ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 515.5

Т.М. ВУКОЛОВА, М.И. ДЬЯЧЕНКО

ОЦЕНКИ СМЕШАННЫХ НОРМ СУММ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С КРАТНО МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе авторов [1] были установлены некоторые свойства сумм двойных рядов по синусам и косинусам с кратно-монотонными коэффициентами. В данной работе приводятся оценки норм сумм таких рядов в пространствах $L_{\bar p}$ со смешанной нормой.

1. Будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\cos mx\cos ny, \quad \text{(I)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\cos mx\sin ny, \quad \text{(II)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\sin mx\cos ny, \quad \text{(III)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\sin mx\cos ny, \quad \text{(VI)}$$

где для краткости положим $\cos 0x = \cos 0y = \frac{1}{2}$. Будем считать, что коэффициенты этих рядов удовлетворяют условию

$$\begin{gathered} a_{m,n}\to 0 \text{ при } m\to\infty \text{ и любом фиксированном } n \\ \text{и при } n\to\infty \text{ и любом фиксированном } m. \end{gathered} \tag{1}$$

Для целых $k_1 \geq 0$ и $k_2 \geq 0$ обозначим

$$\Delta_{k_1,k_2}a_{m,n} = \sum_{j=0}^{k_1}(-1)^i C_{k_1}^i \sum_{j=0}^{k_2}(-1)^j C_{k_2}^j a_{m+i,n+j}.$$

Пусть $B_0^1(X) = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
B_n^1(x) &= \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx && \text{для } n \geq 1,\\
B_n^k(x) &= \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu^{k-1}(x) && \text{для } k = 2,3,\dots \text{ и } n \geq 0;\\
\overline{B}_n^1(x) &= \sin x + \dots + \sin nx && \text{для } n \geq 1,\\
\overline{B}_n^k(x) &= \sum_{\nu=1}^{n} \overline{B}_\nu^{k-1}(x) && \text{для } k = 2,3,\dots \text{ и } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 93-01-00240.

Рассмотрим также ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Delta_{k_1,k_2}a_{m,n}B_m^{k_1}(x)B_n^{k_2}(y), \tag{I$'$}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Delta_{k_1,k_2}a_{m,n}B_m^{k_1}(x)\overline{B}_n^{k_2}(y), \tag{II$'$}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Delta_{k_1,k_2}a_{m,n}\overline{B}_m^{k_1}(x)B_n^{k_2}(y), \tag{III$'$}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Delta_{k_1,k_2}a_{m,n}\overline{B}_m^{k_1}(x)\overline{B}_n^{k_2}(y). \tag{IV$'$}$$

Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}C_{\mu,\nu} \tag{2}$$

и его прямоугольная сумма

$$S_{m,n}=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}C_{\mu,\nu}.$$

Если существует такое число S что для любого $\varepsilon>0$ найдутся натуральные числа k и l такие, что

$$|S_{m,n}-S|<\varepsilon$$

при любом $n>k$ и любом $m>l$, то говорят, что ряд (2) сходится при Прингсхейму к своей сумме S (см. [2], с. 27).

Теорема A. *Если последовательность $\{a_{m,n}\}$ удовлетворяет условию (1) и $\Delta_{k_1,k_2}a_{m,n}\geq 0$ для любых натуральных m и n и некоторых $k_1\geq 1$ и $k_2\geq 1$, то*

а) *каждый из рядов* I–IV *сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, т. е. существуют функции $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $f_3(x,y)$, $f_4(x,y)$ — суммы соответствующих рядов* I, II, III, IV;

б) *каждый из рядов* I$'$–IV$'$ *сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль соответственно к функциям $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $f_3(x,y)$, $f_4(x,y)$.*

Доказательство теоремы A см. в [3].

Лемма 1. *Пусть числовая последовательность $\{d_n\}$ такова, что $d_n\downarrow d\geq 0$ при $n\to\infty$, числа α, λ и p таковы, что $\alpha>1$, $p\in(0,\infty)$, $\lambda\in(-\infty,\infty)$. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\alpha}\left(\sum_{\nu=0}^{n}d_\nu(\nu+1)^{\lambda}\right)^{p}\leq C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\alpha}[d_n(n+1)^{\lambda+1}]^{p},$$

где постоянная C не зависит от последовательности $\{d_n\}$.

Доказательство см. в [1].

Лемма 2. *Существует положительная постоянная C, не зависящая от a ($a\geq\frac{1}{4}$), такая, что*

$$\int\limits_{a\pi}^{2a\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx\geq C.$$

Доказательство см. в [4].

Лемма 3. *Пусть числовая последовательность $\{d_n\}$ такова, что $d_n \downarrow$ $(d \geq 0)$ при $n \to \infty$, числа λ и p таковы, что $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $p \in (0,1]$. Тогда при любом ν*

$$\left(\sum_{n=1}^{\nu} d_n n^{\lambda-1}\right)^p \leq C \sum_{n=1}^{\nu} d_n^p n^{\lambda p-1},$$

где постоянная C зависит лишь от λ и p.

Доказательство. Пусть $2^N \leq \nu < 2^{N+1}$. Тогда, т. к. $d_n \downarrow$,

$$A = \sum_{n=1}^{\nu} d_n n^{\lambda-1} \leq \sum_{n=1}^{2^{N+1}} d_n n^{\lambda-1} \leq C_1(\lambda) \sum_{n=1}^{2^N} d_n n^{\lambda-1} =$$
$$= c_2(\lambda) \sum_{\mu=0}^{N} \sum_{n=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} d_n n^{\lambda-1} \leq \sum_{\mu=0}^{N} d_{2^\mu} \sum_{n=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} n^{\lambda-1} \leq$$
$$\leq C_2(\lambda) \sum_{\mu=0}^{N} d_{2^\mu} 2^{\mu\lambda}.$$

Теперь, пользуясь при $0 < p \leq 1$ неравенством

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^p \quad (a_k \geq 0),$$

имеем

$$A_p \leq C_2^p(\lambda) \sum_{\mu=0}^{N} d_{2^\mu}^p 2^{2\mu\lambda p} \leq C_3(\lambda,p)\left(d_1^p + \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{n=2^{\mu-1}+1}^{2^\mu} d_n^p n^p\right) \leq C_4 \sum_{n=1}^{2^N} d_n^p n^{\lambda p-1}. \quad \square$$

2. Будем писать, что $f(x,y) \in L_{\bar{p}}[-\pi,\pi]^2$, $\bar{p} = \{p_1,p_2\}$, $0 < p_i < \infty$, $i = 1,2$, если $f(x,y)$ — 2π-периодическая по каждому переменному и измеримая на $[-\pi,\pi]^2$ функция и

$$\|f(x,y)\|_{\bar{p}} = \left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|^{p_1}\,dx\right)^{p_2/p_1} dy\right]^{1/p_2} < \infty.$$

Теорема. *Пусть числовая последовательность $\{a_{m,n}\}$ удовлетворяет условию (1) и $\Delta_{k_1,k_2} a_{m,n} \geq 0$ для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2 и любых целых неотрицательных чисел m и n. Тогда при любых $p_i \in (0,\infty)$ справедливы неравенства*
а) *если $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, то*

$$A_1\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2p_2-2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{2p_1-2}(\Delta_{1,1}a_{m,n})^{p_1}\right]^{p_2/p_1}\right\}^{1/p_2} \leq \|f_1(x,y)\|_{\bar{p}} \leq$$
$$\leq A_2\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2p_2-2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{2p_1-2}(\Delta_{1,1}a_{m,n})^{p_1}\right]^{p_2/p_1}\right\}^{1/p_2};$$

б) *если $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, то*

$$A_3\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{p_2-2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{2p_1-2}(\Delta_{1,0}a_{m,n})^{p_1}\right]^{p_2/p_1}\right\}^{1/p_2} \leq \|f_2(x,y)\|_{\bar{p}} \leq$$
$$\leq A_4\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{p_2-2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{2p_1-2}(\Delta_{1,0}a_{m,n})^{p_1}\right]^{p_2/p_1}\right\}^{1/p_2};$$

в) *если* $k_1=1,\ k_2=2,$ *то*

$$A_5\Bigg\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2p_2-2}\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)^{p_1-2}(\Delta_{0,1}a_{m,n})^{p_1}\Bigg]^{p_2/p_1}\Bigg\}^{1/p_2}\le\|f_3(x,y)\|_{\bar p}\le$$

$$\le A_6\Bigg\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2p_2-2}\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)^{p_1-2}(\Delta_{0,1}a_{m,n})^{p_1}\Bigg]^{p_2/p_1}\Bigg\}^{1/p_2};$$

г) *если* $k_1=1,\ k_2=1,$ *то*

$$A_7\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{p_2-2}\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)^{p_1-2}a_{m,n}^{p_1}\Bigg]^{p_2/p_1}\Bigg\}^{1/p_2}\le\|f_4(x,y)\|_{\bar p}\le$$

$$\le A_8\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{p_2-2}\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)^{p_1-2}a_{m,n}^{p_1}\Bigg]^{p_2/p_1}\Bigg\}^{1/p_2};$$

где положительные постоянные A_i $(i=\overline{1,8})$ *не зависят от последовательности* $\{a_{m,n}\}$.

Отметим, что вышеописанные неравенства понимаются так: из конечности правой части неравенства следует конечность его левой части. Данный результат является обобщением известной теоремы Харди-Литтльвуда.

3. Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что коэффициенты $a_{m,n}$ обладают свойством: $\Delta_{l_1,l_2}a_{m,n}\ge 0$, где $l_1=l_2=0$ в случае а), $l_1=2,\ l_2=1$ в случае б), $l_1=1,\ l_2=2$ в случае в), $l_1=l_2=1$ в случае г).

Сначала докажем оценки сверху

По теореме А почти всюду справедливо равенство

$$F(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Delta_{l_1,l_2}a_{m,n}\widetilde{B}_m^{l_1}(x)\widetilde{B}_n^{l_2}(y),\tag{3}$$

где приняты следующие обозначения в случаях:

а) $F(x,y)=f_1(x,y)$,

$$\widetilde{B}_m^{l_1}(x)=B_m^2(x);\quad \widetilde{B}_n^{l_2}(y)=B_n^2(y);$$

б) $F(x,y)=f_2(x,y)$,

$$\widetilde{B}_m^{l_1}(x)=B_m^2(x);\quad \widetilde{B}_n^{l_2}(y)=\widetilde{B}_n^1(y);$$
$$\Delta_{2,1}a_{m,0}=\Delta_{0,1}a_{m,0}=0\quad\text{для } m=0,1,2,\dots;$$

в) $F(x,y)=f_3(x,y)$,

$$\widetilde{B}_m^{l_1}(x)=\widetilde{B}_m^1(x);\quad \widetilde{B}_n^{l_2}(y)=B_n^2(y);$$
$$\Delta_{1,2}a_{0,n}=\Delta_{0,1}a_{0,n}=0\quad\text{для } n=0,1,2,\dots;$$

г) $F(x,y)=f_4(x,y)$,

$$\widetilde{B}_m^{l_1}(x)=\overline{B}_m^1(x);\quad \widetilde{B}_n^{l_2}(y)=\overline{B}_n^1(y);$$
$$\Delta_{1,1}a_{m,0}=a_{m,0}=0\quad\text{для } m=0,1,2,\dots,$$
$$\Delta_{1,1}a_{0,n}=a_{0,n}=0\quad\text{для } n=0,1,2,\dots$$

Теперь рассмотрим

$$J=\|F(x,y)\|_{\bar p}^{p_2}=2^{1+\frac{p_2}{p_1}}\int_0^{\pi}\Bigg[\int_0^{\pi}|F(x,y)|^{p_1}dx\Bigg]^{p_2/p_1}dy.$$

Применяя равенство (3), получим

$$\overline{C}(p_1,p_2)J=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\nu+2}^{\pi/\nu+1}\Bigg[\sum_{\mu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\mu+2}^{\pi/\mu+1}\Bigg|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Delta_{l_1,l_2}a_{m,n}\widetilde{B}_m^{l_1}(x)\widetilde{B}_n^{l_2}(y)\Bigg|^{p_1}dx\Bigg]^{p_2/p_1}dy.$$

Применяя неравенство $(a+b)^q\le 2^q(|a|^q+|b|^q)$, имеем

$$J\le C(p_1,p_2)(J_1+J_2+J_3+J_4),$$

где

$$J_1=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\nu+2}^{\pi/\nu+1}\Bigg[\sum_{\mu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\mu+2}^{\pi/\mu+1}\Bigg|\sum_{n=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{\mu}\Delta_{l_1,l_2}a_{m,n}\widetilde{B}_m^{l_1}(x)\widetilde{B}_n^{l_2}(y)\Bigg|^{p_1}dx\Bigg]^{p_2/p_1}dy,$$

$$J_2=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\nu+2}^{\pi/\nu+1}\Bigg[\sum_{\mu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\mu+2}^{\pi/\mu+1}\Bigg|\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\mu}\Delta_{l_1,l_2}a_{m,n}\widetilde{B}_m^{l_1}(x)\widetilde{B}_n^{l_2}(y)\Bigg|^{p_1}dx\Bigg]^{p_2/p_1}dy,$$

$$J_3=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\nu+2}^{\pi/\nu+1}\Bigg[\sum_{\mu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\mu+2}^{\pi/\mu+1}\Bigg|\sum_{n=0}^{\nu}\sum_{m=\mu+1}^{\infty}\Delta_{l_1,l_2}a_{m,n}\widetilde{B}_m^{l_1}(x)\widetilde{B}_n^{l_2}(y)\Bigg|^{p_1}dx\Bigg]^{p_2/p_1}dy,$$

$$J_4=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\nu+2}^{\pi/\nu+1}\Bigg[\sum_{\mu=0}^{\infty}\int\limits_{\pi/\mu+2}^{\pi/\mu+1}\Bigg|\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\sum_{m=\mu+1}^{\infty}\Delta_{l_1,l_2}a_{m,n}\widetilde{B}_m^{l_1}(x)\widetilde{B}_n^{l_2}(y)\Bigg|^{p_1}dx\Bigg]^{p_2/p_1}dy.$$

Далее будем пользоваться при оценке конечных сумм неравенствами

$$\widetilde{B}_m^{l_1}(x)\le C(m+1)^{l_1},\quad \widetilde{B}_n^{l_2}(y)\le C(n+1)^{l_2},$$

а при оценке бесконечных сумм — неравенствами

$$\widetilde{B}_m^{l_1}(x)\le\frac{C}{x^{l_1}},\quad \widetilde{B}_n^{l_2}(y)\le\frac{C}{y^{l_2}},\quad l_i=1,2,$$

где положительная постоянная C не зависит ни от n, ни от m, ни от x, ни от y. Пользуясь этими оценками, получаем

$$J_1=C_1\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{-2}\Bigg[\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+1)^{-2}\Bigg(\sum_{n=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{\mu}\Delta_{l_1,l_2}a_{m,n}(m+1)^{l_1}(n+1)^{l_2}\Bigg)^{p_1}\Bigg]^{p_2/p_1}.$$

Применяя свойства

$$\Delta_{l_1,l_2}a_{m,n}=\Delta_{l_1-1,l_2}a_{m,n}-\Delta_{l_1-1,l_2}a_{m+1,n}$$

и

$$\Delta_{l_1-1,l_2}a_{m,n}\ge 0,$$

получим

$$J_1=C_2\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{-2}\Bigg[\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+1)^{-2}\Bigg(\sum_{n=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{\mu}\Delta_{l_1-1,l_2-1}a_{m,n}(m+1)^{l_1-1}(n+1)^{l_2-1}\Bigg)^{p_1}\Bigg]^{p_2/p_1}.$$

Обозначим

$$b_m=\sum_{n=0}^{\nu}\Delta_{l_1-1,l_2-1}a_{m,n}(n+1)^{l_2-1}$$

и рассмотрим

$$J_1^*(\nu)=\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+1)^{-2}\Bigg(\sum_{m=0}^{\mu}b_m(m+1)^{l_1-1}\Bigg)^{p_1}.$$

По лемме 1

$$J_1^*(\nu) = C_3 \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{-2} [b_\mu (\mu+1)^{l_1}]^{p_1} =$$
$$= C_3 \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{-2} \Big[\sum_{n=0}^{\nu} \Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,n} (\mu+1)^{l_1} (n+1)^{l_2-1} \Big]^{p_1} =$$
$$= C_3 \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} \Big[\sum_{n=0}^{\mu} \Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,n} (n+1)^{l_2-1} \Big]^{p_1}.$$

Теперь имеем

$$J_1 \le C_4 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-2} \Big[\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} \Big(\sum_{n=0}^{\nu} \Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,n} (n+1)^{l_2-1} \Big)^{p_1} \Big]^{p_2/p_1} =$$
$$= C_4 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-2} \Big[\sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\nu} \Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,n} (n+1)^{l_2-1} (\mu+1)^{l_1 - 2/p_1} \Big)^{p_1} \Big]^{p_2/p_1} =$$
$$= C_4 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-2} (J_2^*(\nu))^{p_2/p_1}. \tag{4}$$

1) Пусть $p_1 \ge 1$. Применяя неравенство Минковского, получим

$$J_2^*(\nu) \le C_5 \Big\{ \sum_{n=0}^{\nu} \Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} [\Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,n} (n+1)^{l_2-1}]^{p_1} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} \Big)^{1/p_1} \Big\}^{p_2}.$$

Тогда

$$J_1 \le C_6 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-2} \Big\{ \sum_{n=0}^{\nu} \Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} [\Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,n} (n+1)^{l_2-1}]^{p_1} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} \Big)^{1/p_1} \Big\}^{p_2}.$$

Обозначим

$$C_n = \Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} [\Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,n} (n+1)^{l_2-1}]^{p_1} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} \Big)^{1/p_1}.$$

Тогда

$$J_1 \le C_7 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-2} \Big\{ \sum_{n=0}^{\nu} c_n \Big\}^{p_2}$$

и по лемме 1 имеем

$$J_1 \le C_8 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-2} \{ (\nu+1) c_\nu \}^{p_2} =$$
$$= C_8 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-2} \Big\{ (\nu+1) \Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} [\Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,\nu} (\nu+1)^{l_2-1}]^{p_1} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} \Big)^{1/p_1} \Big\}^{p_2} =$$
$$= C_8 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{l_2 p_2 - 2)} \Big\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} (\Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,\nu} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} \Big\}^{p_2/p_1}.$$

2) Пусть $0 < p_1 < 1$. Применяя лемму 3, получим

$$\Big(\sum_{n=0}^{\nu} \Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,n} (n+1)^{l_2-1} \Big)^{p_1} \le C_9 \sum_{n=0}^{\nu} (\Delta_{l_1-1,l_2-1} a_{\mu,n})^{p_1} (n+1)^{l_2 p_1 - 1}.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (4), имеем

$$J_1 \le C_{10} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-2} \Big[\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} \sum_{n=0}^{\nu} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{\mu,n})^{p_1} (n+1)^{l_2 p_1 - 1} \Big]^{p_2/p_1} \le$$
$$\le C_{11} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-2} \Big[\sum_{n=0}^{\nu} (n+1)^{l_2 p_1 - 2} \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} (\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{\mu,n})^{p_1} \Big]^{p_2/p_1}.$$

Обозначив

$$d_n = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} (\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{\mu,n})$$

и применив лемму 1, получим

$$J_1 \le C_{12} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{l_2 p_2 - 2} \Big[\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} (\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{\mu,\nu})^{p_1} \Big]^{p_2/p_1}.$$

Следовательно, для любого $p_1 \in (0, \infty)$ справедлива эта оценка для J_1, где постоянная C_{12} не зависит от последовательности $\{a_{m,n}\}$.

Теперь оценим

$$J_2 \le C_{13} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{l_2 p_2 - 2} \Big[\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{-2} \Big(\sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \Delta_{l_1, l_2} a_{m,n} (m+1)^{l_1} \Big)^{p_1} \Big]^{p_2/p_1} \le$$
$$\le C_{14} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{l_2 p_2 - 2} \Big[\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{-2} \Big(\sum_{m=0}^{\mu} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{m,\nu+1} (m+1)^{l_1-1} \Big)^{p_1} \Big]^{p_2/p_1}.$$

Применяя теперь к выражению в квадратных скобках лемму 1, имеем

$$J_2 \le C_{15} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{l_2 p_2 - 2} \Big[\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{l_1 p_1 - 2} (\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{\mu,\nu+1})^{p_1} \Big]^{p_2/p_1},$$

где положительная постоянная C_{15} не зависит от последовательности $\{a_{m,n}\}$

Оценки J_3 и J_4 проводятся аналогично оценкам для J_1 и J_2.

Итак, получаем

$$J \le C \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{l_2 p_2 - 2} \Big[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{l_1 p_1 - 2} (\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{m,n})^{p_1} \Big]^{p_2/p_1},$$

где положительная постоянная C не зависит от последовательности $\{a_{m,n}\}$.

Подставляя вместо l_1 и l_2 либо 2, либо 1, получаем справедливость оценок сверху в теореме.

Теперь докажем оценки снизу. По теореме A почти всюду справедливы равенства

a)

$$\varphi_1(x,y) \equiv f_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} \cos mx \cos ny =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Delta_{2,2} b_{m,n} \Big(\frac{\sin \frac{(m+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \Big)^2 \Big(\frac{\sin \frac{(n+1)y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}} \Big)^2,$$

где $b_{m,n} \equiv a_{m,n}$;

б)

$$\varphi_2(x,y) \equiv \frac{1}{2}\{f_2(x,y) + f_2(x,\pi - y)\} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,2n-1}\cos mx \sin(2n-1)y =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \Delta_{2,1} b_{m,n}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{\sin^2 ny}{\sin y},$$

где $b_{m,n} = a_{m,2n-1}$;

в)

$$\varphi_3(x,y) \equiv \frac{1}{2}\{f_3(x,y) + f_3(\pi - x,y)\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1,n} sin(2n-1)x \cos ny =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \Delta_{1,2} b_{m,n}\frac{\sin^2 mx}{\sin x}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}}\right)^2,$$

где $b_{m,n} = a_{2m-1,n}$;

г)

$$\varphi_4(x,y) \equiv \frac{1}{4}\{f_4(x,y) + f_4(\pi - x,y) + f_4(x,\pi - y) + f_4(\pi - x,\pi - y)\} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1,2n-1}\sin(2n-1)x \sin(2m-1)y =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \Delta_{1,1} b_{m,n}\frac{\sin^2 mx}{\sin x}\frac{\sin^2 ny}{\sin y},$$

где $b_{m,n} = a_{2m-1,2n-1}$.

Таким образом, почти всюду справедливы равенства

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \Delta_{l_1,l_2} b_{m,n}\widehat{B}_m^{l_1}(x)\widehat{B}_n^{l_2}(y),$$

где приняты следующие обозначения в случаях:

а)

$$\Phi = \varphi_1, \quad l_1 = l_2 = 2, \quad \widehat{B}_m^{l_1}(x) = B_m^2(x), \quad \widehat{B}_n^{l_2}(y) = B_n^2(y);$$

б)

$$\Phi = \varphi_2, \quad l_1 = 2, \quad l_2 = 1, \quad \widehat{B}_m^{l_1}(x) = B_m^2(x), \quad \widehat{B}_n^{l_2}(y) = \frac{\sin^2 ny}{\sin y},$$
$$\Delta_{2,1} b_{m,0} = \Delta_{1,0} b_{m,0} = b_{m,0} = 0 \quad \text{для } m = 0,1,2,\dots\ ;$$

в)

$$\Phi = \varphi_3, \quad l_1 = 1, \quad l_2 = 2, \quad \widehat{B}_m^{l_1}(x) = \frac{\sin^2 mx}{\sin x} \quad \widehat{B}_n^{l_2}(y) = B_n^2(y),$$
$$\Delta_{1,2} b_{0,n} = \Delta_{0,1} b_{0,n} = b_{0,n} = 0 \quad \text{для } n = 0,1,2,\dots\ ;$$

г)

$$\Phi=\varphi_4,\quad l_1=l_2=1,\quad \widehat{B}_m^{l_1}(x)=\frac{\sin^2 mx}{\sin x},\quad \widehat{B}_n^{l_2}(y)=\frac{\sin^2 ny}{\sin y},$$
$$\Delta_{1,1}b_{0,n}=b_{0,n}=0 \quad \text{для } n=0,1,2,\ldots,$$
$$\Delta_{1,1}b_{m,0}=b_{m,0}=0 \quad \text{для } m=0,1,2,\ldots$$

Оценим $J=\|\Phi\|_{\bar p}^{p_2}$:

$$J\geq\int\limits_0^\pi\Big[\int\limits_0^\pi|\Phi(x,y)|^{p_1}\,dx\Big]^{p_2/p_1}dy=\sum_{s_2=0}^\infty\int\limits_{\pi/2^{s_2+1}}^{\pi/2^{s_2}}\Big[\sum_{s_1=0}^\infty\int\limits_{\pi/2^{s_1+1}}^{\pi/2^{s_1}}|\Phi|^{p_1}\,dx\Big]^{p_2/p_1}dy\geq$$
$$\geq\sum_{s_2=i}^\infty\int\limits_{\pi/2^{s_2+1}}^{\pi/2^{s_2}}\Big[\sum_{s_1=j}^\infty\int\limits_{\pi/2^{s_1+1}}^{\pi/2^{s_1}}|\Phi|^{p_1}\,dx\Big]^{p_2/p_1}dy,$$

где $i=j=0$ для φ_1, $i=0$, $j=1$ для φ_2, $i=1$, $j=0$ для φ_3, $i=j=1$ для φ_4.

Ясно, что

$$J\geq\sum_{s_2=j}^\infty\int\limits_{\pi/2^{s_2+1}}^{\pi/2^{s_2}}\Big[\sum_{s_1=i}^\infty\int\limits_{\pi/2^{s_1+1}}^{\pi/2^{s_1}}\varphi_{s_1,s_2}^{p_1}(x,y)dx\Big]^{p_2/p_1}dy,$$

где

$$\varphi_{s_1,s_2}(x,y)=\sum_{n=2^{s_1-1}}^\infty\sum_{m=2^{s_1-1}}^\infty\Delta_{l_1,l_2}b_{m,n}\widehat{B}_m^{l_1}(x)\widehat{B}_n^{l_2}(y).$$

Для рассматриваемых номеров s_1 и s_2 справедливы оценки

$$\widehat{B}_m^{l_1}(x)\leq\frac{c_{21}}{x^{l_1}},\qquad \widehat{B}_n^{l_2}(y)\leq\frac{c_{22}}{y^{l_2}},$$

где положительные постоянные C_{21} и C_{22} не зависят от x, y, m и n. Но тогда

$$\varphi_{s_1,s_2}(x,y)\leq\frac{C_{21}C_{22}}{x^{l_1}y^{l_2}}\sum_{n=2^{s_2-1}}^\infty\sum_{m=2^{s_1-1}}^\infty\Delta_{l_1,l_2}b_{m,n}\leq C_{23}2^{l_1s_1+l_2s_2}\Delta_{l_1-1,l_2-1}b_{2^{s_1}-1,2^{s_2}-1}.$$

Рассмотрим теперь

$$A_1=\iint\limits_{I_{s_1,s_2}}\varphi_{s_1,s_2}(x,y)dx\,dy,$$

где

$$I_{s_1,s_2}=\Big[\frac{\pi}{2^{s_1+1}},\frac{\pi}{2^{s_1}}\Big]\times\Big[\frac{\pi}{2^{s_2+1}},\frac{\pi}{2^{s_2}}\Big]=I_{s_1}\times I_{s_2}.$$

Ясно, что

$$A_1=\sum_{n=2^{s_2-1}}^\infty\sum_{m=2^{s_1-1}}^\infty\Delta_{l_1,l_2}b_{m,n}\int\limits_{\pi/2^{s_1+1}}^{\pi/2^{s_1}}\widehat{B}_m^{l_1}(x)dx\int\limits_{\pi/2^{s_2+1}}^{\pi/2^{s_2}}\widehat{B}_m^{l_2}(y)dy.$$

Так как

$$B_1=\int\limits_{\pi/2^{k+1}}^{\pi/2^k}\frac{\sin^2 Nz}{\sin z}dz\geq\int\limits_{\pi/2^{k+1}}^{\pi/2^k}\frac{\sin^2 Ny}{y}dy=\int\limits_{N\pi/2^{k+1}}^{2N\pi/2^{k+1}}\frac{\sin^2 x}{x}dx,$$

то для $k\geq1$ и $N\geq2^k-1$ по лемме 2 имеем $B_1\geq C_{24}$. Так как

$$B_2=\int\limits_{\pi/2^{k+1}}^{\pi/2^k}\left(\frac{\sin^2\frac{(N+1)z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}}\right)^2dz\geq C_{25}2^k\int\limits_{\pi/2^{k+1}}^{\pi/2^k}\frac{(\sin\frac{(N+1)z}{2})^2}{z}dz=C_{25}2^k\int\limits_{(N+1)\pi/2^{k+2}}^{2(N+1)\pi/2^{k+2}}\frac{\sin^2 x}{x}dx,$$

то для $k \geq 1$ и $N \geq 2^k - 1$ по лемме 2 имеем $B_2 \geq C_{26} 2^k$.

Но тогда для рассматриваемых s_1 и s_2 получим

$$A_1 \geq C_{27} 2^{s_1(l_1-1)+s_2(l_2-1)} \Delta_{l_1-1,l_2-1} b_{2^{s_1}-1,2^{s_2}-1}. \tag{5}$$

Положим для фиксированных s_1 и s_2 и для $y \in I_{s_2}$

$$J_{s_1,s_2}(y) = \Big\{x \in I_{s_1} : \varphi_{s_1,s_1}(x,y) \geq \frac{C_{27}}{\pi^2} 2^{s_1 l_1 + s_2 l_1} \Delta_{l_1-1,l_2-1} b_{2^{s_1}-1,2^{s_2}-1}\Big\}$$

и

$$J_{s_2} = \Big\{y \in I_{s_2} : \mu J_{s_1,s_2}(y) \geq \frac{C_{27}}{\pi^2 C_{23}} \frac{\pi}{2^{s_1+1}}\Big\}.$$

Докажем, что

$$\mu J_{s_2} \geq \frac{C_{27}}{\pi^2 C_{23}} \frac{\pi}{2^{s_2+1}}.$$

Предположим противное, т. е.

$$\mu J_{s_2} < \frac{C_{27}}{\pi^2 C_{23}} \frac{\pi}{2^{s_2+1}}. \tag{6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
A_1 = \iint\limits_{I_{s_1,s_2}} \varphi_{s_1,s_2}(x,y) dx\, dy = \int\limits_{I_{s_2}} \Big(\int\limits_{I_{s_1}} \varphi_{s_1,s_1}(x,y) dx \Big) dy + \\
+ \int\limits_{I_{s_2} \setminus J_{s_2}} \Big(\int\limits_{J_{s_1,s_2}(y)} \varphi_{s_1,s_2}(x,y) dx \Big) dy + \int\limits_{I_{s_2} \setminus J_{s_2}} \Big(\int\limits_{I_{s_1} \setminus J_{s_1,s_2}(y)} \varphi_{s_1,s_2}(x,y) dx \Big) dy \leq \\
\leq \frac{C_{27}}{\pi^2 C_{23}} \frac{\pi}{2^{s_2+1}} \frac{\pi}{2^{s_1+1}} C_{23} 2^{s_1 l_1 + s_2 l_2} \Delta_{l_1-1,l_2-1} b_{2^{s_1}-1,2^{s_2}-1} + \\
+ \frac{\pi}{2^{s_2+1}} \frac{C_{27}}{\pi^2 C_{23}} \frac{\pi}{2^{s_1+1}} C_{23} 2^{s_1 l_1 + s_2 l_2} \Delta_{l_1-1,l_2-1} b_{2^{s_1}-1,2^{s_2}-1} + \\
+ \frac{\pi}{2^{s_2+1}} \frac{\pi}{2^{s_1+1}} \frac{C_{27}}{\pi^2} 2^{s_1 l_1 + s_2 l_2} \Delta_{l_1-1,l_2-1} b_{2^{s_1}-1,2^{s_2}-1} = \\
= \frac{3}{4} C_{27} 2^{s_1(l_1-1)+s_2(l_2-1)} \Delta_{l_1-1,l_2-1} b_{2^{s_1}-1,2^{s_2}-1},
\end{aligned}$$

что противоречит неравенству (5). Следовательно, справедливо неравенство (6).

Но тогда

$$\begin{aligned}
J = \|\Phi\|_{\bar{p}}^{p_1} \geq \sum_{s_2=i}^{\infty} \int\limits_{J_{s_2}} \Big[\sum_{s_1=j}^{\infty} \int\limits_{J_{s_1,s_2}(y)} (\varphi_{s_1,s_2}(x,y))^{p_1} dx \Big]^{p_2/p_1} dy \geq \\
\geq C_{28} \sum_{s_2=i}^{\infty} 2^{s_2(l_2 p_2 - 1)} \Big[\sum_{s_1=j}^{\infty} 2^{s_1(l_1 p_1 - 1)} (\Delta_{l_1-1,l_2-1} b_{2^{s_1}-1,2^{s_2}-1})^{p_1} \Big]^{p_2/p_1} \equiv C_{28} I.
\end{aligned}$$

Для $i = j = 1$

$$\begin{aligned}
C_{29} I \geq \sum_{s_2=1}^{\infty} \sum_{\mu=2^{s_2}-1}^{2^{s_2}-1} \mu^{l_2 p_2 - 2} \Big[\sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{s_1}-1}^{2^{s_1}-1} \nu^{l_1 p_1 - 2} (\Delta_{l_1-1,l_2-1} b_{\nu,\mu})^{p_1} \Big]^{p_2/p_1} = \\
= \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{l_2 p_2 - 2} \Big[\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{l_1 p_1 - 2} (\Delta_{l_1-1,l_2-1} b_{\nu,\mu})^{p_1} \Big]^{p_2/p_1}.
\end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются и другие случаи. Поэтому

$$J=\|\Phi\|_{\bar p}^{p_1}\geq C\sum_{\mu=j}^{\infty}(\mu+1)^{l_2p_2-2}\left[\sum_{\nu=i}^{\infty}(\nu+1)^{l_1p_1-2}(\Delta_{l_1-1,l_2-1}b_{\nu,\mu})^{p_1}\right]^{p_2/p_1}.$$

Подставляя сюда вместо $b_{\nu,\mu}$ соответствующие $a_{\nu,\mu}$, или $a_{\nu,2\mu-1}$, или $a_{2\nu-1,\mu}$, или $a_{2\nu-1,2\mu-1}$ получаем справедливость оценки снизу в теореме.

В заключение заметим, что в [5] рассматриваются условия на коэффициенты двойных рядов Уолша, близкие к тем, которые налагаются в данной статье.

Литература

1. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. *Оценки норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 7. – С. 20–28.
2. Уитеккер Э.Т., Ватсон Дж.И. *Курс современного анализа.*: М., 1963.
3. Hardy G.H. *On double Fourier series and especially those which represent the double zeta functions with real and incommensurable parameters* // Quart. J. Math. – 1906. - V. 37. – № 1. – P. 53–79.
4. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. *О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. матем., механ. – 1995. – № 3. – С. 22–31.
5. Moricz F., Schipp F. *On the integrability and L^1-convergence of double Walsh series* // Acta math. Hung. – 1991. – V. 57. – № 3–4. – P. 371–380.

Московский государственный университет

Поступила
11.05.1995