ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 511.33

Ю.Ю. ГОРЮНОВ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДРЕССЛЕРА

В 1970 г. Дресслер элементарно доказал, что для φ-функции Эйлера имеет место оценка

$$\sum_{\varphi(n)\le x} 1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} x(1+o(1)).$$

Этот результат уточнялся аналитическим методом Бейтменом и элементарно Николасом, Балазардом и Смати [1]. В данной работе результат Дресслера без использования аналитического метода обобщается на случай мультипликативной функции, а именно доказана

Теорема. *Пусть $f(n)$, $|f(n)|\le 1$, есть мультипликативная функция. Тогда из сходимости ряда*

$$\sum_p \frac{1-f(p)}{p}$$

следует оценка

$$N_f(x) = \sum_{\varphi(n)\le x} f(n) = A_f x(1+o(1)),$$

в которой

$$A_f = \prod_p \Big(1+\frac{p}{p-1}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{f(p^t)}{p^t}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

Доказательство теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть $f(n)$, $|f(n)|\le 1$, есть мультипликативная функция. Тогда для любого y, для которого $\log y > \sqrt{\log x}$ и $(\log x)/\log y \to \infty$, имеет место оценка*

$$N_f(x) = \sum_{\varphi(n_1)\le\sqrt{x}} f(n_1) \sum_{n_2\le \frac{x}{\varphi(n_1)}} f(n_2) + o(x),$$

в которой n_1 означает натуральные числа, все простые делители которых не больше y, или $n_1=1$, а n_2 — натуральные числа, все простые делители которых больше y, или $n_2=1$.

Доказательство леммы. Имеем

$$N_f(x) = \sum_{\varphi(n_1)\le\sqrt{x}} f(n_1) \sum_{\varphi(n_2)\le \frac{x}{\varphi(n_1)}} f(n_2) + O\Big(\sum_{\sqrt{x}<\varphi(n_1)\le x}\ \sum_{\varphi(n_2)\le\frac{x}{\varphi(n_1)}} 1\Big). \tag{1}$$

Обозначим $v = x\exp((\log x)/y\log 2 + O(1/y))$, тогда нетрудно доказать, что из $\varphi(n_2)\le x$ следует $n_2\le v$. Отсюда остаток в правой части (1) есть $\ll$

$$x\sum_{\sqrt{x}<\varphi(n_1)\le x}\frac{1}{\varphi(n_1)}\sum_{n_2\le v}\frac{1}{\varphi(n_2)} \ll x\frac{\log x}{\log y}\sum_{\sqrt{x}<\varphi(n_1)\le x}\frac{1}{\varphi(n_1)}.$$

Пусть $\delta = (\log\log y)/\log\sqrt{x} + \log((\log x)/\log y)/\log y$, тогда в силу сделанных ограничений на y имеет место неравенство $0 \le \delta \le 1/3$, поэтому, применяя лемму 2 [1], получим

$$\sum_{\sqrt{x}<\varphi(n_1)\le x} \frac{1}{\varphi(n_1)} \ll x^{-\delta/2} \sum_{n_1} \varphi^{\delta-1}(n_1) \ll \exp\Bigl(-\frac{\log\sqrt{x}}{\log y}\log\frac{\log x}{\log y}\Bigr),$$

следовательно, остаток в правой части (1) есть $o(x)$.

Теперь представим сумму в правой части (1) в виде

$$\sum_{\varphi(n_1)\le\sqrt{x}} f(n_1)\Bigl(\sum_{n_2\le\frac{x}{\varphi(n_1)}} f(n_2) + O\Bigl(\sum_{\substack{\varphi(n_2)\le\frac{x}{\varphi(n_1)}\\ n_2>\frac{x}{\varphi(n_1)}}} 1\Bigr)\Bigr) = \sum_1 + O\Bigl(\sum_2\Bigr).$$

Так как $\varphi(n_2) \le x/\varphi(n_1)$, то $n_2 \le v/\varphi(n_1)$, следовательно, применяя фундаментальную лемму (см. [2], с. 79) при $\log y > \sqrt{\log x}$, получим

$$\sum_2 \ll x\prod_{p\le y}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)\Bigl[\exp\Bigl(\frac{\log x}{y\log 2} + O\Bigl(\frac{1}{y}\Bigr)\Bigr) - 1 + o(1)\Bigr]\sum_{\varphi(n_1)\le\sqrt{x}} 1/\varphi(n_1).$$

Сумма в правой части последней оценки есть $\ll \log y$. Так как $\exp(t) = 1 + O(t)$ при $|t| \le 1$, то при достаточно большом x получим $\sum_2 \ll (x\log x)/y = o(x)$, что завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Применяя неравенство $|\prod x_i - 1| \le \sum |x_i - 1|$, справедливое при $|x_i| \le 1$, получим

$$\sum_3 = \sum_{\varphi(n_1)\le\sqrt{x}} f(n_1) \sum_{n_2\le\frac{x}{\varphi(n_1)}} f(n_2) = \sum_{\varphi(n_1)\le\sqrt{x}} f(n_1) \sum_{n_2\le\frac{x}{\varphi(n_1)}} 1 + O(R),$$

где

$$R = \sum_{\varphi(n_1n_2)\le x} |f(n_2)-1| \le \sum_{y<p\le x} |f(p)-1| \sum_{\varphi(n)\le\frac{x}{p-1}} 1 + \sum_{\substack{\varphi(p^t)\le x\\ t\ge 2,\, p>y}} \sum_{\varphi(n)\le\frac{x}{\varphi(p^t)}} 1.$$

Оценивая внутренние суммы с помощью результата Дресслера, получим

$$R \ll x\sum_{y<p\le x}\frac{|f(p)-1|}{p} + o(x).$$

Из фундаментальной леммы при $\log y \ge \sqrt{\log x}$ следует

$$\sum_{\varphi(n_1)\le\sqrt{x}} f(n_1)\sum_{n_2\le\frac{x}{\varphi(n_1)}} 1 = x\prod_{p\le y}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)\sum_{\varphi(n_1)\le\sqrt{x}}\frac{f(n_1)}{\varphi(n_1)} + o(x)$$

Рассуждая, как и при доказательстве леммы, будем иметь

$$\sum_{\varphi(n_1)\le\sqrt{x}}\frac{f(n_1)}{\varphi(n_1)} = \sum_{n_1}\frac{f(n_1)}{\varphi(n_1)} + O\Bigl(\sum_{\varphi(n_1)>\sqrt{x}}\frac{1}{\varphi(n_1)}\Bigr) = \prod_{p\le y}\Bigl(1+\frac{p}{p-1}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{f(p^t)}{p^t}\Bigr) + o(1).$$

Собирая полученные оценки, получим

$$\sum_3 = x\prod_{p\le y}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)\Bigl(1+\frac{p}{p-1}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{f(p^t)}{p^t}\Bigr) + O\Bigl(x\sum_{y<p\le x}\frac{|f(p)-1|}{p}\Bigr) + o(x).$$

Повторяя доказательство следствия 1 [3], получим, что при $(\log x)/\log y \to \infty$ второе слагаемое в правой части последней оценки есть $o(x)$.

Завершает доказательство теоремы замечание, что произведение в правой части последней оценки равно $A_f(1+o(1))$.

Литература

1. Balasard M., Smati A. *Elementary proof of a theorem of Bateman* // В кн. Analytic Number Theory. Proceedings of Conference in Honor of Paul T. Bateman. – Birkhauser – Boston–Basel–Berlin. – 1990 – С.41–46.
2. Halberstam H., Richert H.-E. *Sieve Methods.* – L.–N.Y.: Academic Press. 1974.
3. Горюнов Ю.Ю. *Обобщение теоремы Деланжа.* – Пенз. гос. пед. ин-т, 1987. – 20 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.03.87. № 2048–В87.

Пензенский государственный педагогический университет

Поступила 18.11.1992