm \omega)$

a)Если $q < 0$, то $\xi_1 = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p^2}{4} + \omega)$ при $Im\xi > 0$, $p > 0$ и $p < 0$; при $Im\xi < 0$, $p > 0$ и $p < 0 \Rightarrow \xi_2 = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p^2}{4} - \omega)$.

b)Если $q > 0$, то $\frac{p^2}{4} > q > 0$. Тогда

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p}{4} + \omega) \in Im\xi < 0, p > 0 \\ \xi_1 = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p}{4} + \omega) \in Im\xi > 0, p < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_2 = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p}{4} - \omega) \in Im\xi < 0, p > 0 \\ \xi_2 = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{q}{4} - \omega) \in Im\xi > 0, p < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\mathscr{E}(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(-2\pi\iota t\xi)^2 + p(-2\pi\iota t\xi) + q}d\xi = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi - \xi_1) + (\xi - \xi_2)}d\xi$$

c) В случае $q < 0$ имеем $\xi_1 = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p}{4} + \omega)$ в верхней полуплоскости $\forall p \neq 0$, $\xi_2 = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p}{4} - \omega)$ в нижней полуплоскости $\forall p \neq 0$

$$\mathscr{E}(t) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi + \xi_1) + (\xi - \xi_2)}d\xi =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}2\pi\iota \left\{ \begin{array}{r} t>0 \smile = -res_{\xi=\xi_2}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)} \\ t>0 \frown = res_{\xi=\xi_2}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)} \end{array} \right. =$$

$$= \frac{1}{2\pi\iota}\left\{ \begin{array}{r} -\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi_2-\xi_1)}, t>0 \\ \frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi_1-\xi_2)}, t<0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{r} -\frac{e^{-2\pi\iota t[\frac{1}{2\pi}(-\frac{p}{2}-\omega)]}}{-\frac{\iota\omega}{\pi}}, t>0 \\ \frac{e^{-2\pi\iota t[\frac{1}{2\pi}(-\frac{p}{2}+\omega)]}}{\frac{\iota\omega}{\pi}}, t<0 \end{array} \right. =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\iota}\left\{ \begin{array}{r} e^{-t^2(\frac{p}{2}+\omega)}, t>0 \\ e^{t(-\frac{p}{2}+\omega}, t<0 \end{array} \right. \qquad (\blacksquare)$$

Тогда $\exists!$ решение уравнения (1) вида

$$U = \mathscr{E}(t) * W, \forall W \in \mathscr{S}'\mathbf{R}$$

где $\mathscr{E}(t)$ имеет вид ($\blacksquare$).

d)В случае $q>0$ имеем $\xi_1 = \frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p}{2}+\omega)$ в нижней полуплоскости при $p>0$ и в верхней полуплоскости при $p<0$. Тогда

$$\mathscr{E}(t) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi+\xi_1)+(\xi-\xi_2)}d\xi =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}2\pi\iota \left\{ \begin{array}{r} t>0 \smile = -\{res_{\xi=\xi_1}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)} + res_{\xi=\xi_2}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)+(\xi-\xi_2)}\} \\ t<0 \frown = 0 \end{array} \right.$$

Пусть $p>0$, тогда

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2\pi\iota}\left\{ \begin{array}{r} t>0 \smile = -\{\frac{e^{-2\pi\iota t(\xi_1)}}{\frac{\iota\omega}{\pi}} + \frac{e^{-2\pi\iota t(\xi_1)}}{-\frac{\iota\omega}{\pi}}\} \\ t<0 \frown = 0 \end{array} \right. =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left\{ \begin{array}{r} e^{-2\pi\iota t(\frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p}{2}+\omega))} - e^{-2\pi\iota t(\frac{\iota}{2\pi}(-\frac{p}{2}-\omega))}, t>0 \\ o, t<0 \end{array} \right. =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\mathscr{Y}(t)\{e^{t(-\frac{p}{2}+\omega)} - e^{t(-\frac{p}{2}-\omega)}\} = \frac{\mathscr{Y}(t)}{\omega}e^{-\frac{p}{2}t}sh\omega t \in \theta'_c$$

$\Rightarrow \exists!$ решение уравнения $\forall W \in \mathfrak{D}'_{-1}$, которое имеет вид

$$U = \frac{\mathscr{Y}(t)}{\omega}e^{-\frac{p}{2}t}sh\omega t * W.$$

e) Пусть $p=0$, тогда из условия $\frac{p^2}{4} = q$ имеем $q<0$. Исходное уравнение примет вид

$$U'' + qU = W \in \mathfrak{D}'_{-1}$$

тогда $\xi_1 = \frac{\iota\omega}{2\pi}$ в верхней полуплоскости и $\xi_1 = -\frac{\iota\omega}{2\pi}$ в нижней полуплоскости

$$\mathscr{E}(t) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi+\xi_1)(\xi-\xi_2)}d\xi =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}2\pi\iota \begin{cases} \smile = -res_{\xi=\xi_2}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}, t>0 \\ \frown = res_{\xi=\xi_2}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}, t<0 \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\iota}\begin{cases} -\frac{e^{-2\pi\iota t(-\frac{\iota\omega}{2\pi})}}{-\frac{\iota\omega}{\pi}}, t>0 \\ \frac{e^{-2\pi\iota t(\frac{\iota\omega}{2\pi})}}{\frac{\iota\omega}{\pi}}\}, t<0 \end{cases} = -\frac{1}{2\omega}\begin{cases} e^{-t\omega}, t>0 \\ e^{t\omega}, t<0 \end{cases} = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega|t|} \in \theta_c'(\mathbf{R})$$

следовательно $\exists!$ решение в $\mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$ уравнения $U'' + qU = W \in \mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$, где $q<0$, которое имеет вид: $U = -\frac{1}{2\pi}e^{-\omega|t|} * W$

3° При $\frac{p^2}{4} < q$ $\zeta_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \iota\omega_1$, где $\omega_1 = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0 \Rightarrow -2\pi\xi = -\frac{p}{2} \pm \iota\omega_1 \Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{1}{2\pi}(-\frac{\iota p}{2} \mp \omega_1)$

а) Пусть $p>0$, тогда $\begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{2\pi}(-\frac{\iota p}{2} - \omega_1) \\ \xi_2 = \frac{1}{2\pi}(-\frac{\iota p}{2} + \omega_1) \end{cases}$
в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.
$\Rightarrow$

$$\mathscr{E}(t) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi+\xi_1)(\xi-\xi_2)}d\xi =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}2\pi\iota \begin{cases} \smile = -\{res_{\xi=\xi_1}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)} + res_{\xi=\xi_2}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}\}, t>0 \\ \frown = 0, t<0 \end{cases} =$$

то

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2\pi\iota}\begin{cases} \frac{e^{-2\pi\iota t(\frac{1}{2\pi}(-\frac{\iota p}{2}-\omega_1))}}{\frac{\omega_1}{\pi}} - \frac{e^{-2\pi\iota t((-\frac{\iota p}{2}+\omega_1)\frac{1}{2\pi})}}{\frac{\omega_1}{\pi}} \\ t<0 \end{cases}$$

$$\mathscr{E}(t) = \frac{\mathscr{Y}(t)}{\omega_1}\{\frac{e^{-\iota t(-\frac{\iota p}{2}-\omega_1)} - e^{-\iota t(-\frac{\iota p}{2}+\omega_1)}}{2\iota}\} = \frac{\mathscr{Y}(t)e^{-\frac{p}{2}t}}{\omega_1}\sin\omega_1 t \in \theta_c'$$

следовательно $\exists!$ решение уравнения

$$U'' + pU' + qU = W \in \mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$$

где $\frac{p^2}{4} < q$ и $p>0$

b) Пусть $p<0$, тогда $\xi_1=\frac{1}{2\pi}(-\frac{\iota p}{2}-\omega_1)$, $\xi_2=\frac{1}{2\pi}(-\frac{\iota p}{2}+\omega_1)$ в верхней полуплоскости. Следовательно

$$\mathscr{E}(t)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbf{R}}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi+\xi_1)(\xi-\xi_2)}d\xi=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}2\pi\iota\left\{\begin{array}{r}\smile=0,t>0\\ \frown=res_{\xi=\xi_1}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}+res_{\xi=\xi_2}\frac{e^{-2\pi\iota t\xi}}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)},t<0\ \frown\end{array}\right.=$$

$$=\left\{\begin{array}{r}0,t>0\\ \frac{e^{-2\pi\iota t(\frac{1}{2\pi}(-\frac{\iota p}{2}-\omega_1))}}{-\frac{\omega_1}{\pi}}+\frac{e^{-2\pi\iota t((-\frac{\iota p}{2}+\omega_1)\frac{1}{2\pi})}}{\frac{\omega_1}{\pi}},t<0\end{array}\right.=$$

$$=\frac{\mathscr{Y}(-t)}{\omega_1}\{\frac{e^{t(-\frac{p}{2}+\iota\omega_1 t)}+e^{t(-\frac{p}{2}-\iota\omega_1 t)}}{2\iota}\}=-\frac{\mathscr{Y}(-t)e^{-\frac{p}{2}t}}{\omega_1}\sin\omega_1 t\in\theta_c'$$

поэтому $\exists!$ решение уравнения

$$U''+pU'+qU=W\in\mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}},$$

которое имеет вид

$$\mathscr{E}(t)=-\frac{\mathscr{Y}(-t)e^{-\frac{p}{2}t}\sin\omega_1 t}{\omega_1}*W\in\mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}}.$$

c) Пусть $p=0$, тогда в силу $\frac{p^2}{4}<q$ имеем $q>0$. Тогда $\xi_{1,2}=\mp\frac{\omega_1}{2\pi}$, где $\omega_1^*=\sqrt{q}$ т.е. ξ_1 и ξ_2 лежат на оси $\mathbf{R}$ и уравнение $U''+qU=W\in\mathfrak{O}'_{-\mathbf{1}}$ при $q>0$ не имеет единственного решения.

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \omega_2 U = W \in \mathfrak{D}'_{-1}(\mathbf{R}) \tag{1}$$

$$(\frac{d^2\delta}{dt^2} + \omega_2\delta) * U = W \in \mathfrak{D}'_{-1}(\mathbf{R}) \tag{2}$$

$$\begin{cases} \delta_+^n = \frac{1}{(2\pi\iota)^{n-1}(n-1)!}\delta_+^{(n-1)}, n = 1, 2... \\ \delta_-^n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi\iota)^{n-1}(n-1)!}\delta_-^{(n-1)}, n = 1, 2... \end{cases}$$

Пусть $n = 3$, тогда

$$\begin{cases} \delta_+^{(2)} = (2\pi\iota)^2(2)!\delta_+^3, \\ \delta_-^{(2)} = (2\pi\iota)^2(2)!\delta_-^3. \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \delta_+^{(2)} + \delta_-^{(2)} = (2\pi\iota)^2 2\{\delta_+^3 + \delta_-^3\}, \tag{$\triangle$}$$

$$\delta = \delta_+ + \delta_-, \tag{$\triangledown$}$$

Выполним операцию $1(\triangle) + \omega^2(\triangledown)$ получим

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \omega^2\delta = (2\pi\iota)^2 2(\delta_+)^3 + (2\pi\iota)^3 2(\delta_-)^2 + \omega^2\delta_- = 2(2\pi\iota)^2\{\delta_+^3 + \delta_-^3\} + \omega^2\{\delta_+ + \delta_-\}$$

Тогда (2) представимо в виде

$$\{2(2\pi\iota)^2\{\delta_+^3 + \delta_-^3\} + \omega^2\{\delta_+ + \delta_-\}\} * U = W \in \mathfrak{D}'_{-1}(\mathbf{R}) \tag{3}$$

Применяя проекторы $\delta_\pm$ к (3) имеем

$$\{2(2\pi\iota)^2[\delta_+^3 + \delta_-^3] * \delta_+ + \omega^2\delta_+\} * U = \delta_+ * W \tag{4+}$$

$$\{2(2\pi\iota)^2[\delta_+^3 + \delta_-^3] * \delta_- + \omega^2\delta_-\} * U = \delta_- * W \tag{4$-$}$$

но

1) $\delta_+^3 * \delta_+ = \frac{1}{2(2\pi\iota)^2}\delta^{(2)} * \delta_+ = \frac{1}{2(2\pi\iota)^2}\delta^{(2)} * \delta_+ * \delta_+ = \frac{1}{2(2\pi\iota)^2}\delta_+^{(2)}$

2) $\delta_-^3 * \delta_+ = \frac{1}{2(2\pi\iota)^2}\delta_-^{(2)} * \delta_+ = 0$

3) $\delta_+^3 * \delta_- = \frac{1}{2(2\pi\iota)^2}\delta_+^{(2)} * \delta_- = 0$

4) $\delta_-^3 * \delta_- = \frac{1}{2(2\pi\iota)^2}\delta_-^{(2)} * \delta_- = \frac{1}{2(2\pi\iota)^2}\delta_-^{(2)}$

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{c}\{\delta_+ + \omega^2\delta_+\} * U = \delta_+ * W \\ \{\delta_- + \omega^2\delta_-\} * U = \delta_- * W\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2}{dz^2}\widehat{U}^+(z) + \omega^+\widehat{U}^+(z) = \widehat{W}^+(z), Imz > 0, \\ \frac{d^2}{dz^2}\widehat{U}^-(z) + \omega^+\widehat{U}^-(z) = \widehat{W}^-(z), Imz < 0.\end{array}\right.$$

или

N.B.

$$1) \qquad (\frac{d^2\delta}{dt^2} + \omega^2\delta) * (\delta_+ * U) = \delta_+ * W \qquad (\bigstar)$$

либо

2) $\delta_+ * \{[\frac{d^2U}{dt^2} + \omega^2U] - W\} = 0 \Rightarrow \qquad \frac{d^2U}{dt^2} + \omega^2U = W$ в $\mathfrak{D}'_{-1}$ т.е. мы пришли к тому с чего начали.

Рассмотрим уравнение сверток ($\bigstar$) в сверточном модуле $\delta_+ * \mathfrak{D}'_{-1}$. Найдем элементарные решения E_+ уравнения ($\bigstar$):

$$E_+ = \mathscr{Y}(t)\frac{\sin\omega}{\omega}t + c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t$$

и ни при каких $c_1, c_2 \qquad E_+$ не принадлежит сверточной алгебре $\delta_+ * \mathscr{A}$.

Аналогично:

$$(\frac{d^2\delta}{dt^2} + \omega^2\delta) * (\delta_- * U) = \delta_- * W$$

Итак, уравнение $\frac{d^2U}{dt^2} + \omega^2U = W$ в $\mathfrak{D}'_{-1}$ не имеет решения.

Рассмотрим другой пример.

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \omega^2U = W \in \mathfrak{D}'_{-1} \qquad (1)$$

где ω- константа, $t > 0$.

Тогда

$$(\frac{d^2\delta}{dt^2} - \omega^2\delta) * \left\{\begin{array}{l}\delta_+ * U \\ \delta_- * U\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\delta_+ * W \\ \delta_- * W\end{array}\right\}$$

Элементарное решение оператора $(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2)$ имеет вид

$$E = \frac{\mathscr{Y}(t)}{\omega}\operatorname{sh}\omega t + c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t}$$

и, если $c_2 = 0$ а $c_1 = -\frac{1}{2}\omega$, то имеем элементарное решение

$$\mathscr{E}(t) = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega(t)} \in \mathscr{A}$$

поэтому $\exists!$ решение уравнения (1) в $\mathfrak{O}'_{-1}$, которое имеет вид

$$U = \mathscr{E}(t) * W$$

Попробуем найти $\mathscr{E}(t)$ иным методом. По определению $\mathscr{E}(t)$ имеем

$$\frac{d^2\mathscr{E}}{dt^2} - \omega^2\mathscr{E} = \delta$$

Далее

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2\widehat{\mathscr{E}}^+(z)}{dz^2} - \omega^2\widehat{\mathscr{E}}^+(z) = -\frac{1}{2\pi\imath z}, Imz > 0 \\ \frac{d^2\widehat{\mathscr{E}}^-(z)}{dz^2} - \omega^2\widehat{\mathscr{E}}^-(z) = -\frac{1}{2\pi\imath z}, Imz > 0 \end{array}\right\}$$

И напомним

$$(\frac{d^2\delta}{dt^2} - \omega^2\delta) * (\delta_+ * \mathscr{E}) = \delta_+ \qquad (+)$$

$$(\frac{d^2\delta}{dt^2} - \omega^2\delta) * (\delta_- * \mathscr{E}) = \delta_- \qquad (-)$$

Тогда элементарное решение оператора $(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2)$ есть:
$E = \frac{\mathscr{Y}(t)}{\omega}\operatorname{sh}\omega t + c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t}$ не принадлежит $\mathscr{A}$,
но при $c_1 = 0$ и $c_2 = -\frac{1}{2\omega}$ имеем

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega(t)} \in \mathscr{A}$$

$\exists!$ решение $(\pm)$

$$\delta_+ * \mathscr{E} = \delta_+ * -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega(t)}$$

$$\delta_- * \mathscr{E} = \delta_- * -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega(t)}$$

Откуда

$$\mathscr{E} = \delta_+ * \mathscr{E} + \delta_- * \mathscr{E} = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega(t)}$$

Тогда существует единственное решение уравнения (1), которое имеет вид

$$U = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega(t)} * W \in \mathfrak{O}'_{-1}$$

тогда

$$\widehat{U}(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle U, \frac{1}{t-z}\rangle, Imz \neq 0$$

дает решение краевой задачи

$$\frac{d^2}{dt^2}(\widehat{U}^+ - \widehat{U}^-) - \omega^2(\widehat{U}^+ - \widehat{U}^-) = W,$$

исчезающее на бесконечности.

Аналитическое представление для обобщенных функций $T \in \mathfrak{O}'_{-1}$ через преобразования Карлемана-Фурье и копреобразования Фурье

Пусть $T \in \mathfrak{O}'_{-1}(\mathbf{R})$, тогда $T = \delta_+ * T \oplus \delta_- * T$

$$\widehat{T}(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle T, \frac{1}{t-z}\rangle, Imz \neq 0,$$

но

$$T = \mathscr{F}[\mathscr{Y}(\xi)\overline{\mathscr{F}}(T)] + \mathscr{F}[\mathscr{Y}(-\xi)\overline{\mathscr{F}}(T)] = \mathscr{F}[\mathscr{Y}(\xi)\overline{\mathscr{F}}(T) + \mathscr{Y}(-\xi)\overline{\mathscr{F}}(T)]$$

$\Rightarrow$

$$\widehat{T}(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle \mathscr{F}[\mathscr{Y}(\xi)\overline{\mathscr{F}}(T) + \mathscr{Y}(-\xi)\overline{\mathscr{F}}(T)], \frac{1}{t-z}\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi\iota}\langle \mathscr{Y}(\xi)\overline{\mathscr{F}}(T), \mathscr{F}\frac{1}{t-z}\rangle + \frac{1}{2\pi\iota}\langle \mathscr{Y}(-\xi)\overline{\mathscr{F}}(T), \mathscr{F}\frac{1}{t-z}\rangle =$$

$$= \begin{cases} \mathscr{F}\frac{1}{t-z}(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{2\pi\iota t\xi}}{t-z}dt = (\xi > 0) = 2\pi\iota \begin{cases} \frown = e^{2\pi\iota\xi z}, Imz > 0 \\ \smile = 0, Imz < 0 \end{cases} \\ \mathscr{F}\frac{1}{t-z}(\xi) = 2\pi\iota e^{2\pi\iota\xi z}, \xi > 0, Imz > 0 \\ \mathscr{F}\frac{1}{t-z}(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{2\pi\iota t\xi}}{t-z}dt = (\xi < 0) = 2\pi\iota \begin{cases} \frown = 0, Imz > 0 \\ \smile = e^{2\pi\iota\xi z}, Imz < 0 \end{cases} \\ \mathscr{F}\frac{1}{t-z}(\xi) = -2\pi\iota e^{2\pi\iota\xi z}, \xi < 0, Imz < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{T}(z) = \langle \mathscr{Y}(\xi)\overline{\mathscr{F}}(T)(\xi), e^{2\pi\iota\xi z}\rangle = \langle \mathscr{Y}(-\xi)\overline{\mathscr{F}}(T)(\xi), e^{2\pi\iota\xi z}\rangle =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^\infty \overline{\mathscr{F}}(T)(\xi)e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz > 0 \\ -\int\limits_{-\infty}^0 \overline{\mathscr{F}}(T)(\xi)e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz < 0 \end{cases}$$

Итак, имеем $\forall T \in \mathfrak{O}'_{-1}$

$$\widehat{T}(z) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \overline{\mathscr{F}}(T)(\xi)e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz > 0 \\ -\int\limits_{-\infty}^0 \overline{\mathscr{F}}(T)(\xi)e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz < 0 \end{cases}$$

Или $\forall T \in \mathfrak{O}'_{-1}$

$$\widehat{T}(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle T, \frac{1}{t-z}\rangle = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \overline{\mathscr{F}}(T)(\xi)e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz > 0 \\ -\int\limits_{-\infty}^0 \overline{\mathscr{F}}(T)(\xi)e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz < 0 \end{cases} \qquad (\blacklozenge)$$

Это представление Коши для обобщенной функции $T \in \mathfrak{O}'_{-1}$ выражена через преобразование Карлемана-Фурье от $\overline{\mathscr{F}}(T)$.

Примеры:

1° Пусть $T = v.p.\frac{1}{t}$, тогда $\overline{\mathscr{F}}(T) = -\pi\iota sgn\xi = -\pi\iota\{\mathscr{Y}(\xi) - \mathscr{Y}(-\xi)\}$. Поэтому формула $(\blacklozenge)$ дает

$$\widehat{T}(z) = \widehat{(v.p.\frac{1}{t})}(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle v.p.\frac{1}{t}, \frac{1}{t-z}\rangle = -\pi\iota \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz > 0 \\ \int\limits_{-\infty}^0 e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz < 0 \end{cases} =$$

$$= -\pi\iota \begin{cases} -\frac{1}{2\pi\iota z}, Imz > 0 \\ \frac{1}{2\pi\iota z}, Imz < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2z}, Imz > 0 \\ -\frac{1}{2z}, Imz < 0 \end{cases}$$

Итак:

$$\widehat{(v.p.\frac{1}{t})}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z}, Imz > 0 \\ -\frac{1}{2z}, Imz < 0 \end{cases}$$

2° $T = \delta \Rightarrow \overline{\mathscr{F}}(\delta) = 1, \forall \xi \in \mathbf{R}$

$$\widehat{\delta}(z) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz > 0 \\ -\int\limits_{-\infty}^0 e^{2\pi\iota\xi z}d\xi, Imz < 0 \end{cases} = -\frac{1}{2\pi\iota z}, Imz \neq 0$$

3° $(v.p.\frac{1}{t})(z) =?$

имея $v.p.\frac{1}{t} = (\delta- - \delta+)\pi\iota$

$$\widehat{(v.p.\frac{1}{t})}(z) = \pi\iota\{\widehat{\delta-}(z) - \widehat{\delta+}(z)\} = \pi\iota\left\{\begin{matrix} 0, Imz > 0 \\ -\frac{1}{2\pi\iota z}, Imz < 0 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} -\frac{1}{2\pi\iota z}, Imz > 0 \\ 0, Imz < 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \pi\iota \begin{cases} \frac{1}{2\pi\iota z}, Imz > 0 \\ -\frac{1}{2\pi\iota z}, Imz < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2z}, Imz > 0 \\ -\frac{1}{2\ z}, Imz < 0 \end{cases}$$

Итак:

$$\widehat{(v.p.\frac{1}{t})}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z}, Imz > 0 \\ -\frac{1}{2\ z}, Imz < 0 \end{cases}$$

4° $\widehat{(\tau_a\delta_+)}(z) =?\forall a \in \mathbf{R}$, где $\tau_a\varphi := \varphi(t-a)$ определен

$$\widehat{(\tau_a\delta_+)}(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle\tau_a\delta_+, \frac{1}{t-z}\rangle$$

Из лекций УЧП нам известно, что

$$\overline{\mathscr{F}}(\tau_a\delta_+)(z) = \overline{\chi}_a(\xi)\mathscr{Y}(\xi) = e^{-2\pi\iota\xi a}\mathscr{Y}(\xi)$$

Тогда

$$\widehat{(\tau_a\delta_+)}(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle\mathscr{F}[e^{-2\pi\iota\xi a}\mathscr{Y}(\xi)], \frac{1}{t-z}\rangle = \frac{1}{2\pi\iota}\langle e^{-2\pi\iota\xi a}\mathscr{Y}(\xi), \mathscr{F}[\frac{1}{t-z}](\xi)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi\iota}\langle e^{-2\pi\iota\xi a}\mathscr{Y}(\xi), 2\pi\iota e^{2\pi\iota\xi a}\rangle$$

где $Imz > 0$, т.е.

$$\widehat{(\tau_a\delta_+)}(z) = \int_0^\infty e^{2\pi\iota\xi(z-a)}d\xi, Imz > 0, \forall a \in \mathbf{R}$$

или

$$\widehat{(\tau_a\delta_+)}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi\iota(z-a)}, Imz > 0 \\ 0, Imz < 0 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbf{R}$

5° $\widehat{(\tau_a\delta_-)}(z) =?, \forall a \in \mathbf{R}$

Имеем аналогично

$$\widehat{(\tau_a\delta_+)}(z) = \begin{cases} 0, Imz > 0 \\ -\frac{1}{2\pi\iota(z-a)}, Imz < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \omega^2 U = W \tag{1}$$

в $\mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$ где $\omega > 0$. Существует ли единственное решение в $\mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$

I. Ищем элементарное решение методом Коши. **"e"**

$$\mathbf{e}'' - \omega^{\mathbf{2}}\mathbf{e} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{e}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{e}'(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$$

$$\lambda^2 = \omega^2, \qquad \lambda_{1,2} = \pm\omega \qquad \mathbf{e} = \mathbf{A}\operatorname{ch}\omega\mathbf{t} + \mathbf{B}\operatorname{sh}\omega\mathbf{t} \Rightarrow$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{0}) = \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{e}'(\mathbf{0}) = \mathbf{B}\omega = \mathbf{1} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{1}}{\omega}$$

т.е.

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\omega}\operatorname{sh}\omega\mathbf{t}$$

$\Rightarrow$

$$E_+(t) = \mathscr{Y}(t)\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega} \in \mathscr{D}'_+$$

$\Rightarrow$

$$\mathscr{E}(t) = E_+(t) - \frac{1}{2\omega}e^{\omega t} = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega|t|} \in \theta'_c \subset \mathscr{A}$$

Следовательно, существует единственное решение уравнения (1)

$$U = \mathscr{E}(t) * W \in \mathfrak{D}'_{-\mathbf{1}}$$

Итак

$$U = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega|t|} * W$$

Если

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\omega}\operatorname{sh}\omega\mathbf{t}$$

и

$$E_- = -\mathscr{Y}(-t)\mathbf{e}(\mathbf{t}) = -\mathscr{Y}(-\mathbf{t})\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\omega}\operatorname{sh}\omega\mathbf{t} \in \mathscr{D}'_-$$

Тогда

$$\mathscr{E}(t) = E_-(t) - \frac{1}{2\omega}e^{-\omega t} = \begin{cases} -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega t} \\ -\frac{1}{2\omega}e^{\omega t} \end{cases} = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega|t|} \in \mathscr{A}$$

Пришли мы к тому же.

II. Метод преобразования Фурье для отыскания элементарного решения.

Применим преобразования Фурье к $\frac{d^2\mathscr{E}}{dt^2} - \omega^2\mathscr{E} = \delta$ имеем

$$\{(-2\pi\iota\xi)^2 - \omega^2\}\mathscr{F}(\mathscr{E})(\xi) = 1$$

или

$$\{(2\pi\iota\xi)^2 + \omega^2\}\mathscr{F}(\mathscr{E})(\xi) = -1, \forall\xi \in \mathbf{R}$$

$$\mathscr{E}(x) = \overline{\mathscr{F}}\{\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\xi^2 + (\frac{\omega}{2\pi})^2}\}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\overline{\mathscr{F}}\{\frac{1}{\xi^2 + (\frac{\omega}{2\pi})^2}\}(x)$$

$$\overline{\mathscr{F}}\{\frac{1}{\xi^2 + (\frac{\omega}{2\pi})^2}\}(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2\pi\iota\xi x}}{\xi^2 + (\frac{\omega}{2\pi})^2}\}d\xi = 2\pi\iota \left\{ \begin{array}{c} x < 0 :\smile -res_{\xi=-\frac{\iota\omega}{2\pi}}\frac{e^{-2\pi\iota\xi x}}{\xi^2+(\frac{\omega}{2\pi})^2}\} \\ x < 0 :\frown res_{\xi=-fraci\omega 2\pi}\frac{e^{-2\pi\iota\xi x}}{\xi^2+(\frac{\omega}{2\pi})^2}\} \end{array} \right. =$$

$$= 2\pi\iota \left\{ \begin{array}{c} \frac{e^{-\omega\xi x}}{\iota\omega}\} \\ \frac{e^{\omega\xi x}}{\omega}\} \end{array} \right. = \frac{2\pi^2}{\omega}e^{-\omega|x|}$$

Тогда

$$\mathscr{E}(x) = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega|x|} \in \theta_c'$$

III. Метод преобразования Карлемана-фурье.

Найдем образ мера Дирака δ применив преобразование Карлемана-Фурье

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\delta)(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}[\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}sgnt)](z) = \frac{1}{2}(-2\pi\iota z)\mathscr{K}\mathscr{F}(sgnt)(z) =$$

$$= \frac{1}{2}(-2\pi\iota z)\left\{ \begin{array}{c} \int\limits_0^\infty e^{2\pi\iota tz} \\ \int\limits_{-\infty}^0 e^{2\pi\iota tz} \end{array} \right. = \frac{1}{2}(-2\pi\iota z)\left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2\pi\iota z} \\ \frac{1}{2\pi\iota z} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}, Imz > 0 \\ -\frac{1}{2}, Imz < 0 \end{array} \right.$$

Тогда

$$\{(-2\pi\iota z)^2 - \omega^2\}\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}(\delta)(z), Imz \neq 0$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(2\pi z)^2 + \omega^2\}\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^+(z) = -\frac{1}{2}, Imz > 0 \\ \{(2\pi z)^2 + \omega^2\}\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^-(z) = \frac{1}{2}, Imz < 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \mathscr{F}(\mathscr{E})(x)\{(2\pi x)^2 + \omega^2\} = -1$$

И далее как в пункте II.

Вспомним

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(-\frac{1}{2\omega}e^{-\omega|x|})(z)=-\frac{1}{2\omega}\mathscr{K}\mathscr{F}(e^{-\omega|x|})(z)=-\frac{1}{2\omega}\left\{\begin{array}{l}\int\limits_0^{\infty}e^{2\pi\iota tz}e^{-\omega t}dt, Imz>0\\ -\int\limits_{-\infty}^{0}e^{2\pi\iota tz}e^{\omega t}dt, Imz<0\end{array}\right.=$$

$$=-\frac{1}{2\omega}\left\{\begin{array}{l}\int\limits_0^{\infty}e^{2\pi\iota t(z+\frac{\iota\omega}{2\pi}}dt, Imz>0\\ -\int\limits_{-\infty}^{0}e^{2\pi\iota t(z-\frac{\iota\omega}{2\pi}}dt, Imz<0\end{array}\right.=-\frac{1}{2\omega}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2\pi\iota(z+\frac{\iota\omega}{2\pi})}, Imz>0\\ -\frac{1}{2\pi\iota(z-\frac{\iota\omega}{2\pi})}, Imz<0\end{array}\right.=$$

$$=\frac{1}{4\omega\pi\iota}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{z+\frac{\iota\omega}{2\pi}}, Imz>0\\ \frac{1}{z-\frac{\iota\omega}{2\pi}}, Imz<0\end{array}\right.$$

Итак

$$\widehat{\mathscr{F}(-\frac{1}{2\omega})e^{-\omega|x|}}(z)=\frac{1}{4\omega\pi\iota}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{z+\frac{\iota\omega}{2\pi}}, Imz>0\\ \frac{1}{z-\frac{\iota\omega}{2\pi}}, Imz<0\end{array}\right.$$

или

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})(z)=\frac{1}{4\omega\pi\iota}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{z+\frac{\iota\omega}{2\pi}}, Imz>0\\ \frac{1}{z-\frac{\iota\omega}{2\pi}}, Imz<0\end{array}\right.$$

Вопрос, как этот $\Uparrow$ результат получен из этого $\Downarrow$?

$$\left\{\begin{array}{l}\{(2\pi z)^2+\omega^2\}\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^+(z)=-\frac{1}{2}, Imz>0\\ \{(2\pi z)^2+\omega^2\}\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^-(z)=\frac{1}{2}, Imz<0\end{array}\right.$$

так

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^+(z)=\frac{-\frac{1}{2}+a_0+a_1z}{(2\pi z)^2+\omega^2}=\frac{-\frac{1}{2}+a_0+a_1z}{(2\pi)^2(z^2+(\frac{\omega}{2\pi})^2)}=\frac{-\frac{1}{2}+a_0+a_1z}{(2\pi)^2(z+\frac{\omega}{2\pi})(z-\frac{\omega}{2\pi})}=$$

$$=\frac{1}{z-\frac{\omega}{2\pi}}\frac{-\frac{1}{2}+a_0+a_1z}{(2\pi)^2\frac{2\iota\omega^2}{2\pi}}\Longrightarrow-\frac{1}{2}+a_0+a_1\frac{\iota\omega}{2\pi}=0\Longrightarrow-\frac{1}{2}+a_0=-a_1\frac{\iota\omega}{2\pi}$$

тогда

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^+(z)=\frac{a_1(z-\frac{\iota\omega}{2\pi})}{(2\pi)^2(z+\frac{\omega}{2\pi})(z-\frac{\iota\omega}{2\pi})}=\frac{a_1}{(2\pi)^2(z+\frac{\iota\omega}{2\pi})}, Imz>0$$

И

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^-(z)=\frac{-\frac{1}{2}+a_0+a_1z}{(2\pi)^2(z+\frac{\omega}{2\pi})(z-\frac{\omega}{2\pi})}=\frac{1}{z-\frac{\omega}{2\pi}}\frac{\frac{1}{2}+a_0-a_1\frac{\iota\omega}{2\pi}}{-\frac{2\iota\omega^2}{2\pi}(2\pi)^2}\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}+a_0-a_1\frac{\iota\omega}{2\pi}=0 \qquad\qquad (2)-\tfrac{1}{2}+a_0+a_1\tfrac{\iota\omega}{2\pi}=0(1)\Longrightarrow$$

(1)-(2):

$$-1+2a_1\frac{\iota\omega}{2\pi}=0,\Longrightarrow -1+a_1\frac{\iota\omega}{\pi}=0\Longrightarrow a_1=\frac{\pi}{\iota\omega}$$

Тогда

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^{+}(z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\pi}{\iota\omega}\frac{1}{z+\frac{\iota\omega}{2\pi}},Imz>0$$

и

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})^{=}(z)=\frac{a_1}{(2\pi)^2(z-\frac{\iota\omega}{2\pi})}=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\pi}{\iota\omega}\frac{1}{z-\frac{\iota\omega}{2\pi}},Imz<0$$

то

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{E})(z)=\frac{1}{4\omega\pi\iota}\begin{cases}\frac{1}{z+\frac{\iota\omega}{2\pi}},Imz>0\\ \frac{1}{z-\frac{\iota\omega}{2\pi}},Imz<0\end{cases}$$

Откуда

$$\mathscr{F}(\mathscr{E})(x)=\frac{1}{4\omega\pi\iota}[\frac{1}{x+\frac{\iota\omega}{2\pi}}-\frac{1}{x-\frac{\iota\omega}{2\pi}}]=\frac{1}{4\omega\pi\iota}\frac{-\frac{2\iota\omega}{2\pi}}{(x)^2-(\frac{\iota\omega}{2\pi})^2}=-\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{(x)^2-(\frac{\iota\omega}{2\pi})^2}$$

и далее как в пункте II.

VI.$\{2(2\pi\iota)^2(\delta_+^3+\delta_-^3)-\omega^2\delta\}*U=W\in\mathfrak{O}'_{-1}$

Применим проекционный метод. Умножая (сверточно) уравнение на δ_- и δ_+ получаем

$$\begin{cases}\{2(2\pi\iota)^2\delta_+^3-\omega^2\delta_+\}*\widehat{U^+}=\widehat{W^+}\\ \{2(2\pi\iota)^2\delta_-^3-\omega^2\delta_-\}*\widehat{U^-}=\widehat{W^-}\end{cases}$$

Применим копреобразование Фурье

т.к.$\delta_+=\mathscr{F}(\mathscr{Y})$, то $\overline{\mathscr{F}}=\mathscr{Y}(t)$

$$\delta_+^2=\mathscr{F}(\mathscr{Y})\mathscr{F}(\mathscr{Y})=\mathscr{F}(\mathscr{Y}*\mathscr{Y})=\mathscr{F}(\mathscr{Y}(t)t)=\mathscr{F}(\mathscr{Y})*\mathscr{F}(t)$$

$$\delta_+^2=\delta_+*\frac{1}{2\pi\iota}\delta^{(1)}$$

$$\delta_+^3=\mathscr{F}(\mathscr{Y}*\mathscr{Y}*\mathscr{Y})=\mathscr{F}(\mathscr{Y}(t)t*\mathscr{Y})=\mathscr{F}(\mathscr{Y}\frac{t^2}{2})$$

$$\delta_+^3=\frac{1}{2}\delta_+*\frac{\delta''}{2\pi\iota}$$

$$\delta_-^3 = \frac{1}{2(2\pi\iota)} * \delta_- * \delta''$$

Тогда $2(2\pi\iota)(\delta_+^3 + \delta_-^3) = \delta''$

И исходное уравнение принимает вид

$$(\delta'' - \omega^2\delta) * U = W$$

т.е. обыкновенное линейное дифференциальное уравнение в $\mathfrak{O}'_{-1}$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \omega^2 U = W,$$

которое уже рассмотрено.

Рассмотрим примеры

1. Решить уравнение в $\mathfrak{O}'_{-1}$:

$$\frac{1}{\pi\iota} v.p.\frac{1}{t} * X = S \tag{1}$$

где $S \in \mathfrak{M}$-заданная функция, X-неизвестная. Для того чтобы решить уравнение (1), нам необходимо найти элементарные решения этого уравнения.

$$\delta_+ + \delta_- = \delta$$

где

$$\delta_+ = -\frac{1}{2\pi\iota(x + \iota o)} = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2\pi\iota} v.p.\frac{1}{x}$$

и

$$\delta_- = \delta - \delta_+$$

Из ранее полученных знаний мы знаем, что

$$\delta_- = \delta - \delta_+ = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2\pi\iota} v.p.\frac{1}{x}$$

и

$$\delta_- - \delta_+ = \frac{1}{\pi\iota} v.p.\frac{1}{t}$$

Итак запишем нашу задачу в виде:

$$\frac{1}{\pi\iota} v.p.\frac{1}{t} * \mathscr{E} = \delta$$

Применим операцию свертки к обеим частям уравнения

$$\frac{1}{\pi\iota}v.p.\frac{1}{t} * \frac{1}{\pi\iota}v.p.\frac{1}{t} = (\delta_- - \delta_+) * (\delta_- - \delta_+) = {\delta_-}^{*2} - 2\delta_+ * \delta_- + {\delta_+}^{*2} = \delta_- + \delta_+$$

Получаем результат:

$$\delta * \mathscr{E} = \frac{1}{\pi\iota}v.p.\frac{1}{t}$$

т.е.

$$\mathscr{E} = \frac{1}{\pi\iota}v.p.\frac{1}{t} \qquad \mathscr{A}$$

Значит существует решение уравнения (1), которое определяется по формуле:

$$X = \mathscr{E} * S = \frac{1}{\pi\iota}v.p.\frac{1}{t} * S$$

2. $\frac{1}{{\delta_+}^2}\frac{\tau_{-1}\delta_+}{\tau_1\delta_+}\left(\delta_+ * Y(t)e^{-2\pi\beta t} * \Phi\right)+\frac{1}{\delta_-}\frac{1+2\pi\delta_-}{1-2\pi\delta_-}\left(\delta_- * \frac{1}{\pi\iota}v.p.\frac{1}{t} * \Phi\right)=$

$$= (W = \frac{1}{t^\alpha}) \tag{1}$$

Тогда соответствующая краевая задача будет

$$\frac{1}{\delta_+^2}\frac{\tau_{-1}\delta_+}{\tau_1\delta_+}\{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^+ - \frac{1}{\delta_1}\frac{1+2\pi\delta_-}{1-2\pi\delta_-}\{\frac{1}{\pi\iota}v.p.\frac{1}{t} * \Phi\} = \frac{1}{t^\alpha}, \tag{2}$$

Аналитическое представление будет

$$\left\{\begin{array}{c} (-2\pi\iota z)^2\frac{-2\pi\iota(z-1)}{-2\pi\iota(z+1)}\{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^+(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z^\alpha}, Imz > 0 \\ (-2\pi\iota z)^2\frac{-2\pi\iota z+2\pi}{-2\pi\iota z-2\pi}\{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^-(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{z^\alpha},, Imz < 0 \end{array}\right.$$

или

$$\left\{\begin{array}{c} (-2\pi\iota z)^2\frac{z-1}{z+1}\{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^+(z) = \frac{1}{zz^\alpha}, Imz > 0 + P(z) \\ (-2\pi\iota z)^2\frac{z+\iota}{z-\iota}\{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^-(z) = -\frac{1}{zz^\alpha}, Imz < 0 + P(z) \end{array}\right.$$

Откуда

$$\left.\begin{array}{c} \{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^+(z) = \frac{z+1}{z-1}\frac{1}{(-2\pi\iota z)^2}\{\frac{1}{2z^\alpha} + P(z)\} \\ \{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^-(z) = \frac{z-\iota}{z+\iota}\frac{1}{(-2\pi\iota z)}\{-\frac{1}{2z^\alpha} + P(z)\} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$P(z) = C$-константа. Тогда

$$\left\{\begin{array}{c} \{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^+(z) = \frac{z+1}{z-1}\frac{1}{(-2\pi\iota z)^2}\{\frac{1}{2z^\alpha} + C\}, Imz > 0 \\ \{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^-(z) = \frac{z-\iota}{z+\iota}\frac{1}{(-2\pi\iota z)}\{-\frac{1}{2z^\alpha} + C\}, Imz < 0 \end{array}\right.$$

Теперь убираем полюс в точке $z = -\iota$ т.е. $C = \frac{1}{2(-\iota)^\alpha}$

$$\left\{\begin{array}{c} \{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^+(z) = \frac{z+1}{z-1}\frac{1}{(-2\pi\iota z)^2}\frac{1}{2}\{\frac{1}{z^\alpha} + \frac{1}{(-\iota)^\alpha}\}, Imz > 0 \\ \{\mathscr{Y}(t)\widehat{e^{-2\pi\rho t}} * \Phi\}^-(z) = \frac{z-\iota}{z+\iota}\frac{1}{(-2\pi\iota z)}\frac{1}{2}\{-\frac{1}{z^\alpha} + \frac{1}{(-\iota)^\alpha}\}, Imz < 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{r} \delta_+ * \mathscr{Y}(t)e^{-2\pi\rho t} * \Phi = \frac{t+1}{2}(-2\pi\iota)\tau_1\delta_+\delta_+^2\{\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(-\pi)^\alpha}\} \\ \delta_- * \frac{1}{\pi\iota}v.p.\frac{1}{t} * \Phi = \frac{1}{2}\frac{t-\iota}{t+\iota}\delta_-\{\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(-\pi)^\alpha}\} \end{array}\right.$$

Теперь имеем

$$\left.\begin{array}{r} \mathscr{Y}(t)e^{-2\pi\beta t} * \Phi^{-1} = (\delta' + 2\pi\beta\delta) \in \mathscr{A} \\ (\frac{1}{\pi\iota} v.p.\frac{1}{t})^{-1} = \frac{1}{\pi\iota} v.p.\frac{1}{t} in \mathscr{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\exists!$ решение

$$\delta_+ * \Phi = (\delta'_+ + 2\pi\beta\delta_+) * \frac{1}{2}(t+1)\delta_+^2(2\pi\tau_1\delta_+)\{\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(-\iota)^\alpha}\}$$

и

$$\delta_- * \Phi = (\delta_- * \frac{1}{\pi\iota} v.p.\frac{1}{t}) * \frac{1}{2}\frac{t-\iota}{t+\iota}\delta_-\{\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(-\iota)^\alpha}\},$$

но

$$(\delta_- + \frac{1}{\pi\iota} v.p.\frac{1}{t}) = \delta_- * (\delta_- - \delta_+) = \delta_-^{*2} = \delta_-$$

Тогда

$$\left\{\begin{array}{r} \delta_+ * \Phi = (\delta'_+ + 2\pi\beta\delta_+) * \frac{1}{2}(t+1)\delta_+^2(2\pi\tau_1\delta_+)\{\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(-\iota)^\alpha}\} \\ \delta_- * \Phi = \delta_- * \frac{1}{2}\frac{t-\iota}{t+\iota}\delta_-\{\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(-\iota)^\alpha}\} \end{array}\right.$$

откуда

$$\Phi = \left((\delta'_+ + 2\pi\beta\delta_+) * \frac{1}{2}(t+1)\delta_+^2(2\pi\tau_1\delta_+)\{\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(-\iota)^\alpha}\}\right) + \left(\delta_- * \frac{1}{2}\frac{t-\iota}{t+\iota}\delta_-\{\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(-\iota)^\alpha}\}\right)$$

А решение соответствующей задачи будет определен по формуле :

$$\widehat{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\langle\Phi, \frac{1}{t-z}\rangle$$

т.к. $\Phi \in \mathfrak{O}'_{-\mathtt{1}}$. Найдем $\widehat{\mathscr{Y}}(z)$ имеем

$$\frac{d\mathscr{Y}}{dt} = \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathscr{Y}}(z) = -\frac{1}{2\pi\iota z}, Imz \neq 0$$

$$\widehat{\mathscr{Y}}(z) = -\frac{1}{2\pi\iota}\ln z, Imz \neq 0$$

где $\ln z$ однозначная ветвь с разрезом $\mathbf{R}_+ := [\mathbf{0}, \infty]$, где $\arg_{(z=x)}|_{vb} = 0$

Проверим: 1) Пусть $z = x < 0$, $\ln x = ln(-x) + \iota\pi$

Тогда

$$\widehat{\mathscr{Y}^+}(x) - \widehat{\mathscr{Y}^-}(x) = -\frac{1}{2\pi\iota}\{[\ln(-x) + \iota\pi] - [\ln(-x) + \iota\pi]\} = 0$$

2) Пусть $z = x > 0$, где $\ln x|_{vb} = \ln x, \ln x|_{nb} = \ln x + \iota 2\pi$

Тогда

$$\widehat{\mathscr{Y}^+}(x) - \widehat{\mathscr{Y}^-}(x) = -\frac{1}{2\pi\iota}\{\ln(x) - \ln(x) - 2\iota\pi\} = 1$$

т.е

$$\widehat{\mathscr{Y}^+}(x) - \widehat{\mathscr{Y}^-}(x) = \mathscr{Y}(x), \forall x \in \mathbf{R}$$

Итак, действительно

$$\widehat{\mathscr{Y}}(x) = -\frac{1}{2\pi\iota} lnz, Imz \neq 0$$

где $\ln z$ однозначная ветвь с разрезом $\mathbf{R}_+ := [\mathbf{0}, \infty]$, где $\arg_{(z=x)}|_{vb} = 0$

Рассмотренный пример показывает, что для отыскания представления Коши обобщенной функции T необходимо применять различные методы, т.е. либо непосредственное определение, либо свойства представления Коши, либо формулу связывающую представление Коши с преобразованием Карлемана-Фурье от $\overline{\mathscr{F}}(T)$.

Использованная литература.

1)Владимиров В.С., "Уравнения математической физики. М.Наука,1988г.,512 стр.

2)Владимиров В.С.,Михайлов В.П.,Вашарин А.А.,Каримова Х.Х.,Сидоров Ю.В.,Шабунин М.И. "Сборник задач по уравнениям математической физики. М.Наука,1982г.,256 стр.

3)Бремерман Г. "Распределения,комплексные переменные и преобразования Фурье. М.Мар. 1968 г.,276 стр.

4)Агранович М.С. "Обобщенные функции М.:МЦНМО,2009

5) Лекционные курсы НОЦ / Математический инсти- тут им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2006. Вып. 5: Введение в теорию обобщенных функций / Дрож- жинов Ю. Н., Завьялов Б. И. – 164 с