ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 519.216

С.А. ЕГИШЯНЦ, Е.И. ОСТРОВСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАСШИРЯЮЩИХСЯ МНОЖЕСТВ

Введение

Пусть $\tau(t)$ – сепарабельное центрированное случайное поле (с. п.), определенное, помимо вероятностного, на некотором метрическом пространстве (T,d), $t\in T$. Пусть дана также система расширяющихся подмножеств T_z множества T, зависящих от числового неотрицательного параметра z, $T_z\subset T$, $T_z\uparrow T$ при $z\to\infty$. Обозначим $\eta(z)=\sup\limits_{t\in T_z}\tau(t)$. Целью работы является вычисление точной сильной, т. е. с вероятностью 1, асимптотики $\eta(z)$ при $z\to\infty$ в предположении, что с. п. $\tau(t)$ удовлетворяет условию Крамера равномерно по t. Подобная задача хорошо изучена лишь для гауссовских процессов и полей [1], [2].

Обозначим $\xi(t)=\tau(t)/\sqrt{\mathbf{D}\tau(t)}$ и положим $\varphi(\lambda)=\sup\limits_{t\in T}\ln\mathbf{E}\exp(\pm\lambda\xi(t))$. Предполагается, что существует такое λ_0, что для любого $\lambda\in(-\lambda_0,\lambda_0)$ имеет место $\varphi(\lambda)<\infty$. С помощью $\varphi(\lambda)$ согласно [3] вводится банахово пространство $B(\varphi)$ случайных величин ζ с конечной нормой

$$\|\zeta\|=\sup_{\lambda\neq0}(\varphi^{-1}(\ln\mathbf{E}\exp(\pm\lambda\zeta))/|\lambda|).$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\|\xi(t)\|=1$ при всех $t\in T$, в противном случае можно перейти к с. п. $\xi(t)/\|\xi(t)\|$.

На множестве T определим естественную метрику $d(t,s)=\|\xi(t)-\xi(s)\|$. Преобразование Юнга-Фенхеля функции $\varphi(\lambda)$ обозначим через $\varphi^*(x)=\sup\limits_{\lambda\in\mathbf{R}^1}(\lambda x-\varphi(\lambda))$. Положим далее $\pi(u)=1/(u\varphi^{*\prime}(u))$. Наименьшее число d-шаров радиуса $\varepsilon>0$, покрывающих некоторое подмножество S множества T, обозначим через $N(S,\varepsilon)$. Энтропией S называется величина $H(S,\varepsilon)=\ln N(S,\varepsilon)$. Пусть $B(t,\delta)$ — d-шар радиуса δ с центром в точке $t\in T$, т. е. $B(t,\delta)=\{s\in T,\ d(t,s)\le\delta\}$. С. п. $\xi(t)$ называется локально однородным на множестве T, если при всех $\varepsilon>0$

$$h(\varepsilon)=\sup_{t\in T}\ \sup_{\delta>0}H(B(t,\delta),\delta\varepsilon)<\infty.$$

На практике вместо разрывной функции $h(x)$ берут ее гладкую мажоранту. Если, к примеру, $T=\mathbf{R}^k$ и $d(t,s)\sim C_1|t-s|^\alpha$ при $t-s\to0$, $\alpha>0$, то $h(\varepsilon)\sim C_2+(k/\alpha)\ln(1/\varepsilon)$, $\varepsilon\to0$.

1. Вспомогательные факты

Прежде всего нам понадобится оценка сверху распределения максимума с. п. $\xi(t)$ при $t\in S\subset T$ из [4]: если с. п. $\xi(t)$ локально однородно на S и $\sum\limits_n 2^{-n}h(2^{-n})<\infty$, то при больших u справедлива оценка

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in S}\xi(t)>u\Big)\le C_3N(S,\pi(u))\exp(-\varphi^*(u)),\tag{1.1}$$

где $C_3=\exp\Big(1+\inf\limits_{0<p<1}\Big\{(1-p)\sum\limits_{n=1}^{\infty}p^nh(p^{n-1})\Big\}\Big)$.

Лемма 1.1. $\varphi^*(\gamma x)\ge\gamma\varphi^*(x)\ \ \forall\gamma>1$.

Доказательство вытекает из условия $\varphi^*(0) = 0$ и неравенства

$$\varphi^*\Big(\Big(1 - \frac{1}{\gamma}\Big)0 + \frac{1}{\gamma}(\gamma x)\Big) \le \Big(1 - \frac{1}{\gamma}\Big)\varphi^*(0) + \frac{1}{\gamma}\varphi^*(\gamma x),$$

справедливого для любых x и $\gamma > 1$ в силу выпуклости функции $\varphi^*(x)$.

Следствие 1.1. $\varphi^*((1-\varepsilon)x) \le (1-\varepsilon)\varphi^*(x) \ \ \forall\varepsilon \in (0,1), \forall x.$

Пусть $\{A_k\}$ — последовательность событий, $k = 1, 2\ldots$ Обозначим через A событие, состоящее в том, что события A_k происходят в бесконечном числе. Лемма Бореля-Кантелли утверждает

а) если $\sum\limits_n P(A_n) < \infty$, то $P(A) = 1$;

б) если $\sum\limits_n P(A_n) = \infty$ и события A_n независимы в совокупности, то $P(A) = 0$.

Содержащееся в б) жесткое требование независимости A_n можно ослабить. Пусть F и G — две σ-алгебры. Согласно ([5], с. 205) коэффициентом сильного перемешивания называется величина $\alpha(F, G) = \sup\limits_{A\in F, B\in G} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|$. Обозначим через F_m наименьшую σ-алгебру, порожденную событиями с номерами, не превосходящими m, т. е. $F_m = \sigma\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$. Аналогично введем σ-алгебру $F^n = \sigma\{A_n, A_{n+1}, \ldots\}$. Здесь $m < n$. Величину $\alpha(F_m, F^n)$ будем обозначать $\alpha(m, n)$.

Лемма 1.2. *Пусть существуют такие $\beta < 1$, α_0 и $C_4 > 0$, что $\mathbf{P}(A_k) \ge C_4/k$ и $\forall m < n$ $\alpha(m, n) \le \alpha_0\beta^{n-m}$. Тогда $\mathbf{P}(A) = 1$.*

Доказательство. Пусть Ω — вероятностное пространство, тогда $A = \{\omega \in \Omega : \forall l \ge 1 \ \exists k > l, \ \omega \in A_k\}$. Таким образом, $A = \bigcap\limits_{l=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k>l} A_k$. Для события, противоположного A, имеем $\overline{A} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k>l}\overline{A}_k$ и $\mathbf{P}(\overline{A}) \le \sum\limits_{l=1}^{\infty}\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k>l}\overline{A}_k\Big)$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k>l}\overline{A}_k\Big) = 0$ при всех $l \ge 1$. Из последовательности событий $\overline{A}_{l+1}, \overline{A}_{l+2}, \ldots$ извлечем некоторую подпоследовательность $\overline{A}_{k_r}, \overline{A}_{k_{r+1}}, \ldots$ Очевидно, $\overline{A}_{l+1}\overline{A}_{l+2}\ldots \subset \overline{A}_{k_r}\overline{A}_{k_{r+1}}\ldots$ Из определения коэффициента α следует, что $\mathbf{P}(AB) \le \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) + \alpha(F, G)$ для любых $A \in F$, $B \in G$. В частности, $\mathbf{P}(\overline{A}_{k_r}\overline{A}_{k_{r+1}}) \le \mathbf{P}(\overline{A}_{k_r})\mathbf{P}(\overline{A}_{k_{r+1}}) + \alpha(k_r, k_{r+1})$. Далее,

$$\mathbf{P}(\overline{A}_{k_r}\overline{A}_{k_{r+1}}\overline{A}_{k_{r+2}}) \le (\mathbf{P}(\overline{A}_{k_r})\mathbf{P}(\overline{A}_{k_{r+1}}) + \alpha(k_r, k_{r+1}))\mathbf{P}(\overline{A}_{k_{r+2}}) + \alpha(k_{r+1}, k_{r+2}) =$$
$$= \mathbf{P}(\overline{A}_{k_r})\mathbf{P}(\overline{A}_{k_{r+1}})\mathbf{P}(\overline{A}_{k_{r+2}}) + \alpha(k_r, k_{r+1})\mathbf{P}(\overline{A}_{k_{r+2}}) + \alpha(k_{r+1}, k_{r+2}).$$

Продолжая это рассуждение, получим

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=r}^{N}\overline{A}_{k_n}\Big) \le \prod_{n=r}^{N}\mathbf{P}(\overline{A}_{k_n}) + \sum_{j=r+2}^{N}\alpha(k_{j-2}, k_{j-1})\prod_{n=j}^{N}\mathbf{P}(\overline{A}_{k_n}). \tag{1.2}$$

Выберем $k_n = [\gamma n \ln n]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x, $n \ge r$, а r возьмем так, чтобы $k_r > l$; γ — некоторая постоянная. Очевидно,

$$\prod_{n=r}^{N}\mathbf{P}(\overline{A}_{k_n}) \le \prod_{n=r}^{N}(1 - C_4/k_n) = \exp\Big(\sum_{n=r}^{N}\ln(1 - C_4/k_n)\Big) \le$$
$$\le C_5\exp\Big(-\sum_{n=r}^{N}\frac{C_4}{\gamma n \ln n}\Big) \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое суммы (1.2). Учтем, что

$$k_{n+1} - k_n \ge \gamma(n+1)\ln(n+1) - 1 - \gamma n \ln n \ge C_6 + \gamma\ln(n+2).$$

Поэтому $\alpha(k_{j-2},k_{j-1}) \le \alpha_0 \beta^{C_6}\beta^{\ln j^\gamma} = C_7 j^{-\delta\gamma}$, где $\delta = \ln(1/\beta) > 0$, т. е.

$$\sum_{j=r+2}^{N} \alpha(k_{j-2},k_{j-1}) \prod_{n=j}^{N} \mathbf{P}(\overline{A}_{k_n}) \le \sum_{j=r+2}^{N} C_5 (\ln j/\ln n)^\gamma j^{-\delta\gamma} \le C_8 (\ln N)^{-\gamma} \to 0$$

при $N \to \infty$, $\gamma > 1/\delta$. Итак,

$$\sum_{j=r+2}^{\infty} \alpha(k_{j-2},k_{j-1}) \prod_{n=j}^{\infty} \mathbf{P}(\overline{A}_{k_n}) + \prod_{n=r}^{\infty} \mathbf{P}(\overline{A}_{k_n}) = 0,$$

вследствие чего $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{n=r}^{N} \overline{A}_{k_n}\Big) = 0$, т. е. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 0$ или $\mathbf{P}(A) = 1$. $\square$

Обозначим через $A(z)$ решение уравнения

$$\varphi^*(A) = H(T_z, \pi(A)). \tag{1.3}$$

Очевидно, $N(T_z,\varepsilon) \le N(T_z,1) \sup\limits_{t\in T_z} N(B(t,1),\varepsilon) \le \exp(H(T_z,1)+h(\varepsilon))$. Обозначим $H(T_z,1)$ через $\mu(z)$ и перепишем уравнение (1.3) в виде

$$\varphi^*(A) = \mu(z) + h(\pi(A)). \tag{1.4}$$

Далее будем предполагать, что $\mu(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ и что $h(\pi(x)) = o(\varphi^*(x))$ при $x \to \infty$. Тогда можно показать, что уравнение (1.4) имеет при больших значениях параметра z единственное решение $A(z) = \varphi^{*-1}(\mu(z))(1+o(1))$, $z \to \infty$.

Ниже будут выведены условия, при которых $\xi(t)$ удовлетворяет с вероятностью 1 соотношению

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \Big(\sup_{t\in T_z} \xi(t)/A(z)\Big) = 1 \tag{1.5}$$

или при дополнительных ограничениях более сильному равенству

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \Big(\sup_{t\in T_z} \xi(t) - A(z)\Big) = 0. \tag{1.6}$$

Для вывода соотношений (1.5) и (1.6) присутствующие в них верхние пределы нужно будет оценить сверху и снизу.

2. Оценки сверху

Поясним сначала возникновение уравнения (1.3). Для этого найдем такие неслучайные функции $A(z)$ и $B(z)$, что при достаточно больших z

$$P\Big(\Big(\sup_{t\in T_z} \xi(t) - A(z)\Big)/B(z) > u\Big) \le C_9 \exp(-C_{10} u). \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть*

а) *с. п. $\xi(t)$ локально однородно на множестве T,* $\sum\limits_n 2^{-n} h(2^{-n}) \le \infty$;

б) $\mu(z) \to \infty$ *при* $z \to \infty$, $A(z)$ — *решение уравнения* (1.4), $B(z) = 1/\varphi^*(A(z))$;

в) *существуют такие константы* z_0 *и* $C_{11} < 1$, *что*

$$\sup_{z\ge z_0} \{h(\pi(A(z)+B(z)u)) - h(\pi(A(z)))\} \le (1-C_{11})u.$$

Тогда при $z \ge z_0$ *справедлива оценка* (2.1).

Доказательство. Оценивая вероятность (2.1) сверху по формуле (1.1), получим

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{P}\Big(\Big(\sup_{t\in T_z}\xi(t) - A(z)\Big)/B(z) > u\Big) = \mathbf{P}\Big(\sup_{t\in T_z}\xi(t) > A(z) + B(z)u\Big) \leq$$
$$\leq C_3 \exp\{-\varphi^*(A(z)+B(z)u) + H(T_z, \pi(A(z)+b(z)u))\}.$$

Ясно, что

$$H(T_z, \pi(A(z)+B(z)u)) \leq \mu(z) + h(\pi(A(z)+B(z)u)) \leq$$
$$\leq \mu(z) + h(\pi(A(z))) + h(\pi(A(z)+B(z)u)) - h(\pi(A(z))).$$

Так как $\varphi^*(x)$ — выпуклая функция, то $\varphi^*(A+Bu) \geq \varphi^*(A) + Bu\varphi^{*\prime}(A)$. Поэтому, а также в силу условия теоремы имеем

$$\mathbf{P}(z) \leq C_3 \exp\{-\varphi^*(A(z)) + \mu(z) + h(\pi(A(z)))\} \times$$
$$\times \exp\{h(\pi(A(z)+B(z)u)) - h(\pi(A(z))) - B(z)u\varphi^{*\prime}(A(z))\} \leq C_3\exp(-C_{11}u),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что условие в) на практике выполняется почти всегда. Например, если $h(\varepsilon) \leq h_0 + k\ln(1/\varepsilon)$, то оно справедливо для всех $\varphi^*(u) \geq C_{12}\exp(|u|(1+o(1))$ при $u \to \infty$. Если же $\varphi^*(u) = C_{13}|u|^q$, $q > 1$, то условие в) выполнено даже при $h(\varepsilon) \leq C_{14}\varepsilon^{-1/q}$.

Теперь оценим сверху пределы (1.5) и (1.6).

Теорема 2.2. *Пусть с. п. $\xi(t)$ локально однородно на множестве T, сходится ряд $\sum\limits_n 2^{-n}h(2^{-n})$ и $h(\pi(u)) = o(\varphi^*(u))$ при $u \to \infty$. Тогда с вероятностью 1*

$$\varlimsup_{z\to\infty}\Big(\sup_{t\in T_z}\xi(t)/A(z)\Big) \leq 1.$$

Доказательство. Пусть z_n — монотонно неубывающая числовая последовательность, $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\varepsilon_0 > 0$. Тогда достаточно показать, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при всех $n \geq n_0 > 0$ с вероятностью 1 выполнено соотношение

$$\sup_{z\in[z_{n-1},z_n]}\Big(\sup_{t\in T_z}\xi(t)/A(z)\Big) \leq 1+\varepsilon. \tag{2.2}$$

Оценим вероятность события, противоположного (2.2). Применяя (1.1), имеем

$$\mathbf{P}_n(\varepsilon) = \mathbf{P}\Big(\sup_{z\in[z_{n-1},z_n]}\Big(\sup_{t\in T_z}\xi(t)/A(z)\Big) > 1+\varepsilon\Big) \leq \mathbf{P}\Big(\sup_{t\in T_z}\xi(t) > (1+\varepsilon)A(z_{n-1})\Big) \leq$$
$$\leq C_3 N(T_{z_n}, \pi((1+\varepsilon)A(z_{n-1})))\exp(-\varphi^*((1+\varepsilon)A(z_{n-1}))) \leq$$
$$\leq C_3\exp\{\mu(z_n) + h(\pi((1+\varepsilon)A(z_{n-1}))) - \varphi^*((1+\varepsilon)A(z_{n-1}))\}.$$

По условию теоремы $h(\pi(u)) = o(\varphi^*(u))$ при $u \to \infty$, поэтому $h(\pi((1+\varepsilon)A(z_{n-1}))) \leq ((\varepsilon/2)/(1+\varepsilon))\varphi^*((1+\varepsilon)A(z_{n-1}))$. Учитывая лемму 1.1 и уравнение (1.4), получим

$$\mathbf{P}_n(\varepsilon) \leq C_3\exp\{\mu(z_n) - (1-(\varepsilon/2)/(1+\varepsilon))(1+\varepsilon)\mu(z_{n-1})(1+o(1))\} =$$
$$= C_3\exp\{\mu(z_n) - \mu(z_{n-1}) - (\varepsilon/2)\mu(z_{n-1})(1+o(1))\}.$$

Выбирая $z_n = \mu^{-1}(n)$, имеем $\mathbf{P}_n(\varepsilon) \leq C_{15}\exp(-\varepsilon(n-1)/2)$. Таким образом, $\sum\limits_n \mathbf{P}_n(\varepsilon) < \infty$ и из леммы Бореля-Кантелли следует (2.2). $\square$

Оценим верхний предел в более сильном соотношении (1.6).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2 *и, кроме того, для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *сходится ряд* $\sum\limits_n \exp\bigl(-\varepsilon n/\varphi^{*-1}(n)\bigr)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\Bigl(\varlimsup_{z\to\infty}\Bigl(\sup_{t\in T_z}\xi(t) - A(z)\Bigr) \le 0\Bigr) = 1.$$

Доказательство. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n \ge n_0$ с вероятностью 1 выполнено неравенство

$$\sup_{z\in[z_{n-1},z_n)}\Bigl(\sup_{t\in T_z}\xi(t) - A(z)\Bigr) \le \varepsilon. \tag{2.3}$$

Применяя (1.1), оценим вероятность противоположного события.

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_n(\varepsilon) = \mathbf{P}\Bigl(\sup_{z\in[z_{n-1},z_n)}\Bigl(\sup_{t\in T_z}\xi(t) - A(z)\Bigr) \le \varepsilon\Bigr) \le \mathbf{P}\Bigl(\sup_{t\in T_{z_n}}\xi(t) > A(z_{n-1}) + \varepsilon\Bigr) \le \\ \le C_3 N(T_{z_n}, \pi(A(z_{n-1}) + \varepsilon))\exp(-\varphi^*(A(z_{n-1}) + \varepsilon)) \le \\ \le C_3 \exp\{\mu(z_n) + h(\pi(A(z_{n-1}) + \varepsilon)) - \varphi^*(A(z_{n-1}) + \varepsilon)\}.\end{gathered}$$

Обозначим $z_n'(\varepsilon) = \inf\{z : A(z) = A(z_n) + \varepsilon\}$. Очевидно, $z_n'(\varepsilon) > z_n$ и, кроме того, $\mu(z_n'(\varepsilon)) \ge$ $\ge \bigl(1 + \varepsilon(1 + o(1))/\varphi^{*-1}(\mu(z_n))\bigr)\mu(z_n)(1 + o(1))$. Следовательно,

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_n(\varepsilon) \le C_3 \exp\{\mu(z_n) - \mu(z_{n-1}'(\varepsilon))\} \le \\ \le C_3 \exp\{\mu(z_n) - (1 + o(1))\mu(z_{n-1}) - \varepsilon(1 + o(1))\mu(z_{n-1})/\varphi^{*-1}(\mu(z_{n-1}))\}.\end{gathered}$$

Выбирая, как и прежде, $z_n = \mu^{-1}(n)$, имеем

$$\sum_n \mathbf{P}_n(\varepsilon) \le C_{16}\sum_n \exp\bigl(-\varepsilon(n-1)/\varphi^{*-1}(n-1)\bigr) < \infty \text{ по условию теоремы.}$$

Теперь из леммы Бореля-Кантелли вытекает (2.2), а значит, и утверждение теоремы.

3. Оценки снизу

Будем предполагать существование такой функции $\psi(u)$, что

$$\mathbf{P}(\xi(t) > u) \ge C_{17}\psi(u)\exp(-\varphi^*(u)). \tag{3.1}$$

Пусть z_n — монотонно неубывающая числовая последовательность. Обозначим через σ_m наименьшую σ-алгебру, порожденную всеми значениями поля $\xi(t)$ при $t \in T_m$, т. е. $\sigma_m = \sigma\{\xi(t),\ t \in T_{z_m}\}$. Подобным образом определим σ-алгебру $\sigma^n = \sigma\{\xi(t),\ t \in T\backslash T_{z_{n-1}}\}$. Очевидно, для событий типа $\{\xi(t) > u\}$ σ-алгебры σ_m и σ^n шире, чем F_m и F^n, введенные в § 1. Поэтому если условие на коэффициент перемешивания $\alpha(m,n)$ справедливо для σ_m и σ^n, то тем более — для F_m и F^n.

Теорема 3.1. *Пусть с. п.* $\xi(t)$ *локально однородно на множестве* T, $|\ln\psi(u)| = o(\varphi^*(u))$ *при* $u \to \infty$ *и существуют такие константы* C_{18} *и* $\beta < 1$, *что* $\alpha(m,n) \le C_{18}\beta^{n-m}$ *при всех* $m < n$. *Тогда с вероятностью* 1

$$\varlimsup_{z\to\infty}\Bigl(\sup_{t\in T_z}\xi(t)/A(z)\Bigr) \ge 1.$$

Доказательство. Пусть $z_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$. Очевидно,

$$\varlimsup_{z\to\infty}\Bigl(\sup_{t\in T_z}\xi(t)/A(z)\Bigr) \ge \varlimsup_{n\to\infty}\Bigl(\sup_{t\in T_{z_n}}\xi(t)/A(z_n)\Bigr) \ge \varlimsup_{n\to\infty}(\xi(t_n)/A(z_n)),$$

где $t_n \in T_{z_n} \setminus T_{z_{n-1}}$. Требуется показать, что с вероятностью 1 для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ события $\{\xi(t_n)/A(z_n) > 1-\varepsilon\}$ происходят бесконечно часто. С помощью (3.1) оценим снизу вероятности этих событий

$$\begin{aligned} Q_n(\varepsilon) = \mathbf{P}(\xi(t_n)/A(z_n) > 1-\varepsilon) = \mathbf{P}(\xi(t_n) > (1-\varepsilon)(A(z_n)) \geq \\ \geq C_{17}\psi((1-\varepsilon)A(z_n))\exp(-\varphi^*((1-\varepsilon)A(z_n))) \geq \\ \geq C_{17}\exp\{\ln\psi((1-\varepsilon)A(z_n)) - \varphi^*((1-\varepsilon)A(z_n))\}. \end{aligned}$$

По условию теоремы $\ln\psi((1-\varepsilon)A(z_n))/\varphi^*((1-\varepsilon)A(z_n)) < \varepsilon/(1-\varepsilon)$ и $\varphi^*(A(z_n)) \leq 2\mu(z_n)$ при больших n в силу (1.4). Кроме того, согласно следствию 1.1 для любых $\varepsilon \in (0,1)$, $x \in \mathbf{R}^1$ выполнено соотношение $\varphi^*((1-\varepsilon)x) \leq (1-\varepsilon)\varphi^*(x)$. С учетом этого имеем $Q_n(\varepsilon) \geq C_{17}\exp(-2\mu(z_n))$. Выбирая $z_n = \mu^{-1}(\ln n/2)$, получим $Q_n(\varepsilon) \geq C_{17}/n$, и по лемме 1.2 теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Если выполнены условия теоремы* 3.1, *то*

$$\mathbf{P}\Big(\varlimsup_{z\to\infty}\Big(\sup_{t\in T_z}\xi(t) - A(z)\Big) \geq 0\Big) = 1.$$

Доказательство. Как и ранее, оцениваем снизу вероятность

$$\begin{aligned} Q_n(\varepsilon) = \mathbf{P}\Big(\sup_{t\in T_{z_n}}\xi(t) - A(z_n) \geq -\varepsilon\Big) \geq \\ \geq C_{17}\exp\{\ln\psi(A(z_n)-\varepsilon) - \varphi^*(A(z_n)-\varepsilon)\} \geq C_{17}\exp(-2\mu(z_n)). \end{aligned}$$

Выбирая $z_n = \mu^{-1}(\ln n/2)$, в силу леммы 1.2 доказываем теорему 3.2. $\square$

Замечание 3.1. В гауссовском случае $\psi(u) = 1/u$, а $\varphi^*(u) = u^2/2$ и $|\ln\psi(u)| = \ln u = o(u^2/2)$ при $u \to \infty$, т. е. условия теорем 3.1 и 3.2 выполняются.

4. Примеры

Пусть при $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$ $\varphi(\lambda) = |\lambda|^p/p$, $p > 1$, тогда $\varphi^*(x) = |x|^q/q$, где $1/p + 1/q = 1$.

А. Рассмотрим конечномерный случай: $T \subset \mathbf{R}^k$, $d(t,s) \sim C_{19}|t-s|^\alpha$, $t - s \to 0$, $\alpha > 0$. Тогда $H(T_z, \varepsilon) \sim H_0(z) + (k/\alpha)\ln(1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, $H_0(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, $\mu(z) = H_0(z)$, $h(\varepsilon) \sim (k/\alpha)\ln(1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через $V(T_z)$ объем, т. е. лебегову меру множества T_z, B_1 — шар радиуса 1 в $\mathbf{R}^k$. Очевидно, $V(T_z) \geq N(T_z, 2)V(B_1) \geq 2^{-k/\alpha}N(T_z,1)V(B_1)$. С другой стороны, $V(T_z) \leq N(T_z,1)V(B_1)$. Таким образом, $\ln V(T_z) \sim \mu(z)$ при $z \to \infty$. Легко показать, что при $z \to \infty$

$$\begin{aligned} A(z) \sim \varphi^{*-1}(\ln V(T_z)) + \\ + \frac{(k/\alpha)\Big(\ln\varphi^{*-1}(\ln V(T_z)) + \ln\varphi^{*\prime}\Big(\ln\varphi^{*-1}(\ln V(T_z))\Big)\Big)}{\varphi^{*\prime}\Big(\ln\varphi^{*-1}(\ln V(T_z))\Big) - \dfrac{k/\alpha}{\varphi^{*-1}(\ln V(T_z))} + \dfrac{\varphi^{*\prime\prime}\Big(\varphi^{*-1}(\ln V(T_z))\Big)}{\varphi^{*\prime}\Big(\ln\varphi^{*-1}(\ln V(T_z))\Big)}}(1+o(1)). \end{aligned}$$

Эта формула справедлива при любой функции $\varphi^*(x)$. В нашем же случае

$$A(z) \sim (q\ln V(T_z))^{1/q} + \frac{k\ln\ln V(T_z)}{\alpha q^{2/q}\ln V(T_z)}(1+o(1)), \quad z \to \infty.$$

Очевидно, $h(\pi(u))/\varphi^*(u) = (kq^2/\alpha)|u|^{-q}\ln|u| \to 0$ при $u \to \infty$. Обычно $\psi(u) = u^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, тогда $|\ln\psi(u)| = \gamma\ln u = o(\varphi^*(u))$ при $u \to \infty$. Наконец,

$$\sum_n \exp(-\varepsilon n/\varphi^{*-1}(n)) = \sum_n \exp(-\varepsilon q^{1/q}n^{1/p}) < \infty.$$

Таким образом, если $\alpha(m,n) \le C_{18}\beta^{n-m}$, то в силу теорем 2.3 и 3.2

$$\mathbf{P}\Big(\overline{\lim_{z\to\infty}}\Big(\sup_{t\in T_z}\xi(t) - A(z)\Big) = 0\Big) = 1$$

и тем более

$$\mathbf{P}\Big(\overline{\lim_{z\to\infty}}\Big(\sup_{t\in T_z}\xi(t)/A(z)\Big) = 1\Big) = 1.$$

Б. Пусть теперь $H(T_z,\varepsilon) \sim H_0(z) + C_{20}\varepsilon^{-\alpha}$, $\varepsilon \to 0$, $\alpha < 1$. Тогда

$$A(z) \sim (qH_0(z))^{1/q} + C_{20}(qH_0(z))^{\alpha-1/p}(1+o(1)), \quad z \to \infty.$$

При этом $h(\pi(u))/\varphi^*(u) = C_{20}qu^{-(1-\alpha)q} \to 0$ при $u \to \infty$. Если $\psi(u) = u^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, и $\alpha(m,n) \le C_{18}\beta^{n-m}$, то выполнены все условия теорем 2.2, 2.3, 3.1 и 3.2, в силу чего справедливы соотношения (1.5) и (1.6).

Литература

1. Юдицкая П.И. *Асимптотическое поведение максимума гауссовского поля* // Теор. вер. и матем. стат., Киев, КГУ. – 1970. – вып.3. – С.121–136.
2. Малевич Т.Л., Тошов Н. *О границах максимума однородного гауссовского поля* // Теор. вер. и матем. стат., Киев, КГУ. – 1979. – вып.20. – С.76–89.
3. Козаченко Ю.В., Островский Е.И. *Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских* // Теор. вер. и матем. стат., Киев, КГУ. – 1985. – вып.32. – С.42–53.
4. Островский Е.И. *Двусторонние экспоненциальные оценки для распределения максимума случайных полей* // УМН. – 1992. – Т.47. – № 5. – С.225–226.
5. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. *Независимые и стационарно связанные величины.* – М.: Наука, 1965. – 524 с.

Обнинский институт
атомной энергетики

Поступила
12.08.1994