ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 517.518

А.М. СТОКОЛОС

О СИЛЬНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ИНТЕГРАЛОВ ФУНКЦИЙ ИЗ МНОГОМЕРНЫХ КЛАССОВ ХАРДИ

Многомерные классы Харди были введены Ч. Фефферманом и Е.М. Стейном [1] и в дальнейшем детально изучались различными авторами (см., напр., [2]–[4]). Выяснилось, что во многих важных случаях классы Харди являются подходящей заменой для L^1, т. к. в них продолжают быть ограниченными некоторые важные сингулярные интегральные операторы, ограниченные в L^p, $p > 1$, но не в L^1.

С этой точки зрения представляется весьма интересным вопрос о сильном дифференцировании интегралов функций из классов Харди, поскольку интегралы функций из L^p, $p > 1$, дифференцируются сильным образом, а из L^1 нет. *Ниже будет показано, что ответ отрицательный.*

Поскольку дифференцирование интегралов есть свойство локальное, то имеет смысл определить пространство Харди через атомическое разложение, установленное в классическом случае Р. Койфманом [5] и распространенное на многомерный случай П. Леттером [6].

А именно, *атомом* назовем функцию $a(x)$ такую, что

(i) $\operatorname{supp} a(x) \subset Q \subset T^d \equiv [0,1]^d$, Q — куб;
(ii) $\|a\|_\infty \le |Q|^{-1}$;
(iii) $\int\limits_Q a(x)dx = 0$.

Функцию $a(x) \equiv 1$ также будем считать атомом.

Классом Харди $\mathcal{H}$ будем называть множество суммируемых функций $f(x)$, допускающих представление в виде ряда из атомов $a_k(x)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(x), \quad \lambda_k \ge 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Итак, покажем, что интегралы функций из $\mathcal{H}$ не дифференцируемы сильным образом. Достаточно ограничиться двумерным случаем.

Теорема. *Существует функция $f \in \mathcal{H}$ такая, что для почти всех $x \in T^2$*

$$\limsup_{\operatorname{diam} I \to 0} |I|^{-1} \int_{I \ni x} f(y)dy = +\infty, \quad \liminf_{\operatorname{diam} I \to 0} |I|^{-1} \int_{I \ni x} f(y)dy = -\infty, \tag{1}$$

где I обозначает двумерный интервал.

Доказательство. Схема доказательства восходит к работе С. Сакса [7]. Отличие состоит в том, что вместо ряда из положительных функций мы конструируем ряд из атомов и доказываем его сходимость. Кроме того, при оценке интегральных средних в силу наличия слагаемых разного знака мы не можем оставлять от суммы одно слагаемое, а оцениваем предыдущие слагаемые и остаток ряда.

Перейдем непосредственно к доказательству. Положив $s_j = \sum\limits_{i=1}^{j} 2^i i^{-2}$, определим числа $m_n \uparrow \infty$ следующим образом:

$$m_1 = 1, \ \ m_{n+1} - m_n = j, \quad s_j < n \le s_{j+1}, \ \ j \ge 7.$$

Иными словами, $\{m_n\}$ представляет собой объединение арифметических прогрессий, шаг которых увеличивается на единицу.

Перейдем к построению функции f. На n-ом шаге будем разбивать T^2 на 2^{2m_n} одинаковых двоично-рациональных квадратов I_k^n:

$$T^2 = \bigcup_{k=1}^{2^{2m_n}} I_k^n, \quad |I_k^n| = 2^{-2m_n}, \quad I_k^n \bigcap I_j^n \ne \emptyset \quad (k \ne j).$$

Внутрь каждого I_k^n поместим квадраты $Q_k^{n,+}$ и $Q_k^{n,-}$ со сторонами, параллельными осям координат так, чтобы левая нижняя вершина $Q_k^{n,+}$ и правая верхняя $Q_k^{n,-}$ совпали с центром I_k^n (черные квадраты на рис.) и

$$|Q_k^{n,+}| = 2^{-2m_{n+1}}. \tag{2}$$

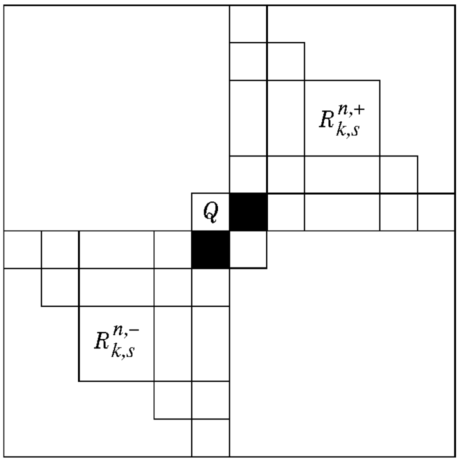

Рис.

В дальнейшем наличие индекса $\pm$ будет означать, что требуемое соотношение выполняется как с индексом $+$, так и с индексом $-$.

Пусть $R_{k,s}^{n,+}$ и $R_{k,s}^{n,-}$ — прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, содержащие $Q_k^{n,+}$ и $Q_k^{n,-}$ в левом нижнем и правом верхнем углах соответственно (см. рис.). При этом проекция $R_{k,s}^{n,+}$ на ось OX имеет длину 2^{-s}, $s = m_n + 1, \dots, m_{n+1}$, и

$$|R_{k,s}^{n,\pm}| = 2^{-m_{n+1} - m_n - 1}, \ \ n \ge 1, \ \ k = 1, \dots, 2^{2m_n}; \ \ s = m_n + 1, \dots, m_{n+1}.$$

Положим теперь

$$H_k^{n,\pm} \equiv \bigcup_{s=m_n+1}^{m_{n+1}} R_{k,s}^{n,\pm}, \quad H^{n,\pm} \equiv \bigcup_{k=1}^{2^{2m_n}} H_k^{n,\pm}.$$

Тогда

$$|H_k^{n,\pm}| \ge 2^{2m_n}(m_{n+1} - m_n) 2^{-m_{n+1} - m_n} 2^{-2} = 2^{-2} 2^{m_n - m_{n+1}} (m_{n+1} - m_n)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}|H^{n,\pm}| \geq 2^{-2}\sum_{j=7}^{\infty}\sum_{s_j<n\leq s_{j+1}} 2^{m_n-m_{n+1}}(m_{n+1}-m_n) \geq$$

$$\geq 2^{-3}\sum_{j=7}^{\infty} j\,2^{-j}(s_{j+1}-s_j) \geq 2^{-3}\sum_{j=7}^{\infty} j\,2^{-j}2^j j^{-2} = 2^{-3}\sum_{j=7}^{\infty}\frac{1}{j} = \infty.$$

Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|H^{n,\pm}| = \infty. \tag{3}$$

Покажем, что для любых $1 \leq p < q$

$$\Big|T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{q} H^{n,\pm}\Big| = \prod_{n=p}^{q}(1-H^{n,\pm}). \tag{4}$$

Случай $q = p$ очевиден. Опишем переход от q к $q+1$. В силу двоичной рациональности $\{I_k^n\}$ возможно представление

$$T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{q} H^{n,\pm} = \bigcup_{k\in A(p,q)} I_k^{q+1}, \tag{5}$$

где $A(p,q)$ — некоторый набор индексов. Тогда

$$T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{q+1} H^{n,\pm} = T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{q} H^{n,\pm} \setminus \bigcup_{k\in A(p,q)} H_k^{q+1,\pm},$$

причем

$$\Big|T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{q+1} H^{n,\pm}\Big| = \Big|T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{q} H^{n,\pm}\Big| - \Big|\bigcup_{k\in A(p,q)} H_k^{q+1,\pm}\Big|. \tag{6}$$

Однако

$$\Big|\bigcup_{k\in A(p,q)} H_k^{q+1,\pm}\Big| = \sum_{k\in A(p,q)}|H_k^{q+1,\pm}| = \sum_{k\in A(p,q)}|I_k^{q+1,\pm}|\frac{|H_k^{q+1,\pm}|}{|I_k^{q+1,\pm}|}$$

и по построению

$$\frac{|H_k^{q+1,\pm}|}{|I_k^{q+1,\pm}|} = \frac{|H^{q+1,\pm}|}{|T^2|} = |H^{q+1,\pm}|.$$

Тогда с учетом (5) получим

$$\Big|\bigcup_{k\in A(p,q)} H_k^{q+1,\pm}\Big| = |H^{q+1,\pm}|\sum_{k\in A(p,q)}|I_k^{q+1,\pm}| = |H^{q+1,\pm}|\Big|T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{q} H^{n,\pm}\Big|.$$

Подставим последний результат в (6) и с учетом (4) найдем

$$\Big|T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{q+1} H^{n,\pm}\Big| = \Big|T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{q} H^{n,\pm}\Big|(1-|H^{q+1,\pm}|) = \prod_{n=p}^{q+1}(1-H^{n,\pm}).$$

Тем самым соотношение (4) доказано по индукции.

Теперь из (3) следует

$$\prod_{n=p}^{\infty}(1-H^{n,\pm}) = 0$$

для любых $p \geq 1$. Но тогда и

$$\Big|T^2 \setminus \bigcup_{n=p}^{\infty} H^{n,\pm}\Big| = 0,$$

следовательно,

$$|\limsup_n H^{n,\pm}| = 1. \tag{7}$$

Положим

$$a_k^n(x) = 2^{2m_{n+1}-2}\{\chi_{Q_k^{n,+}}(x) - \chi_{Q_k^{n,-}}(x)\}, \tag{8}$$
$$\lambda_k^n = 2^{-m_{n+1}-m_n}\log(m_{n+1}-m_n),$$
$$f = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{2m_n}} \lambda_k^n a_k^n(x). \tag{9}$$

Покажем, что (9) есть атомическое разложение. Действительно, $\operatorname{supp} a_k^n(x) = Q_k^{n,+} \bigcup Q_k^{n,-} \subset Q$, Q — квадрат (см. рис.), $|Q| = 4|Q_k^{n,+}| = 4 \cdot 2^{-2m_{n+1}}$. Кроме того, $\|a_k^n\|_\infty = 2^{-2}2^{2m_{n+1}} = |Q|^{-1}$. Таким образом, выполнены свойства (i) и (ii). Свойство (iii) следует из (2) и (8). Значит, $a_k^n(x)$ — атомы. Проверим сходимость разложения (9). Имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{2m_n}} \lambda_k^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-m_{n+1}+m_n}\log(m_{n+1}+m_n) \leq$$
$$\leq \sum_{j=7}^{\infty}\sum_{s_j<n\leq s_{j+1}} 2^{-m_{n+1}+m_n}\log(m_{n+1}-m_n) \leq \sum_{j=7}^{\infty} 2^{-j}\,\log j \cdot 2^j\, j^{-2} < \infty.$$

Итак, $f \in \mathcal{H}$.

Установим теперь бесконечность сильной верхней производной интеграла от f. Бесконечность нижней устанавливается аналогично. Из (7) следует, что для почти любой точки $x \in T^2$ можно указать прямоугольник $R_{k,s}^{n,+} \ni x$ со сколь угодно большим номером n. Тогда

$$|R_{k,s}^{n,+}|^{-1}\int_{R_{k,s}^{n,+}} f(y)dy = \sum_{\nu=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{2^{2m_\nu}} \lambda_j^\nu |R_{k,s}^{n,+}|^{-1}\int_{R_{k,s}^{n,+}} a_j^\nu(y)dy +$$
$$+ |R_{k,s}^{n,+}|^{-1}\int_{R_{k,s}^{n,+}} \lambda_k^n a_k^n(y)dy + |R_{k,s}^{n,+}|^{-1}\int_{R_{k,s}^{n,+}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{2m_\nu}} \lambda_j^\nu a_j^\nu(y)dy \equiv \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3.$$

Если $R_{k,s}^{n,+} \subset \operatorname{supp} a_j^\nu(y)$, то

$$|R_{k,s}^{n,+}|^{-1}\int_{R_{k,s}^{n,+}} a_j^\nu(y)dy = a_j^\nu(x).$$

Если же $R_{k,s}^{n,+} \not\subset \operatorname{supp} a_j^\nu(y)$, то в силу двоичной рациональности построений и того факта, что всегда возможно представление

$$R_{k,s}^{n,+} = \bigcup_j I_j^m, \quad m > n+1,$$

где j пробегает некоторое множество индексов, либо $R_{k,s}^{n,+} \supset \operatorname{supp} a_j^\nu(y)$, либо $R_{k,s}^{n,+} \bigcap \operatorname{supp} a_j^\nu(y) = \emptyset$. В любом случае

$$|R_{k,s}^{n,+}|^{-1}\int_{R_{k,s}^{n,+}} a_j^\nu(y)dy = 0.$$

Далее, почти каждая точка x содержится только в конечном числе носителей $a_j^{\nu}(y)$. Поэтому для достаточно большого номера n почти всюду на T^2 $\mathcal{J}_1 = f(x)$, $\mathcal{J}_3 = 0$. Оценим $\mathcal{J}_2$. Имеем

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\lambda_k^n \|a_k^n\|_\infty |Q_k^{n,+}|}{|R_{k,s}^{n,+}|} \geq \frac{\lambda_k^n}{|R_{k,s}^{n,+}|} = \log(m_{n+1} - m_n) \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

Тем самым установлено первое соотношение (1). $\square$

В связи с доказанной теоремой представляется интересным получить ответ на следующий вопрос: *влечет ли конечность почти всюду сильной верхней производной конечность почти всюду сильной нижней производной* (*и таким образом сильную дифференцируемость*) *интеграла функции из двумерного класса Харди*?

Положительный ответ на этот вопрос давал бы дополнительную информацию о степени "равномерности" распределения функций из классов Харди.

Литература

1. Fefferman C., Stein E.M. *H^p-spaces of several variables* // Acta math. – 1972. – V. 129. – № 3–4. – P. 137–193.
2. Sjögren P. *Lectures on atomic H^p-spaces theory in R^n*. – Dep. Math. Univ. Umea. – 1981. – № 5. – 58 p.
3. Coifman R., Weiss G. *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 83. – № 4. – P. 569–645.
4. Janson S. *Generalizations of Lipschitz spaces and an application to Hardy spaces and bounded mean oscillation* // Duke Math. J. – 1980. – V. 47. – № 4. – P. 959–982.
5. Coifman R.R. *A real variable characterization of H^p* // Studia Math. – 1974. – T. 51. – № 3. – S. 269–274.
6. Latter P.H. *A characterization of $H^p(R^n)$ in terms of atoms* // Studia Math. – 1978. – T. 62. – № 1. – S. 93–101.
7. Saks S. *Remarks on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral* // Fundam. math. – 1934. – V. 22. – P. 257–261.

Одесский государственный университет

Поступила 05.07.1995