И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 517.544

*А.Ф. ВОРОНИН*

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С КОЭФФИЦИЕНТОМ, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

*Введение.* Пусть $\Pi_\pm = \{x+iy : x \in R,\ \pm y > 0\}$ — верхняя и нижняя полуплоскости. Краевую задачу Римана поставим следующим образом [1]–[4]. Найти две исчезающие на бесконечности голоморфные соответственно в верхней и нижней полуплоскостях функции $F^+(z)$, $F^-(z)$ (кусочно-голоморфную функцию $F(z)$), предельные значения которых на вещественной оси $R$ удовлетворяют краевому условию

$$F^+(x) = G(x)F^-(x) + g(x) \ \text{ для почти всех } \ x \in R, \tag{1}$$

где заданные функции $G(t)$ и $g(t)$ — коэффициент и свободный член задачи соответственно.

Предполагается, что

$$G \in L_\infty(R),\ g \in L_2(R), \tag{2}$$

и коэффициент задачи экспоненциально убывает на бесконечности,

$$G(t) = O(e^{-bt}) \ \text{ при } \ t \to \infty, \quad b > 0. \tag{3}$$

Кроме того, считаем, что на множестве положительной меры коэффициент задачи не равен тождественно нулю (в противном случае задача (1) тривиальна).

Решение краевой задачи будем искать в классах Харди $H^2$

$$F^\pm(z) \in H^2(\Pi_\pm). \tag{4}$$

В такой постановке задача является новой по сравнению с ранее рассмотренными случаями (напр., [1]–[4]).

В данной работе преобразованием Фурье краевого условия (1) задача Римана (1)–(4) сводится к задаче Коши для аналитической в полосе функции. Благодаря этому найдены условия разрешимости и формулы типа Карлемана [5] для решения искомой краевой задачи Римана (1)–(4), доказана теорема единственности.

**1.** *Краевая задача Римана для кусочно-голоморфной функции.* Основные результаты работы представлены двумя теоремами.

**Теорема 1.** *Краевая задача Римана* (1)–(4) *не может иметь более одного решения.*

Для формулировки второй теоремы запишем функцию, дающую конформное отображение единичного круга $U = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на полосу

$$\Pi_0^b = \{x+iy : x \in R,\ 0 < y < b\}, \tag{5}$$

$$v(\zeta) = \frac{2bi}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\ \zeta + \frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99-01-00540.

Функция $v^{-1}(z) = \operatorname{tg}(\pi z/(2bi) - \pi/4)$ осуществляет обратное отображение ([6], с. 130–131).

Обозначим через $\phi$ "гасящую" функцию ([5], сс. 15, 20)

$$\phi(\zeta) := \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_M \frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{dt}{t}\right\}, \quad \zeta \in U,$$

где $M{=}v^{-1}((-\infty,0)){=}\{e^{i\theta} : 0<\theta<\pi/2\} \subset \partial U$. Далее положим $g^{\pm}(x) := \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\frac{dt}{t-(x\pm i0)}$, $x \in R$,

$$w_m(\zeta) := \frac{1}{2\pi i}\int_M \left[\frac{\phi(t)}{\phi(\zeta)}\right]^m \mathcal{F}^{-1}g^{-}(v(t))\frac{dt}{t-\zeta}, \quad \zeta \in U, \tag{6}$$

где $m \in \mathcal{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ — соответственно прямое и обратное преобразования Фурье,

$$\mathcal{F}^{-1}f(v) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipv}f(p)\,dp \ \text{ для } \ f \in L_1(R).$$

**Теорема 2.** *Для существования решения задачи Римана* (1)–(4) *необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

$$\sup_{m\in\mathcal{N}} \|w_m\|_{L_2(U)} < \infty, \tag{7}$$

$$\frac{\mathcal{F}w(x)}{G(x)} \in L_2(R), \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{F}w(t)}{G(t)}\frac{dt}{t-(p+i0)} = 0 \ \text{ для почти всех } \ p \in R, \tag{8}$$

*где*

$$w(v(\zeta)) = \lim_{m\to\infty} w_m(\zeta), \quad \zeta \in U \ \ (\text{сходимость в норме } \ L_2(U)\,). \tag{9}$$

*Если условия существования* (7) *и* (8) *выполнены, то решение задачи Римана* (1)–(4) *находится для почти всех* $x \in R$ *по формулам*

$$F^{+}(x) = g(x) + \mathcal{F}w(x), \tag{10}$$

$$F^{-}(x) = \frac{1}{G(x)}\mathcal{F}w(x). \tag{11}$$

**2. Доказательство теоремы 2.** Предположим, что задача Римана (1)–(4) имеет решение $F^{\pm}(z) \in H^2(\Pi_{\pm})$. В силу известного свойства классов Харди краевые значения функций $F^{\pm}(z)$ существуют почти всюду и принадлежат $L_2(R)$.

Положим

$$W(t) := G(t)F^{-}(t), \quad t \in R, \tag{12}$$

$$w(p) := \mathcal{F}^{-1}W(p), \quad p \in R. \tag{13}$$

Из (12) и (1) получим

$$W(t) = F^{+}(t) - g(t), \ W \in L_2(R). \tag{14}$$

Покажем, что из (13) следует

$$w(p) \in H^2(\Pi_0^b). \tag{15}$$

Действительно, из условия (3) вытекает

$$e^{-ipt}W(t) \in L_1(R) \cap L_2(R) \ \text{ при } \ 0 < \operatorname{Im} p < b.$$

Тогда по свойству аналитичности Фурье образа интегрируемой функции, экспоненциально убывающей на бесконечности с показателем $b$, следует справедливость соотношения (15).

Применив к равенству в (14) обратное преобразование Фурье, с учетом (13) получим

$$w(p) = \mathcal{F}^{-1}F^+(p) - \mathcal{F}^{-1}g(p) \text{ для почти всех } p \in R. \tag{16}$$

Из теоремы 95 ([7], с. 170) следует, что для всех $F^\pm \in H^2(\Pi_\pm)$ выполняется равенство $\mathcal{F}^{-1}F^\pm(p)=0$ при $\pm p < 0$. Тогда из (16) имеем

$$w(p) = -\mathcal{F}^{-1}g^-(p) \text{ для почти всех } p \in (-\infty, 0), \tag{17}$$

где согласно формулам Сохоцкого

$$g(p) = g^+(p) - g^-(p), \; g^\pm \in L_2(R). \tag{18}$$

Соотношение (15) с условием на части границы (17) представляет собой задачу Коши для аналитической в полосе $\Pi_0^b$ функции. Конформным преобразованием $v(\zeta)$ переведем эту задачу из полосы $\Pi_0^b$ в единичный круг $U$. Имеем $w(v(\zeta)) \in H^2(U)$, $w(v(t)) = -\mathcal{F}^{-1}g^-(v(t))$, $t \in M$. По теоремам Патил ([5], сс. 175, 19) получим, что функция $\mathcal{F}^{-1}g^-(v(t))$ является сужением на $M$ функции $w(v(\zeta)) \in H^2(U)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (8). При этом функция $w$ определяется предельным соотношением (9).

Применив к равенству (16) преобразование Фурье, с учетом (18) получим искомое соотношение (10). Из (12), (13) вытекает (11). Из (11) и условия $F^-(z) \in H^2(\Pi_-)$ следует справедливость (8). В одну сторону теорема 2 доказана.

Докажем теорему 2 в другую сторону. Пусть выполнены условия существования (7)–(8). Необходимо показать, что функции $F^\pm(x)$, определенные формулами (10)–(11), являются решением исходной задачи Римана (1)–(4). В силу (10)–(11) функции $F^\pm(x)$ удовлетворяют уравнению (1). Из условий (8) следует $F^-(z) \in H^2(\Pi_-)$. Осталось показать, что $F^+(z) \in H^2(\Pi_+)$. Из условия (7) и соотношения (6) из теорем Патил ([5], сс. 175, 19) следует

$$w(v(t)) \in H^2(U), \quad w(v(t)) = \mathcal{F}^{-1}g^-(v(t)) \text{ при } t \in M.$$

Кроме того, из первого условия в (8) имеем $w(x) \in L_2(R)$. Тогда, применив к равенству (10) обратное преобразование Фурье, получим

$$\mathcal{F}^{-1}F^+(p) = \mathcal{F}^{-1}g(p) + w(p) \in L_2(R). \tag{19}$$

Из (19) следует $\mathcal{F}^{-1}F^+(p) = 0$ при $p > 0$, т. к. $\mathcal{F}^{-1}g(p) = -w(p)$ при $p > 0$. Тогда из теоремы 95 ([7], с. 170) получим $F^+(z) \in H^2(\Pi_+)$. □

Для доказательства теоремы 1 нужно использовать обоснование (9)–(11) и предположить, что $g(x) = 0$, $x \in R$. Тогда из (6) следует $w(\zeta) = 0$, $\zeta \in U$, а из (9)–(11) получим $F^\pm(x) = 0$, $x \in R$.

**3.** *Краевая задача Римана для кусочно-голоморфного вектора.* Теоремы 1 и 2 непосредственно переносятся на многомерный случай, в котором $G = \|G_{kl}\|$ — матрица-функция размера $n \times n$, $F^\pm(x) = (F_1^\pm(x), \ldots, F_n^\pm(x))^\top$, $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))^\top$ — векторы (столбцы) длины $n$, $n > 1$, где $^\top$ — знак транспонирования.

Предполагается, что матрица $G$ имеет обратную, т. е. $\det G(x) \neq 0$ для почти всех $x \in R$. Считаем также, что условия (2)–(4) выполняются для каждого элемента матрицы $G$ и векторов $g$, $F^\pm$ соответственно.

## Литература


1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 296 с.
3. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

4. Хведелидзе Б.В. *Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения* // Тр. Тбилисск. матем. ин-та. – 1956. – Т. 23. – С. 3–158.
5. Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 248 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – 5-е изд. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
7. Титчмарш Е.К. *Введение в теорию интегралов Фурье.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1948. – 480 с.

*Институт математики*
*им. С.Л. Соболева Сибирского отделения*
*Российской Академии наук*

*Поступили*
*первый вариант* 15.09.1999
*окончательный вариант* 18.01.2000