ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 514.77

Е.И. ЯКОВЛЕВ

СЕКЦИОННЫЕ КРИВИЗНЫ МНОГООБРАЗИЙ ТИПА КАЛУЦЫ-КЛЕЙНА

Изучаются секционные кривизны римановых многообразий типа Калуцы-Клейна с одномерными структурными группами. В частности, находятся топологические ограничения, необходимые для знакоопределенности. При этом существенно используется связь между исследуемыми римановыми многообразиями и гироскопическими системами.

1. Многообразия типа Калуцы-Клейна и гироскопические системы

Пусть M — гладкое многообразие, $\nu : \overline{M} \to M$ — гладкое универсальное накрытие, $\overline{G}$ — одномерная связная группа Ли, $\bar{\mu} : \Xi \to \overline{M}$ — главное расслоение со структурной группой $\overline{G}$ и $\mu = \nu \circ \bar{\mu}$. Если $G = \overline{G} \times \pi_1(M)$, H — G-связность на Ξ и Φ^* — ее форма кривизны, то найдется 2-форма Φ на M, для которой $\Phi^* = \mu^*\Phi$. Рассмотрим гомоморфизм Гуревича

$$\varphi_M^2 : \pi_2(M) \to H_2(M)$$

и гомоморфизм $h_{[\Phi]} : H_2(M) \to R$, определенный формулой $h_{[\Phi]}([c]) = \int_c \Phi$. Существует такое $\overline{m} \in Z$, $\overline{m} \geq 0$, что $\operatorname{Im}(h_{[\Phi]} \circ \varphi_M^2) = \overline{m}Z$. Положим $m = \overline{m}$ при $\overline{G} = U(1)$ и $m = -1$ при $\overline{G} = R$. Тогда

$$\operatorname{Im}(h_{[\Phi]} \circ \varphi_m^2) = \begin{cases} mZ, & \text{если } m \in N; \\ 0, & \text{если } m \in \{-1, 0\}. \end{cases} \tag{1}$$

Четверку $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ будем называть расслоением типа $(1, m)$, а четверку $\bar{\eta} = (\Xi, \bar{\mu}, \overline{M}, \overline{G})$ — накрывающим η расслоением.

Отметим, что когомологический класс формы $\bar{\mu}^*\Phi$ является характеристическим классом расслоения $\bar{\eta}$. Поэтому число m не зависит от выбора связности H. Так как $H_1(\overline{M}) = 0$, то естественный гомоморфизм $H^2(\overline{M}, Z) \to H^2(\overline{M}, R)$ инъективен. В силу классификационной теоремы ([1], с. 359) это значит, что расслоения $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ и $\eta' = (\Xi', \mu', M, G')$ типов $(1, m)$ и $(1, m')$ соответственно изоморфны тогда и только тогда, когда $G = G'$ и $[\bar{\mu}^*\Phi] = [\bar{\mu}'^*\Phi'] \in H^2(\overline{M}, R)$. Разумеется, при этом $m = m'$.

Инвариантные относительно действия группы G римановы метрики на Ξ будем называть метриками типа Калуцы-Клейна. Положим $N_1 = N \cup \{-1, 0\}$ и $\mathfrak{T}(m) = R \setminus \{0\}$ при $m \in N$ и $\mathfrak{T}(m) = 0$ при $m \in \{-1, 0\}$. Символом $\mathfrak{K}(M, 1)$ обозначим множество всех троек $(\eta, \bar{g}, \theta)$, где $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ — расслоение типа $(1, m)$ при некотором $m \in N_1$, $\bar{g}$ — метрика типа Калуцы-Клейна на Ξ и $\theta \in \mathfrak{T}(m)$. Тройки $((\Xi, \mu, M, G), \bar{g}, \theta)$ и $((\Xi', \mu', M, G'), \bar{g}', \theta')$ из $\mathfrak{K}(M, 1)$ будем считать эквивалентными, если $G = G'$, $\theta = \theta'$ и существует диффеоморфизм $\zeta : \Xi \to \Xi'$, удовлетворяющий равенствам $\mu = \mu' \circ \zeta$, $\zeta(v \cdot \bar{a}) = \zeta(v) \cdot \bar{a}$ для $v \in \Psi$, $\bar{a} \in \overline{G}$ и $\bar{g} = \zeta^*\bar{g}'$. Множество классов эквивалентных троек из $\mathfrak{K}(M, 1)$ обозначим символом $[\mathfrak{K}](M, 1)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант 95-0-1.3-87).

Пусть g — риманова метрика, F — замкнутая 2-форма и u — гладкая функция на M. Предположим, что $u > 0$ на M и существует такое число $\theta \in R$, что

$$\mathrm{Im}(h_{[\Phi]} \circ \varphi_M^2) = \theta Z. \tag{2}$$

Четверку $\Gamma = (M, g, F, u)$ назовем гироскопической $(1,\theta)$-системой. Положим $\mathfrak{M}(\theta) = N$ при $\theta \neq 0$ и $\mathfrak{M}(0) = \{-1, 0\}$. Обозначим символом $\mathfrak{G}(M,1)$ множество пар (Γ, m), где Γ — гироскопическая $(1,\theta)$-система на M при некотором $\theta \in R$ и $m \in \mathfrak{M}(\theta)$.

Построим отображение $f : \mathfrak{K}(M,1) \to \mathfrak{G}(M,1)$. Для этого выберем тройку $(\eta, \bar{g}, \theta) \in \mathfrak{K}(M,1)$, где $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ — расслоение типа $(1,m)$, $m \in N_1$. Определим G-связность H на Ξ, обозначив для каждой точки $v \in \Xi$ символом $H(v)$ ортогональное дополнение вертикального подпространства $V(v)$ касательного пространства $T_v\Xi$. Для $p \in M$ и $X, Y \in T_pM$ рассмотрим произвольную точку v из $\mu^{-1}(p)$, векторы $\overline{X}_0 = (d\mu|_{H(v)})^{-1}(X)$, $\overline{Y}_0 = (d\mu|_{H(v)})^{-1}(Y)$ и положим $g(X,Y) = \bar{g}(\overline{X}_0, \overline{Y}_0)$. Этим определена риманова метрика g на M. Пусть $\varkappa(\theta, m) = \theta/m$ при $m \in N$ и $\theta \neq 0$, $\varkappa(\theta, m) = 1$ при $m \in \{-1, 0\}$ и $\theta = 0$. Если $\Phi^* = \mu^*\Phi$ — форма кривизны связности H, то форма $F = \varkappa(\theta, m)\Phi$ удовлетворяет равенству (2). Рассматривая число 1 как элемент алгебры Ли $\mathfrak{g} = R$ группы G, обозначим символом 1^* порожденное им фундаментальное вертикальное векторное поле на Ξ. Тогда $\bar{u} = \varkappa(\theta, m)^2/2\bar{g}(1^*, 1^*)$ — гладкая функция на Ξ. Так как она инвариантна относительно действия группы G, то существует гладкая положительная функция $u : M \to R$, для которой $\bar{u} = u \circ \mu$. Положим $\Gamma = (M, g, F, u)$ и $f(\eta, \bar{g}, \theta) = (\Gamma, m)$.

Лемма 1. *Пусть $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$, $(\eta, \bar{g}, \theta) \in \mathfrak{K}(M,1)$, ω — форма, ортогональная слоям расслоения η G-связности H на Ξ, $\Gamma = (M, g, F, u)$, $(\Gamma, m) \in \mathfrak{G}(M,1)$ и $\bar{u} = u \circ \mu$. Тогда $(\Gamma, m) = f(\eta, \bar{g}, \theta)$ в том и только том случае, если*

$$\bar{g} = (\varkappa(\theta, m)^2/2\bar{u})\omega \otimes \omega + \mu^* g. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала предположим, что $(\Gamma, m) = f(\eta, \bar{g}, \theta)$. Если $v \in \Xi$ и $\overline{X}_0, \overline{Y}_0 \in H(v)$, то по построению метрики g

$$\bar{g}(\overline{X}_0, \overline{Y}_0) = \mu^* g(\overline{X}_0, \overline{Y}_0). \tag{4}$$

Для $\overline{X}_1, \overline{Y}_1 \in V(v)$ найдутся такие числа $s, t \in R$, что $\overline{X}_1 = s1^*(v)$ и $\overline{Y}_1 = t1^*(v)$. При этом $\omega(\overline{X}_1) = s$, $\omega(\overline{Y}_1) = t$ и $\bar{g}(\overline{X}_1, \overline{Y}_1) = st\bar{g}(1^*(v), 1^*(v))$. Воспользовавшись определением функции $\bar{u}$, отсюда получим равенство

$$\bar{g}(\overline{X}_1, \overline{Y}_1) = (\varkappa(\theta, m)^2/2\bar{u}(v))\omega(\overline{X}_1)\omega(\overline{Y}_1). \tag{5}$$

По определению связности H $\bar{g}(\overline{X}_0, \overline{Y}_1) = \bar{g}(\overline{X}_1, \overline{Y}_0) = 0$. Поэтому из (4) и (5) следует, что для $\overline{X} = \overline{X}_0 + \overline{X}_1$ и $\overline{Y} = \overline{Y}_0 + \overline{Y}_1$

$$\bar{g}(\overline{X}, \overline{Y}) = (\varkappa(\theta, m)^2/2\bar{u}(v))\omega(\overline{X}_1)\omega(\overline{Y}_1) + \mu^* g(\overline{X}_0, \overline{Y}_0).$$

Осталось заметить, что $\omega(\overline{X}_1) = \omega(\overline{X})$, $d\mu(\overline{X}_0) = d\mu(\overline{X})$ и аналогичные равенства верны для вектора $\overline{Y}$.

Допустим далее справедливость равенства (3). Тогда для любых точек $p \in M$, $v \in \mu^{-1}(p)$ и векторов $X, Y \in T_pM$, $\overline{X}_0 = (d\mu|_{H(v)})^{-1}(X)$ и $\overline{Y}_0 = (d\mu|_{H(v)})^{-1}(Y)$ имеем $g(X,Y) = \mu^* g(\overline{X}_0, \overline{Y}_0) = \bar{g}(\overline{X}_0, \overline{Y}_0)$. Если $\Phi^* = d\omega$, то $\Phi^* = \mu^*\Phi$ и верно равенство (1). Из последнего следует, что форма $F = \varkappa(\theta, m)\Phi$ удовлетворяет условию (2). Наконец, $\varkappa(\theta, m)^2/2\bar{g}(1^*(v), 1^*(v)) = \bar{u}\omega(1^*(v))^2$, а это означает, что $(\Gamma, m) = f(\eta, \bar{g}, \theta)$. $\square$

Отметим, что лоренцева метрика вида (3) использовалась в единой теории поля Калуцы-Клейна ([2], с. 309–312).

Лемма 2. *Отображение f сюръективно.*

Доказательство. Пусть $\theta \in R$, $\Gamma = (M, g, F, u)$ — гироскопическая $(1, \theta)$-система и $m \in \mathfrak{M}(\theta)$. Из (2) следует, что для формы $\Phi = (1/\varkappa(\theta, m))F$ справедливо равенство (1). Поэтому существуют расслоение $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ типа $(1, m)$ и G-связность H на Ξ с формой кривизны $\Phi^* = \mu^*\Phi$. Рассмотрим форму ω связности H, функцию $\bar{u} = u \circ \mu$ и определим риманову метрику $\bar{g}$ на Ξ формулой (3). Тогда $(\eta, \bar{g}, \theta) \in \mathfrak{K}(M, 1)$ и по лемме 1 $f(\eta, \bar{g}, \theta) = (\Gamma, m)$. □

Лемма 3. *Тройки $(\eta, \bar{g}, \theta)$ и $(\eta', \bar{g}', \theta')$ из $\mathfrak{K}(M, 1)$ имеют одинаковые f-образы в том и только том случае, если они эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = (M, g, F, u)$, $\Gamma' = (M, g', F', u')$, $(\Gamma, m) = f(\eta, \bar{g}, \theta)$ и $(\Gamma', m') = f(\eta', \bar{g}', \theta')$. Предположим, что $(\Gamma, m) = (\Gamma', m')$. Тогда $g = g'$, $F = F'$, $u = u'$ и $m = m'$. При этом $G = G'$ и в силу (2) $\theta = \theta'$. Если ω и ω' — формы связностей H на Ξ и H' на Ξ', ортогональных слоям расслоений η и η' соответственно, $d\omega = \mu^*\Phi$ и $d\omega' = \mu'^*\Phi'$, то $\Phi = (1/\varkappa(\theta, m))F = \Phi'$. Таким образом, расслоения η и η' имеют одинаковые базы, структурные группы и характеристические классы. Поэтому они изоморфны. Пусть $\xi : \Xi \to \Xi'$ — диффеоморфизм, $\mu = \mu' \circ \xi$. Поскольку $\bar{\sigma}(v \cdot \bar{a}) = \bar{\sigma}(v)$, то $\zeta(v \cdot \bar{a}) = \zeta(v) \cdot \bar{a}$ для $v \in \Psi$, $\bar{a} \in \overline{G}$ и $\omega'' = \xi^*\omega'$. Тогда $d\omega = d\omega''$ и существует G-инвариантная гладкая функция $\bar{\sigma} : \Xi \to R$ для которой $\omega = \omega'' + d\bar{\sigma}$. Определим отображение $\bar{\alpha} : R \to \overline{G}$, полагая $\bar{\alpha}(r) = \exp(2\pi i r)$ при $\overline{G} = U(1)$ и $\bar{\alpha}(r) = r$ при $\overline{G} = R$. Для $r \in R$ и $v \in \Xi$ положим $\alpha(r) = (\bar{\alpha}(r), e)$, где e — единица группы $\pi_1(M)$, $\alpha^v(r) = v \cdot \alpha(r) = R_{\alpha(r)}(v)$ и $\zeta(v) = \xi(v \cdot \alpha(\bar{\sigma}(v)))$. По формуле Лейбница

$$d\zeta = d\xi \circ (dR_{\alpha(\bar{\sigma}(v))} + d\alpha^v \circ d\bar{\sigma}).$$

Поскольку ξ — изоморфизм расслоений η и η', то ω'' — форма некоторой G-связности на Ξ. Поэтому $\omega''(dR_{\alpha(t)}(\overline{X})) = \omega''(\overline{X})$ и $\omega''(d\alpha^v(t)) = t$ для любых $\overline{X} \in T_v\Xi$ и $t \in R$. Но тогда $\omega'(d\zeta(\overline{X})) = \omega''(\overline{X}) + d\bar{\alpha}(\overline{X}) = \omega(\overline{X})$. Кроме того, $\mu'(\zeta(v)) = \mu(v \cdot \alpha(\bar{\sigma}(v))) = \mu(v)$. Таким образом, $\zeta^*\omega' = \omega$ и $\mu' \circ \zeta = \mu$. Отсюда и из леммы 1 следует, что $\zeta^*\bar{g}' = \bar{g}$.

Допустим теперь, что тройки $(\eta, \bar{g}, \theta)$ и $(\eta', \bar{g}', \theta')$ эквивалентны. Тогда $\theta = \theta'$ и существует диффеоморфизм $\zeta : \Xi \to \Xi'$, являющийся изоморфизмом расслоений η и η' и изометрией римановых многообразий $(\Xi, \bar{g})$ и $(\Xi', \bar{g}')$. При этом $H' \circ \zeta = d\zeta \circ H$, откуда следует равенство $g = g'$. Так как $\omega = \zeta^*\omega'$, то $\mu^*\Phi = d\omega = \zeta^*d\omega' = \zeta^*(\mu'^*\Phi') = \mu^*\Phi$. Поэтому $\Phi = \Phi'$. Наконец, из эквивалентности расслоений вытекает, что $m = m'$. А это значит, что $\bar{u} = \bar{u}'$ и, следовательно, $u = u'$. □

В силу леммы 3 формулой $\bar{f}[\eta, \bar{g}, \theta] = f(\eta, \bar{g}, \theta)$, где $[\eta, \bar{g}, \theta]]$ — класс эквивалентности тройки $(\eta, \bar{g}, \theta)$, корректно определено отображение $\bar{f} : [\mathfrak{K}](M, 1) \to \mathfrak{G}(M, 1)$. Из лемм 2 и 3 следует, что справедлива

Теорема 1. *Отображение $\overline{F}$ является биекцией.*

2. Кривизны в двумерных направлениях

Пусть $p \in M$ и $r \in \{1, 2\}$. На каждом k-мерном подпространстве $P \subset T_pM$ зафиксируем ориентацию $O(P)$ — класс одинаково ориентированных последовательностей из P_k. Рассмотрим векторы $X, Y \in T_pM$, их линейную оболочку P и линейную оболочку l вектора Y. Упорядоченную пару $(X < Y)$ будем называть правильной, если она ортонормирована, $(X, Y) \in O(P)$ и $Y \in O(l)$. Множество всех правильных пар из $(T_pM)^2$ обозначим символом Q_p^2M.

Выберем тройку $(\eta, \bar{g}, \theta) \in \mathfrak{K}(M, 1)$. Допустим, что $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$, $\Gamma = (M, g, F, u)$, $(\Gamma, m) = f(\eta, \bar{g}, \theta)$ и ω — форма, ортогональных слоям расслоения η G-связности H. Положим $\bar{\omega} = \varkappa(\theta, m)\omega$, $f = 1/\sqrt{2u}$ и $\bar{f} = f \circ \mu$. Для точки $v \in \Xi$ символом $\overline{X}_1(v)$ обозначим вертикальный вектор из $T_v\Xi$, удовлетворяющий равенству $\bar{f}(v)\bar{\omega}(\overline{X}_1(v)) = 1$, а символом $P_v^2\Xi$ — множество двумерных подпространств пространства $T_v\Xi$.

Пусть далее $p = \mu(v)$, $T = \{(t, s) \in (-1, 1] \times [0, 1] \mid t^2 + s^2 = 1\}$, $(t, s) \in T$, $(X, Y) \in Q_p^2M$, $\overline{X}_0(v) = (d\mu|_{H(v)})^{-1}(X)$, $\overline{Y}_0(v) = (d\mu_{H(v)})^{-1}(Y)$ и $\overline{P}$ — линейная оболочка векторов $\overline{X} = t\overline{X}_1(v) +$

$s\overline{X}_0(v)$ и $\overline{Y} = \overline{Y}_0(v)$. Положив $\overline{P} = \mathfrak{l}_v : (X, Y, t, s)$ и $(\overline{X}, \overline{Y}) = \bar{\mathfrak{l}}_v(X, Y, t, s)$, определим отображения $\mathfrak{l}_v : Q_p^2 M \times T \to P_v^2$ и $\bar{\mathfrak{l}}_v : Q_p^2 M \times T \to (T_v \Xi)^2$.

Лемма 4. *Отображение* $\mathfrak{l}_v$ *сюръективно.*

Доказательство. Если $\overline{P} \in P_v^2 \Xi$ и $\overline{P} \subset H(v)$, то для любой правильной пары $(X, Y) \in Q_p^2 M$ справедливо равенство $\overline{P} = \mathfrak{l}_v(X, Y, 0, 1)$. Допустим теперь, что $\overline{P} \in P_v^2 \Xi$ и $\overline{P} \not\subset H(v)$. Тогда пересечение $\bar{l} = \overline{P} \cap H(v)$ одномерно. Положим $G_p = \mu^{-1}(p)$, $l = d\mu(\bar{l})$ и рассмотрим единичный вектор $Y \in O(l)$. Если $T_v G_p \subset \overline{P}$, то $\overline{P} = \mathfrak{l}_v(X, Y, 1, 0)$ для любого вектора $X \in T_p M$, составляющего вместе с Y правильную пару (X, Y). Если $T_v G_p \not\subset \overline{P}$, то выберем ортонормированную пару $(\overline{X}, \overline{Y}) \in \overline{P}^2$ так, чтобы $\overline{Y} \in \bar{l}$, $d\mu(\overline{Y}) = Y$ и $(d\mu(\overline{X}), Y) \in O(d\mu(\overline{P}))$. Положим $t = f(p)\bar{\omega}(\overline{X})$, $s = |d\mu(\overline{X})|$ и $X = (1/s)d\mu(\overline{X})$. Тогда $(X, Y) \in Q_p^2 M$, $(t, s) \in T$ и $\overline{P} = \mathfrak{l}_v(X, Y, t, s)$. $\square$

Пусть по-прежнему $v \in \Xi$ и $p = \mu(v)$. Если $\overline{P} \subset P_v^2 \Xi$ и $(\overline{X}, \overline{Y})$ — базис пространства P, то символами $\overline{K}(\overline{P})$ и $\overline{K}(\overline{X}, \overline{Y})$ будем обозначать кривизну риманова многообразия $(\Xi, \bar{g})$ в направлении $\overline{P}$. Аналогично, $K(P) = K(X, Y)$ — кривизна многообразия (M, g) в двумерном направлении $P \subset T_p M$ с базисом (X, Y). Определим поле линейных операторов L и билинейную форму He_f на M формулами $g(L(X), Y) = F(X, Y)$ и $\mathrm{He}_f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$, где ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в (M, g). Для любых линейно независимых векторов $X, Y \in T_p M$ и произвольной пары $(t, s) \in R^2$ положим

$$
\begin{aligned}
c_{11}(X, Y) &= f(p)^2 |L(X)||L(Y)|/4 - \mathrm{He}_f(X, Y)/(f(p),\\
c_{12}(X, Y) &= 3F(X, Y)(Yf)/2 + f(p)(\nabla_Y F)(X, Y)/2,\\
c_{22}(X, Y) &= K(X, Y) - 3f(p)^2 F(X, Y)^2/4,\\
C_{X,Y}(t, s) &= c_{11}(Y, Y)t^2 + 2c_{12}(X, Y)ts + c_{22}(X, Y)s^2.
\end{aligned}
$$

Теорема 2. *Если* $v \in \Xi$, $p = \mu(v)$, $(X, Y) \in Q_p^2 M$, $(t, s) \in T$ *и* $\overline{P} = \mathfrak{l}_v(X, Y, t, s)$, *то* $\overline{K}(\overline{P}) = c_{X,Y}(t, s)$.

Доказательство. Рассмотрим такую карту (U, φ) на M, что $p \in U$ и $W = \varphi(U)$ — шар в R^n. Тогда существует гладкое сечение $\sigma : U \to \Xi$ расслоения η, для которого $\sigma(p) = v$. Пусть $\sigma^* \omega = A = A_i d\varphi^i$, $r_v = A_i(p)\varphi^i(p)$ и $J = (r_v - 1/2, r_v + 1/2)$. Формула $\zeta(r, x) = \sigma(\varphi^{-1}(x)) \cdot \alpha(r - A_i(p)x^i)$ определяет диффеоморфизм ζ произведения $J \times W$ на открытое подмножество $V \subset \Xi$. Положим $\psi = (\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^n) = \zeta^{-1}$, $n = \dim M$. Тогда (V, ψ) — карта на Ξ, причем $v \in V$ и $\mu(V) = U$.

Символами $\overline{K}$ и K обозначим поля тензоров кривизны римановых многообразий $(\Xi, \bar{g})$ и (M, g) соответственно. Пусть $\overline{R}{}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$, $\bar{\omega}_\alpha$ и $\bar{g}_{\alpha\beta}$ — компоненты тензорных полей $\overline{R}$, $\bar{\omega}$ и $\bar{g}$ в карте (V, ψ), а R_{ijk}^l, g_{ij}, F_{ij} и L_i^k — компоненты тензорных полей R, g, F и L в карте (U, φ). Рассмотрим функции $g^{jk} : U \to R$, удовлетворяющие равенствам $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$, и положим $f_i = \partial_i f$ и $f^k = g^{ki} f_i$ (здесь и везде далее $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, n$; $i, j, k, l = 1, \dots, n$; по одинаковым верхним и нижним индексам проводится суммирование). В силу леммы 1 $\bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{f}^2 \bar{\omega}_\alpha \bar{\omega}_\beta + g_{ij} \circ \mu$. При этом по определению формы $\bar{\omega}$ и по построению карты (V, ψ) функции $\bar{\omega}_\alpha$ инвариантны относительно действия группы G, $\bar{\omega}_0 \equiv \varkappa(\theta, m)$ и $\bar{\omega}_i(v) = 0$. Отсюда посредством несложных вычислений получим:

$$
\begin{aligned}
\overline{R}{}_{ijl}^{k}(v) &= R_{ijl}^k(p) - (f^2/2)(L_{[i}^k F_{j]l} + F_{ij} L_l^k)(p),\\
\overline{R}{}_{ij0}^{k}(v) &= \bar{\omega}_0 f(f_{[i} L_{j]}^k - f^k F_{ij} + f \nabla_{[i} L_{j]}^k)(p),\\
\overline{R}{}_{i0j}^{k}(v) &= (\bar{\omega}_0 f/2)(f \nabla_i L_j^k + 2f_i L_j^k + L_j^k f_j - f^k F_{ij})(p),\\
\overline{R}{}_{0i0}^{k}(v) &= \bar{\omega}_0^2 f(\nabla_i f^k + f^3 L_j^k L_i^j/4)(p),\\
\overline{R}{}_{ijl}^{0}(v) &= (1/f\bar{\omega}_0)(f \nabla_l F_{ij}/2 + F_{ij} f_l - 2f_{[i} F_{j]l})(p),
\end{aligned}
$$

$$\overline{R}\,^{0}_{ij0}(v) = (f^2/2)L^k_{[i}F_{]k}(p),$$
$$\overline{R}\,^{0}_{i0j}(v) = (\nabla_i f_j/2 - f^2 f_{ik}L^k_j/4)(p),$$
$$\overline{R}\,^{\delta}_{00i}(v) = \overline{R}\,^{\delta}_{000}(v) = \overline{R}\,^{0}_{0i0}(v) = 0,$$

где по индексам в квадратных скобках проводится альтернирование. Из этих формул следует, что если $\overline{X}, \overline{Y} \in T_v\Xi$, $\widetilde{X} = d\mu(\overline{X})$ и $\widetilde{Y} = d\mu(\overline{Y})$, то $\bar{g}(\overline{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Y}, \overline{X}) = R_1 + R_2 + R_3$, где

$$R_1 = f(p)^2[c_{11}(\widetilde{Y}, \widetilde{Y})\bar{\omega}(\overline{X})^2 - c_{11}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\bar{\omega}(\overline{X})\bar{\omega}(\overline{Y}) + c_{11}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\bar{\omega}(\overline{Y})^2],$$
$$R_2 = 2f(p)c_{12}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})[\bar{\omega}(\overline{X}) - \bar{\omega}(\overline{Y})],$$
$$R_3 = g(R(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Y}, \widetilde{X}) - 3f(p)^2F(\widetilde{X}, \widetilde{Y})^2/4.$$

Допустим теперь, что $(\overline{X}, \overline{Y})\bar{\mathfrak{l}}_v(X, Y, t, s)$. Тогда $(\overline{X}, \overline{Y})$ — ортонормированная пара векторов и потому $\bar{g}(\overline{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Y}, \overline{X}) = \overline{K}(\overline{X}, \overline{Y})$. Кроме того, $f(p)\bar{\omega}(\overline{X}) = t$, $\widetilde{X} = sX$, $\bar{\omega}(\overline{Y}) = 0$ и $\widetilde{Y} = Y$. Следовательно, $g(R(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Y}, \widetilde{X}) = s^2K(X, Y)$, $R_1 = c_{11}(Y, Y)t^2$, $R_2 = c_{12}(X, Y)ts$ и $R_3 = c_{22}(X, Y)s^2$. Поскольку $(\overline{X}, \overline{Y})$ — базис пространства $\overline{P}$, то этим теорема доказана. $\square$

Из теоремы 2 и леммы 4 следует

Теорема 3. *Пара $(\Xi, \bar{g})$ является римановым многообразием положительной (отрицательной) кривизны в том и только том случае, если для произвольной точки $p \in M$ и любой правильной пары векторов*

$$c_{11}(Y, Y) > 0\ (< 0), \quad C_{22}(X, Y) > 0\ (< 0), \tag{6}$$
$$c_{11}(Y, Y)c_{22}(X, Y) - c_{12}(X, Y)^2 > 0. \tag{7}$$

Критерий неотрицательности (неположительности) секционных кривизн многообразия $(\Xi, \bar{g})$ получается из (6) и (7) заменой строгих неравенств на нестрогие.

3. Топологические следствия знакоопределенности секционных кривизн

Пусть $m \in N_1$, $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ — расслоение типа $(1, m)$, $I = [0, 1]$ и $\delta \in R$. Кусочно-гладкий путь $\bar{x} : I \to \Xi$ называем δ-лифтом кусочно-гладкого пути $x : I \to M$, если $\mu \circ \bar{x} = x$ и $\bar{\omega}(d\bar{x}/d\tau) = 2\delta u(x(\tau))$, $\tau \in I$. Для произвольных x, δ и $v \in \mu^{-1}(p)$ существует единственный δ-лифт $\bar{x}$ пути x с началом $\bar{x}(0) = v$ [3].

Лемма 5. *Если $(\eta, \bar{g}, \theta) = \mathfrak{K}(M, 1)$, $(\Gamma, m) = f(\eta, \bar{g}, \theta)$, $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ и $\Gamma = (M, g, F, u)$, то римановы многообразия $(\Xi, \bar{g})$ и (M, g) полны или нет одновременно.*

Доказательство. Предположим сначала, что полна риманова метрика $\bar{g}$. Рассмотрим конечный интервал $(a, b) \subset R$, нормальную геодезическую $x : (a, b) \to M$ римановой метрики g и произвольную сходящуюся к b последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset (a, b)$. Положим $p = x(s_0)$, $\varepsilon_k = s_k - s_{k-1}$, $x_k(\tau) = x(s_{k-1} + \tau\varepsilon_k)$ для $k \in N$ и $\tau \in I$. Пусть также $v_0 \in \mu^{-1}(p)$, $\bar{x}_k$ — 0-лифт пути x_k с началом v_{k-1} и $v_k = \bar{x}_k(1)$. Расстояние между точками v_i и v_j не превышает числа $|s_i - s_j|$. Поэтому последовательность $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ фундаментальна в $(\Xi, \bar{g})$ и по предположению имеет предел $v \in \Xi$. Тогда $\mu(v) = \lim\limits_{k\to\infty} x(s_k) = \lim\limits_{s\to b} x(s)$. Этим доказано, что геодезическая x может быть продолжена вправо. Аналогично проверяется ее продолжаемость влево.

Допустим теперь, что полно многообразие (M, g). Рассмотрим конечный полуинтервал $J = [a, b)$ и нормальную геодезическую $\bar{x} : J \to \Xi$ римановой метрики $\bar{g}$. Положим $x = \mu \circ \bar{x}$ и $\delta \equiv ((b-a)/2u(x))\bar{\omega}(d\bar{x}/d\tau)$. Длина кривой x не превышает числа $\varepsilon = b - a$. Поэтому существует $\lim\limits_{s\to b} x(s) = q \in M$. Определим путь $y : I \to M$ формулами $y(\tau) = x(a + \tau\varepsilon)$ при $\tau \in [0, 1)$ и $y(1) = q$. Пусть $v = \bar{x}(a)$ и $\bar{y}$ — δ-лифт пути y с началом $\bar{y}(0) = v$. В силу леммы 2 из [3] $\bar{y}(\tau) = \bar{x}(a + \tau\varepsilon)$

для $\tau \in [0,1]$, откуда в силу непрерывности пути $\bar{y}$ следует, что $\lim\limits_{s\to b}\bar{x}(s) = \lim\limits_{\tau\to 1}\bar{y}(\tau) = \bar{y}(1)$. Это значит, что геодезическая $\bar{x}$ продолжаема вправо. При $J = (a,b]$ рассуждения аналогичны. $\square$

Теорема 4. *Предположим, что $m \in N_1$, $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ — расслоение типа $(1,m)$ и $(\Xi, \bar{g})$ — полное риманово многообразие типа Калуцы-Клейна с положительными секционными кривизнами. Тогда*

1) *$m \in N$, $\overline{G} = U(1)$ и накрывающее расслоение $\overline{\eta} = (\Xi, \bar{\mu}, \overline{M}, \overline{G})$ нетривиально;*
2) *многообразие M компактно и четномерно, $\pi_1(M) = 0$ для ориентируемого M и $\pi_1(M) \cong Z_2$ для неориентируемого M, $\operatorname{rank}\pi_2(M) > 0$;*
3) *многообразие Ξ компактно, $\pi_1(\Xi) \cong Z_m$.*

Доказательство. Пусть $(\eta, \bar{g}, \theta) \in \mathfrak{K}(M,1)$ и $(\Gamma, m) = f(\eta, \bar{g}, \theta)$. По теореме 3 для гироскопической системы $\Gamma = (M, g, F, u)$ при любых $p \in M$ и $(X,Y) \in Q_p^2 M$ справедливы неравенства (6) и (7). Допустим, что $m \in \{0,1\}$. Тогда $\theta = 0$ и $(\Gamma, 0) \in \mathfrak{G}(M,1)$. В силу теоремы 1 найдется тройка $(\eta_0, \bar{g}_0, 0) \in \bar{f}^{-1}(\Gamma, 0)$. Рассмотрим пространство Ξ_0 расслоения η_0. По лемме 5 римановы многообразия (M,g) и $(\Xi_0, \bar{g}_0)$ полны, а в силу теоремы 3 секционные кривизны многообразия $(\Xi_0, \bar{g}_0)$ положительны во всех точках по всем двумерным направлениям. Однако $\Xi_0 = \overline{M} \times U(1)$ и потому $\pi_1(\Xi_0) \cong Z$. Это противоречит теореме Майерса ([4], с. 331) в случае компактности Ξ_0 и теореме Громола и Мейера ([5], с. 320) в случае некомпактности многообразия Ξ_0. Таким образом, допущение неверно, и, на самом деле, $m \in N$. При этом $\overline{G} = U(1)$ и расслоение $\overline{\eta}$ нетривиально. По лемме 1 из [3] $\pi_1(\Xi) \cong Z_m$. В силу (2) $\operatorname{Im}(h_{[\Phi]} \circ \varphi_M^2)$, что возможно только при $\operatorname{rank}\pi_2(M) > 0$. Из (6) следует, что $K(X,Y) > 3f(p)^2 F(X,Y)^2$ для любых $p \in M$ и $(X,Y) \in Q_p^2 M$. Следовательно, (M,g) — полное и неасферичное риманово многообразие положительной кривизны. По теореме Громола и Мейера оно должно быть компактным. При этом по теореме Майерса группа $\pi_1 M$ конечна. Из последних двух утверждений следует компактность группы $G = U(1) \times \pi_1(M)$ и пространства расслоения типа $(1,k)$ над M при любом натуральном k. В частности, это верно для $k = m$ и для $k = 3$. По доказанному выше $\theta \neq 0$ и потому $(\Gamma, 3) \in \mathfrak{G}(M,1)$. Пусть $(\eta_3, \bar{g}_3, \theta) \in \bar{f}^{-1}(\Gamma, 3)$ и $\eta_3 = (\Xi_3, \mu_3, M, G)$. В силу (6) и (7) секционные кривизны многообразия $(\Xi_3, \bar{g}_3)$ положительны во всех точках по всем двумерным направлениям. По лемме 5 $(\Xi_3, \bar{g}_3)$ полно, а по лемме 1 из [3] $\pi_1(\Xi_3) \cong Z_3$. Отсюда в силу теоремы Синга ([4], с. 331) следует, что многообразие Ξ_3 нечетномерно. При этом $\dim M = \dim \Xi_3 - 1$ — четное число и по той же теореме Синга M односвязно, если ориентируемо, и $\pi_1(M) \cong Z_2$, если M неориентируемо. $\square$

Для касательного расслоения $\tau_M = (TM, \pi, M)$ многообразия M определены характеристические классы Штифеля-Уитни $\omega_i(\tau_M) \in H^i(M, Z_2)$, $i = 0, 1, \ldots, n = \dim M$, а если M ориентируемо, то класс Эйлера $e(\tau_m) \in H^n(M, Z)$.

Теорема 5. *Пусть $m \in N_1$, $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ — расслоение типа $(1,m)$ и $\bar{g}$ — полная риманова метрика типа Калуцы-Клейна на Ξ. Тогда*

1) *если $(\Xi, \bar{g})$ — многообразие неположительной кривизны, то $m \in \{0,1\}$, накрывающее расслоение $\overline{\eta} = (\Xi, \bar{\mu}, \overline{M}, \overline{G})$ тривиально и $\pi_k(M) = 0$ для всех $k \geq 2$;*
2) *если секционные кривизны многообразия $(\Xi, \bar{g})$ отрицательны, то (в дополнение к вышесказанному) многообразия M и Ξ некомпактны, $w_n(\tau_M) = 0$, а если M ориентируемо, то и $e(\tau_M) = 0$.*

Доказательство. Допустим, что секционные кривизны многообразия $(\Xi, \bar{g})$ неположительны, но $m \in N$. Рассмотрим число $\theta \in \mathfrak{T}$ и пару $(\Gamma, m) = f(\eta, \bar{g}, \theta)$. По построению множество $\mathfrak{M}(\theta)$ содержит единицу, в по теореме 1 существует тройка $(\eta_1, \bar{g}_1, \theta) \in \bar{f}^{-1}(\Gamma, 1)$. Обозначим символом Ξ_1 пространство расслоения η_1. По лемме 5 $\bar{g}$ и $\bar{g}_1$ — полные римановы метрики. В силу теоремы 3 $(\Xi_1, \bar{g}_1)$ — многообразие неположительной кривизны одновременно с $(\Xi, \bar{g})$. По лемме 1 из [3] $\pi_1(\Xi_1) = 0$. Отсюда в силу теоремы Адамара-Картана следует, что расслоение $\overline{\eta}$ универсально. Последнее противоречит следствию леммы 1 из [3]. Таким образом, допущение неверно и, на самом деле, $m \in \{-1, 0\}$. При этом в силу (1) характеристический класс $[\nu^*\Phi] \in H^2(M, R)$ расслоения $\overline{\eta}$ равен нулю. Следовательно, расслоение $\overline{\eta}$ тривиально. Тогда $\pi_k(\Xi) \cong \pi_k(\overline{M}) \times \pi_k(\overline{G})$. Отсюда для $k \geq 2$ следует, что $\pi_k(M) \cong \pi_k(\Xi)$, причем по теореме Адамара-Картана $\pi_k(\Xi) = 0$.

Предположим далее, что $(\Xi, \bar{g})$ — многообразие отрицательной кривизны. По теореме 3 $c_{11}(Y, Y) < 0$ для любой точки $p \in M$ и произвольного вектора $Y \in T_pM$. При этом $\mathrm{He}_f(Y, Y) > f(p)^3|L(Y)|^2/4 \geq 0$. Если M — компакт, то существует такая точка $p \in M$, что $f(p) \geq f(q)$ для всех $q \in M$. Рассмотрим геодезическую $x : R \to M$ полного риманова многообразия (M, g), для которой $x(0) = p$. По выбору точки p $f \circ x(0) \geq f \circ x(t)$ для всех $t \in R$. Следовательно, $\mathrm{He}_f(Y, Y) = (d^2(f \circ x)/dt^2)(0) \leq 0$ для вектора $Y = (dx/dt)(0)$. Получили противоречие, доказывающее некомпактность многообразия M. Разумеется при этом некомпактны и многообразия $\overline{M}$ и $\Xi = \overline{M} \times \overline{G}$.

Если $\pi_1(M) = 0$, то по доказанному выше многообразие M стягиваемо и, следовательно, $H^n(M, Z_2) = H^n(M, Z) = 0$. Допустим, что $\pi_1(M) \neq 0$ и p — критическая точка функции f. Так как гессиан He_f положительно определен на M, то p — точка строгого локального минимума. В силу полноты (M, g) нетривиальный элемент $\beta \in \pi_1(M, p)$ содержит геодезическую петлю $y : [0, 1] \to M$, $y(0) = y(1) = p$. При этом $(d(f \circ y)/dt)(0) = 0$ и $d^2(f \circ y)/dt^2 = \mathrm{He}_f(dy/dt, dy/dt) > 0$ для всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, $d(f \circ y)/dt > 0$ на $(0, 1]$ и $f(p) = f(y(0)) < f(y(1)) = f(p)$. Полученное противоречие доказывает, что если $\pi_1(M) \neq 0$, то векторное поле $\operatorname{grad} f$ не обращается в нуль на M. В таком случае $w_n(\tau_M) = 0$, а если многообразие M ориентируемо, то и $e(\tau_M) = 0$. $\square$

4. Трехмерный случай. Примеры

Пусть $\Gamma = (M, g, F, u)$ — гироскопическая $(1, \theta)$-система, M — ориентированное двумерное многообразие и Ω — форма объема риманова многообразия (M, g). Тогда найдется гладкая функция $h : M \to R$, удовлетворяющая равенству $F = h\Omega$. При этом для любых $p \in M$ и $(X, Y) \in Q_p^2 M$

$$c_{11}(Y, Y) = f(p)^2 h(p)^2/4 - \mathrm{He}_f(Y, Y)/f(p), \tag{8}$$

$$c_{12}(X, Y) = Y(f^3 h)/2f(p)^2, \tag{9}$$

$$c_{22}(X, Y) = K(X, Y) - 3f(p)^2 h(p)^2/4. \tag{10}$$

Пример 1. Предположим, что M — сфера единичного радиуса в трехмерном евклидовом пространстве, g — индуцированная риманова метрика на M, $F = \Omega$, $u \equiv 1/2$, $\Gamma = (M, g, F, u)$ и $m \in N$. По лемме 2 существуют расслоение $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ типа $(1, m)$, риманова метрика типа Калуцы-Клейна $\bar{g}$ на Ξ и число $\theta \in \mathfrak{T}(m)$ такие, что $f(\eta, \bar{g}, \theta) = (\Gamma, m)$. Если $v \in \Xi$, $\overline{P}$ — двумерное подпространство касательного пространства $T_v\Xi$ и $p = \mu(v)$, то по лемме 4 найдутся правильная пара векторов $(X, Y) \in Q_p^2 M$ и пара чисел $(t, s) \in T$, удовлетворяющие равенству $\overline{P} = \mathfrak{l}_v(X, Y, t, s)$. В силу (8)–(10) $c_{11}(Y, Y) = c_{22}(X, Y) = 1/4$ и $c_{12}(X, Y) = 0$. При этом по теореме 2 $\overline{K}(\overline{P}) = (1/4)(t^2 + s^2) = 1/4$. Таким образом, $(\Xi, \bar{g})$ — риманово многообразие постоянной положительной кривизны.

Пусть $m \in N$ и группа $G_m = \{\exp(2\pi i k/m) \mid k = 0, 1, \dots, m-1\}$ действует на трехмерной сфере $S^3 = \{(z_1, z_2) \in C^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ по формуле $(z_1, z_2) \cdot z = (z_1 z, z_2 z)$. Фактор-многообразие $L(m, 1) = S^3/G_m$ называется линзой типа $(m, 1)$. Обозначим содержащий точку (z_1, z_2) смежный класс на S^3/G_m символом $[z_1, z_2]$. Формула $[z_1, z_2] \cdot z = [z_1 z, z_2 z]$ корректно определяет действие группы $U(1)$ на линзе $L(m, 1)$. Фактор-многообразие $B = L(m, 1)/U(1)$ гомеоморфно двумерной сфере S^2. Если $\chi : L(m, 1) \to B$ — фактор-отображение, то $\eta^m = (L(m, 1), \chi, B, U(1))$ — главное расслоение типа $(1, m)$. В частности, $L(1, 1) = S^3$ и η^1 — расслоение Хопфа.

Теорема 6. *Допустим, что $m \in N_1$, $\eta = (\Xi, \mu, M, G)$ — расслоение типа $(1, m)$, $\dim \Xi = 3$ и многообразие M ориентируемо. Тогда на Ξ существует риманова метрика типа Калуцы-Клейна с положительными секционными кривизнами в том и только том случае, если $m \in$*

N, база M гомеоморфна сфере S^2, тотальное пространство Ξ гомеоморфно линзе $L(m,1)$ и расслоение η изоморфно расслоению η^m.

Доказательство. Предположим, что $(\Xi, \bar{g})$ — риманово многообразие типа Калуцы-Клейна и все его секционные кривизны положительны. Тогда по теореме 4 $m \in N$, M компактно и $\operatorname{rank} \pi_2(M) > 0$. Отсюда следует, что многообразие M гомеоморфно либо сфере, либо проективной плоскости. Поскольку M ориентируемо, то реализуется первая возможность. Осталось заметить, что любое главное $U(1)$-расслоение типа $(1, m)$ над двумерной сферой изоморфно расслоению η^m ([6], с. 142–144). $\square$

Пример 1 доказывает справедливость обратного утверждения.

Пример 2. Пусть $M = R^2$, g — евклидова метрика на M, $u(x,y) = 1/2(1 + x^2 + y^2)^2$, $f = 1/\sqrt{2u}$, $h = 1/f^3$, $F = h\Omega$ и $\Gamma = (M, g, F, u)$. Рассмотрим произвольную точку $p \in M$ и правильную пару $(X, Y) \in Q_p^2 M$. Тогда $\mathrm{He}_f(Y,Y) = 2$ и в силу (8) $c_{11}(Y,Y) = 1/4f(p)^4 - 2/f(p)$. Поскольку $f(p) \geq 1$, то $c_{11}(Y,Y) \leq -7/4f(p) < 0$. Из (10) и равенства $K(X,Y) = 0$ следует, что $c_{22}(X,Y) = -3/4f(p)^4 < 0$. Наконец, $f^3 h \equiv 1$ и в силу (9) $c_{12}(X,Y) = 0$. Таким образом, если $m \in \{-1, 0\}$, $(\eta, \bar{g}, \theta) = \bar{f}^{-1}(\Gamma, m)$ и Ξ — пространство расслоения η, то по теореме 3 $(\Xi, \bar{g})$ — риманово многообразие отрицательной кривизны.

Литература

1. Телеман К. *Элементы топологии и дифференцируемые многообразия.* – М.: Мир, 1967. – 391 с.
2. Паули В. *Теория относительности.* – М.: Наука, 1983. – 336 с.
3. Яковлев Е.И. *Двухконцевая задача для некоторого класса многозначных функционалов* // Функц. анализ и его прилож. – 1990. – Т. 24. – № 4. – С. 63–73.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии* . Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
5. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом.* – М.: мир, 1971. – 343 с.
6. Хьюзмюллер Д. *Расслоенные пространства.* – М.: Мир, 1970. – 442 с.

Нижегородский государственный университет

Поступила
31.01.1995