ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 517.988

И.Н. МАЙБОРОДА, Л.А. ОСТРОВЕЦКИЙ

О ДВУСТОРОННЕМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

При приближенном решении операторных уравнений очень удобны двусторонние алгоритмы. Они определяют два приближения, аппроксимирующие искомое решение снизу и сверху, что позволяет свести вопрос об оценке погрешности к простому вычислению нормы разности найденных приближений. Обычно в этих алгоритмах предполагается некоторая монотонность.

Теория решений уравнений с монотонными операторами при различных их свойствах и свойствах пространств с конусами, в которых они рассматриваются, развита в работах М.А. Красносельского, И.А. Бахтина, В.Я. Стеценко и других авторов [1]–[3]. Теория монотонных операторов В.И. Опойцевым была перенесена на гетерогенные и гетеротонные операторы [4], [5]. В работах Н.С. Курпеля и других математиков [6] (в этой монографии имеется подробная библиография) исследовались двусторонние конструкции немонотонных операторов с производными, обладающими теми или иными свойствами монотонности.

В данной статье доказано, что некоторые результаты, характерные для вышеуказанных операторов и полученные в работах [4], [5], распространяются на операторы с гетерогенной производной в банаховых пространствах с различными конусами.

Напомним некоторые используемые в данной работе определения.

Пусть B — вещественное банахово пространство с конусом K и $\Im = \{P_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ — некоторое семейство расщепляющих операторов. Природа множества Ω безразлична. При любом $\alpha \in \Omega$ операторы P_α действуют из B в B. Пусть $Q_\alpha = I - P_\alpha$, где I — тождественное преобразование. Если два элемента $x, y \in B$ принадлежат некоторому конусному отрезку $\langle u; v\rangle = \{x | u \le x \le v\}$, то при любом α имеет место $P_\alpha x + Q_\alpha y \in \langle u; v\rangle$.

Пусть $\Re = \{R_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ — некоторое семейство операторов, расщепляющих любой элемент $x \in B$ на компоненты x_α ($x_\alpha = R_\alpha x$). При этом каждый оператор R_α отображает B в некоторое множество G_α, а семейство $\Re$ каждому $x \in B$ сопоставляет множество компонент $\{x_\alpha\}$, причем $\{x_\alpha\} \ne \{y_\alpha\}$, если $x \ne y$. Операция объединения множества компонент $\{x_\alpha\}$ в элемент $x \in B$ обозначается $\sum\limits_\alpha \{R_\alpha x\} = \sum\limits_\alpha \{x_\alpha\} = x$. Семейство $\Re$ удовлетворяет следующему свойству. Пусть имеется некоторый произвольный конусный отрезок $\langle u; v\rangle$ и каждому $\alpha \in \Omega$ сопоставлен $x^\alpha \in \langle u; v\rangle$. Если $\sum\limits_\alpha \{R_\alpha x^\alpha\} \in B$, то необходимо $\sum\limits_\alpha \{R_\alpha x^\alpha\} \in \langle u; v\rangle$.

Оператор T называется гетерогенным, если для любых $u, v \in B$

$$\sum_\alpha \{R_\alpha T(P_\alpha u + Q_\alpha v)\} \in B \tag{1}$$

и для любых $x' \ge x$, $y \ge y'$

$$\sum_\alpha \{R_\alpha T(P_\alpha x' + Q_\alpha y')\} \ge \sum_\alpha \{R_\alpha T(P_\alpha x + Q_\alpha y)\}. \tag{2}$$

Если T оставляет инвариантным некоторое множество M и условия (1), (2), равно как и условия, налагаемые на $\Im$, $\Re$, справедливы при дополнительном предположении, что все элементы, участвующие в их формулировке, принадлежат M, то T называется гетерогенным на M.

Если $\Re$ состоит из одного тождественного преобразования I (Ω содержит лишь одну точку α), то условие (1) выполняется автоматически, а (2) переходит в

$$T(P_\alpha x' + Q_\alpha y') \geq T(P_\alpha x + Q_\alpha y). \tag{3}$$

Если при этом $P_\alpha = I$, то T — изотонный, если же $Q_\alpha = I$, то T — антитонный оператор.

Эти определения взяты из работы [4].

Будем говорить далее, что семейства $\Im$ и $\Re$ обладают свойством замкнутости, если выполняются условия

1) из сходимости $x_n \to x$, $y_n \to y$, $P_\alpha x_n + Q_\alpha y_n \to P_\alpha x_0 + Q_\alpha y_0$ при $n \to \infty$ для любого $\alpha \in \Omega$ следует, что $x, y \in B$ и $P_\alpha x + Q_\alpha y = P_\alpha x_0 + Q_\alpha y_0$;
2) пусть при любом $\alpha \in \Omega$ и $n \to \infty$ $(x^\alpha)_n \to x^\alpha$, $\sum\limits_\alpha \{R_\alpha(x_n^\alpha)\} \in B$ при любом $n \geq 0$, $\sum\limits_\alpha \{R_\alpha(x_n^\alpha)\} \to \sum\limits_\alpha \{R_\alpha(x_0^\alpha)\}$, тогда $x^\alpha \in B$ и $\sum\limits_\alpha \{R_\alpha(x_0^\alpha)\} = \sum\limits_\alpha \{R_\alpha(x^\alpha)\}$.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$Lx = T(x), \tag{4}$$

заданное на некотором выпуклом множестве $M \subset B$ с полуупорядоченным конусом K. Предположим, что оператор T дифференцируем на M по Фреше, и его производная T' обладает свойством гетерогенности на $\langle u_0; v_0 \rangle$, где $u_0, v_0 \in M$, $\langle u_0; v_0 \rangle \subset M$, — некоторые начальные приближения к решению уравнения (4), последующие приближения к которому определяются алгоритмом

$$Lu_{n+1} = T(u_n) + \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_n + Q_\alpha v_n)\}(u_{n+1} - u_n), \tag{5}$$

$$Lv_{n+1} = T(v_n) + \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_n + Q_\alpha v_n)\}(v_{n+1} - v_n). \tag{6}$$

Предполагается, что для любого n существуют единственные решения уравнений (5), (6) и для расщепления T' справедлива формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 1. *Пусть для начальных приближений $u_0, v_0 \in M$ выполняются неравенства*

$$u_0 \leq v_0, \quad Lu_0 \leq T(u_0), \quad T(v_0) \leq Lv_0. \tag{7}$$

На $\langle u_0; v_0 \rangle \subset M$ существует положительный оператор

$$A^{-1} = \left(L - \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha + Q_\alpha)\}\right)^{-1} \geq 0. \tag{8}$$

Тогда последовательные приближения, определяемые алгоритмом (5)–(6), *удовлетворяют неравенствам*

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Доказательство. Вычитая $Lu_0 \leq T(u_0)$ из (5) при $n = 0$ и учитывая линейность оператора A, находим $\left(L - \sum\limits_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}\right)(u_1 - u_0) \geq 0$. Согласно (8)

$$u_0 \leq u_1. \tag{10}$$

Аналогично доказывается соотношение

$$v_1 \leq v_0. \tag{11}$$

Докажем, что $u_1 \leq v_1$. Вычитая из (6) соотношение (5) при $n = 0$, имеем

$$L(v_1 - u_1) = T(v_0) - T(u_0) + \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}(v_1 - v_0) - \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}(u_1 - u_0).$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к разности $T(v_0) - T(u_0)$, получим

$$\Big(L - \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}\Big)(v_1 - u_1) =$$
$$= \int_0^1 \Big[\sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha(u_0 + \tau(v_0 - u_0)) + Q_\alpha(u_0 + \tau(v_0 - u_0)))\} - \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}\Big] \times$$
$$\times (v_0 - u_0) d\tau.$$

Согласно первому неравенству в (7) из гетерогенности T' и (8) имеем

$$u_1 \leq v_1. \tag{12}$$

Неравенства (10)–(12) доказывают заключение теоремы при $n = 0$.

Покажем, что элементы $u_1, v_1 \in \langle u_0; v_0 \rangle$ удовлетворяют второму и третьему неравенствам в (7). Действительно,

$$Lu_1 - T(u_1) = T(u_0) - T(u_1) + \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}(u_1 - u_0) =$$
$$= -\int_0^1 T'(u_0 + \tau(u_1 - u_0))(u_1 - u_0) d\tau + \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}(u_1 - u_0) =$$
$$= \int_0^1 \Big[\sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\} - \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha(u_0 + \tau(u_1 - u_0)) + Q_\alpha(u_0 + \tau(u_1 - u_0)))\}\Big] \times$$
$$\times (u_1 - u_0) d\tau.$$

Учитывая соотношения (10) и гетерогенность T', получаем $Lu_1 \leq T(u_1)$. Аналогично доказывается третье неравенство в (7). Включение $\langle u_1; v_1 \rangle \subset \langle u_0; v_0 \rangle$ гарантирует выполнение соотношения (8). Таким образом, все условия теоремы выполнены для элементов u_1, v_1.

Доказательство теоремы завершается индукцией по n. $\square$

Теорема 2. *Пусть K — правильный конус, операторы T и A замкнуты на $\langle u_0; v_0 \rangle$ и выполняются условия теоремы* 1.

Тогда уравнение (4) *имеет на отрезке $\langle u_0; v_0 \rangle$ по крайней мере одно решение. Среди всех решений имеется наименьшее u^* и наибольшее v^*, к которым сходятся последовательные приближения, определяемые алгоритмом* (5)–(6)*, причем*

$$u_n \leq u^* \leq v^* \leq v_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Доказательство. Так как по теореме 1 последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ монотонны и ограничены, а K — правильный конус, то существуют $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v^*$, и согласно (9) $u^* \leq v^*$. Переходя к пределу в (5)–(6), учитывая замкнутость операторов A и T, убеждаемся, что u^* и v^* являются решениями уравнения (4). Если x^* — произвольное решение этого уравнения на $\langle u_0; v_0 \rangle$, то элементы u_0, x^* удовлетворяют всем условиям теоремы, и по доказанному $u_n \leq x^*$. Переходя к пределу в этом неравенстве, убеждаемся, что $u^* \leq x^*$, т.е. u^* — наименьшее решение. Аналогично доказывается, что v^* — наибольшее решение.

Докажем последнее утверждение теоремы, проведя один шаг индукции. Пусть неравенства (13) имеют место для некоторого $n = m > 0$. Так как u^* — решение уравнения (4), то из (5) получаем

$$Lu_{m+1} - Lu^* = T(u_m) - T(u^*) + \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_m + Q_\alpha v_m)\}(u_{m+1} - u_m),$$

или

$$\Big(L-\sum_\alpha\{R_\alpha T'(P_\alpha u_m+Q_\alpha v_m)\}\Big)(u_{m+1}-u^*)=$$

$$\int_0^1\Big[\sum_\alpha\{R_\alpha T'(P_\alpha(u^*+\tau(u_m-u^*))+Q_\alpha(u^*+\tau(u_m-u^*)))\}-\sum_\alpha\{R_\alpha T'(P_\alpha u_m+Q_\alpha v_m)\}\Big]\times$$
$$\times(u_m-u^*)d\tau\le 0.$$

Следовательно, $u_{m+1}\le u^*$. Аналогично доказывается, что $v^*\le v_{m+1}$. Таким образом, неравенства (13) доказаны для любого n. $\square$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Конус* K *нормален. Оператор* $T-\sum\limits_\alpha\{R_\alpha T'(P_\alpha+Q_\alpha)\}$ *вполне непрерывен,* A^{-1} *непрерывен на* $\langle u_0;v_0\rangle$.

Тогда уравнение (4) *имеет на* $\langle u_0;v_0\rangle$ *по крайней мере одно решение* x^*, *к которому сходятся последовательности* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, *определяемые алгоритмом* (5)–(6), *причем*

$$u_n\le u_{n+1}\le x^*\le v_{n+1}\le v_n,\quad n=0,1,2,\dots \tag{14}$$

Доказательство. Монотонность последовательных приближений доказана в теореме 1. Для доказательства существования решения $x^*\in\langle u_n;v_n\rangle$, $n=0,1,2,\dots$, рассмотрим оператор

$$\Gamma x=x+A^{-1}(T(x)-Lx)\equiv A^{-1}\Big[T(x)-\sum_\alpha\{R_\alpha T'(x)\}\Big]. \tag{15}$$

Покажем, что Γ — изотонный оператор на $\langle u_0;v_0\rangle$. Действительно, если $x,y\in\langle u_0;v_0\rangle$ и $x\le y$, то

$$\Gamma x-\Gamma y=x-y+A^{-1}(T(x)-T(y)-L(x-y))=$$
$$=x-y+A^{-1}\Big[\int_0^1 T'(y+\tau(x-y))(x-y)d\tau-L(x-y)\Big]=$$
$$=x-y+A^{-1}\Big[\int_0^1\Big(\sum_\alpha\{R_\alpha T'(P_\alpha(y+\tau(x-y))+Q_\alpha(y+\tau(x-y)))\}\Big)(x-y)d\tau-L(x-y)\Big].$$

Так как $u_0\le x\le y\le v_0$, то

$$\sum_\alpha\{R_\alpha T'(P_\alpha(y+\tau(x-y))+Q_\alpha(y+\tau(x-y)))\}(x-y)\le\sum_\alpha\{R_\alpha T'(P_\alpha u_0+Q_\alpha v_0)\}(x-y)$$

и

$$\Gamma x-\Gamma y\le x-y-A^{-1}\Big[L-\sum_\alpha\{R_\alpha T'(P_\alpha u_0+Q_\alpha v_0)\}(x-y)\Big]=0,$$

т. е. $\Gamma x\le\Gamma y$. Из полной непрерывности $T-\sum\limits_\alpha\{R_\alpha T'(P_\alpha+Q_\alpha)\}$ и непрерывности A^{-1} следует полная непрерывность оператора Γ. Так как

$$\Gamma u_n=u_n+A^{-1}(T(u_n)-L(u_n))\ge u_n,\quad \Gamma v_n=v_n+A^{-1}(T(v_n)-L(v_n))\le v_n,\quad n=0,1,2,\dots,$$

то оператор Γ отображает отрезок $\langle u_n;v_n\rangle$ в себя и по теореме Шаудера имеет на этом отрезке неподвижную точку x^*, для которой $Lx^*=T(x^*)$. Неравенство (14) следует из принадлежности x^* отрезку $\langle u_n;v_n\rangle$, $n=0,1,2,\dots$, и монотонности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$. $\square$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если справедливо хотя бы одно из следующих условий:*

а) *конус* K *сильно миниэдральный;*

б) *конус K телесный, нормальный и миниэдральный, оператор $A^{-1}\Big[T-\sum\limits_{\alpha}\{R_\alpha T'(P_\alpha+Q_\alpha)\}\Big]$ компактный на $\langle u_0; v_0\rangle$,*

то на $\langle u_0; v_0\rangle$ существует по крайней мере одно решение x^* уравнения (4), *удовлетворяющее условиям* (14).

Доказательство. Покажем, что оператор Γ в (15) имеет неподвижную точку $x^* \in \langle u_0; v_0\rangle$. Тогда из (15) будет следовать, что x^* — решение уравнения (4).

Пусть выполняется случай а). Обозначим через $\Re$ множество таких элементов $x \in \langle u_0; v_0\rangle$, что $\Gamma x \geq x$. Это множество не пусто, т.к. $\Gamma u_0 = u_0 + A^{-1}(T(u_0) - Lu_0) \geq u_0$. Поскольку $\Gamma(\Gamma x) \geq \Gamma x$, $x \in \Re$, в силу изотонности Γ, то $\Gamma\Re \subset \Re$. Пусть $x^* = \sup \Re$. Очевидно, $u_0 \leq x^* \leq v_0$, т. е. $x^* \in \langle u_0; v_0\rangle$. Из изотонности Γ и определения x^* вытекает, что $\Gamma x^* \geq \Gamma x \geq x$ для любого $x \in \Re$. Это значит, что Γx^* является верхней границей для $\Re$. Поэтому $\Gamma x^* \geq x^*$. Но тогда $x^* \in \Re$, в силу чего $\Gamma x^* \in \Re$ и $\Gamma x^* \leq x^*$. Итак, $\Gamma x^* = x^*$, откуда $Lx^* = T(x^*)$. Соотношения (14) следуют из инвариантности отрезков $\langle u_n; v_n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, для оператора Γ и монотонности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$.

Пусть выполняется случай б). Множество $\Re = \Gamma\langle u_0; v_0\rangle$ компактное и $u_1 = \Gamma u_0 \in \Re$. Обозначим через $\Re_1$ множество тех элементов из $\Re$, для которых $\Gamma x \geq x$. Очевидно, $u_1 \in \Re$, так что $\Re_1$ не пусто. Так как это множество компактно и ограничено сверху, то существует $x^* = \sup \Re_1$ [2]. Тогда согласно доказательству случая а) $Lx^* = T(x^*)$. □

Условия а), б) теоремы 4 существенно различны. Действительно, например, конус неотрицательных функций в $C[0; 1]$ является телесным, нормальным и миниэдральным, не являясь в то же время сильно миниэдральным [1].

Теорема 5. *Пусть кроме условий теоремы 2 выполняются условия*

1) *конус K нормален;*
2) *оператор A^{-1} ограничен на $\langle u_0; v_0\rangle$, $\|A^{-1}\| \leq B$;*
3) *оператор $\sum\limits_{\alpha}\{R_\alpha T'(P_\alpha + Q_\alpha)\}$ удовлетворяет условию Липшица по обеим переменным*

$$\left\|\sum_{\alpha}\{R_\alpha T'(P_\alpha u + Q_\alpha z)\} - \sum_{\alpha}\{R_\alpha T'(P_\alpha v + Q_\alpha z)\}\right\| \leq L_1\|u - v\|,$$

$$\left\|\sum_{\alpha}\{R_\alpha T'(P_\alpha z + Q_\alpha u)\} - \sum_{\alpha}\{R_\alpha T'(P_\alpha z + Q_\alpha v)\}\right\| \leq L_2\|u - v\|;$$

4) $B(L_1 + L_2)\|u_0 - v_0\| < 2$.

Тогда последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ сходятся соответственно снизу и сверху к единственному на $\langle u_0; v_0\rangle$ решению $x^* = u^* = v^*$ уравнения (4), *и скорость их сходимости характеризуется неравенствами*

$$\begin{aligned} \|x^* - u_n\| &\leq I^{2^n-1}\|v_0 - u_0\|^{2^n}, \\ \|v_n - x^*\| &\leq I^{2^n-1}\|v_0 - u_0\|^{2^n}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $I = \frac{1}{2}B(L_1 + L_2)$.

Доказательство. Вычитая (5) из (6), приходим к равенству

$$v_{n+1} - u_{n+1} = A^{-1}\int_0^1 \left[\sum_{\alpha}\{R_\alpha T'(P_\alpha(u_n + \tau(v_n - u_n)) + Q_\alpha(u_n + \tau(v_n - u_n)))\} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\alpha}\{R_\alpha T'(P_\alpha u_n + Q_\alpha v_n)\}\right](v_n - u_n)d\tau.$$

Оценивая его по норме в силу условий 2)–4) теоремы, получим

$$\|v_{n+1} - u_{n+1}\| \le \|A^{-1}\| \int_0^1 (L_1 \tau \|v_n - u_n\| + L_2(1-\tau)\|v_n - u_n\|)\|v_n - u_n\| d\tau \le$$
$$\le B\frac{L_1 + L_2}{2}\|v_n - u_n\|^2 = I\|v_n - u_n\|^2. \quad (17)$$

Положим в (17) последовательно $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\|v_1 - u_1\| \le I\|v_0 - u_0\|^2, \quad \|v_2 - u_2\| \le I\|v_1 - u_1\|^2 \le I^3\|v_0 - u_0\|^4.$$

По индукции заключаем, что $\|v_n - u_n\| \le I^{2^n - 1}\|v_0 - u_0\|^{2^n}$. Согласно условию 4) теоремы и заключению теоремы 2 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = x^*$ — единственное решение уравнения (4). Из нормальности конуса и из неравенств $0 \le x^* - u_n \le v_n - u_n$, $0 \le v_n - x^* \le v_n - u_n$, которые непосредственно вытекают из заключения теоремы 2, получаем оценки (16). $\square$

Использование алгоритмов (5)–(6) требует решения линейных операторных уравнений на каждом шаге вычислительного процесса, в то время как построение последовательных приближений по соответствующим модифицированным алгоритмам

$$Lu_{n+1} = T(u_n) + \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}(u_{n+1} - u_n),$$
$$Lv_{n+1} = T(v_n) + \sum_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}(v_{n+1} - v_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

предполагает обращение линейного оператора $L - \sum\limits_\alpha \{R_\alpha T'(P_\alpha u_0 + Q_\alpha v_0)\}$ лишь в одной точке $\langle u_0; v_0\rangle$. При этом квадратичная скорость сходимости понижается до скорости сходимости геометрической прогрессии.

В качестве примера рассмотрим в R^m систему нелинейных алгебраических уравнений

$$x_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad k = 1, \ldots, m, \quad (18)$$

где функции $f_k(x)$ дифференцируемые и каждая частная производная $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$, по одним переменным монотонно возрастает (не убывает), а по остальным переменным монотонно убывает (не возрастает). С каждой частной производной $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ свяжем два подмножества индексов $G_{ij} \subset I$ и $H_{ij} \subset I$ ($G_{ij} \cup H_{ij} = I$, $G_{ij} \cap H_{ij} = 0$), $I = \{i \mid j = 1, \ldots, m\}$. Номер $k \in G_{ij}$, если $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ не убывает по x_k, и $k \in H_{ij}$ в противном случае.

Пусть P_{ij} — проектор, задаваемый матрицей $P_{ij} = (p^{ij}_{\mu\nu})$, где $p^{ij}_{\mu\nu} = 1$, если $\mu \in G_{ij}$, остальные $p^{ij}_{\mu\nu} = 0$. Проектор Q_{ij} определяется матрицей $E - P_{ij}$, где E — единичная матрица.

Пусть оператор R_i из семейства $R = \{R_i \mid i \in I\}$ сопоставляет вектору $x \in R^m$ его i-ю координату x_i, т.е. $R_i x = x_i$, а операция $\sum\limits_i$ сопоставляет множеству компонент $\{x_i\}$ соответствующий вектор $x = \sum\limits_i \{R_i x\}$.

Введем в R^m полуупорядоченность с помощью неотрицательного ортанта R^m_+, тогда оператор $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \Big(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)^m_{i,j=1}$ будет удовлетворять условиям гетерогенности, и система (5)–(6) примет вид

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) + \sum_i \Big\{\sum_j (R_j(R_i f)')(P_{ij}u_n + Q_{ij}v_n)\Big\}(u_{n+1} - u_n), \\ v_{n+1} &= f(v_n) + \sum_i \Big\{\sum_j (R_j(R_i f)')(P_{ij}u_n + Q_{ij}v_n)\Big\}(v_{n+1} - v_n). \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим $A(u_n;v_n) = \sum\limits_i \Big\{ \sum\limits_j (R_j(R_i f)')(P_{ij}u_n + Q_{ij}v_n) \Big\}$.

Теорема 6. *Пусть существуют* $u_0, v_0 \in R^m$ *такие, что*

$$u_0 \le f(u_0), \quad f(v_0) \le v_0, \quad u_0 \le v_0$$

и на $[u_0;v_0]$ *выполняются условия*

1) *матрица* A *гетерогенная*;
2) *для элементов* b_{jk}, $j,k = 1,\dots,m$, *матрицы* $B = \Delta - A$, *где* Δ — *матрица Кронекера, выполнено хотя бы одно из условий*
   а) $b_{jk} \le 0$ *для* $j \ne k$, B *неразложима, существуют* $y > 0$ *и* $r \ge 0$, $r \not\equiv 0$, *такие, что* $By = r$*;*
   б) $b_{jj} \ge 0$, $b_{jk} \le 0$ *при* $j \ne k$, *выполнен слабый признак сумм по строкам, и матрица* B *неразложима, либо выполнен сильный признак сумм по строкам;*
   в) $a_{jk} \ge 0$, $j,k = 1,\dots,m$, *где* a_{jk} — *элементы матрицы* A, $\|A\| < 1$*;*
   г) B — *симметричная, положительно определенная матрица и* $a_{jk} \ge 0$ *для любых* j, k.

Тогда система (18) *на* $[u_0;v_0]$ *имеет по крайней мере одно решение* x^*, *к которому сходятся последовательности* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, *определяемые* (19), *и* $u_n \le u_{n+1} \le x^* \le v_{n+1} \le v_n$.

Каждое из условий а), б), в), г) п. 2 теоремы гарантирует выполнение условия (8) теоремы 1 ([7], § 23).

Литература

1. Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений.* – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
2. Стеценко В.Я. *О неподвижных точках нелинейных отображений* // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10. – № 3. – С. 642–652.
3. Бахтин И.А. *О существовании общих неподвижных точек для абелевых совокупностей разрывных операторов* // Сиб. матем. журн. – 1972. – Т. 13. – № 2. – С. 243–251.
4. Опойцев В.И. *Гетерогенные и комбинированно-вогнутые операторы* // Сиб. матем. журн. – 1975. – Т. 16. – № 4. – С. 781–792.
5. Опойцев В.И. *Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1978. – Т. 36. – С. 237–273.
6. Курпель Н.С., Шувар Б.А. *Двусторонние операторные неравенства и их применения.* – Киев: Наук. думка, 1980. - 267 с.
7. Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика.* – М.: Мир, 1969. – 447 с.

Черниговский педагогический институт (Украина)

Поступила 19.01.1995