Известия вузов. Математика
2008, №11, с. 60–67

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Л.М. ПИДЖАКОВА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИЗОКЛИНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ

Аннотация. Рассматриваются многомерные изоклинные три-ткани с ковариантно постоянными (относительно связности Черна) тензорами кривизны и кручения. Доказано, что существует единственная (с точностью до изотопии) изоклинная три-ткань с ковариантно постоянными основными тензорами. Найдены структурные и конечные уравнения этой ткани. Рассмотрены некоторые свойства последней.

Ключевые слова: многомерные изоклинные три-ткани, тензоры кривизны и кручения, структурные уравнения ткани, A-ткань.

Abstract. We consider multidimensional isoclinic three-webs with covariantly constant (with respect to the Chern connection) curvature and torsion tensors. It is proved that there exists a unique (up to an isotopy) isoclinic three-webs with covariantly constant basic tensors. We find structure and finite equations of this web and consider some its properties.

Keywords: multidimensional isoclinic three-webs, curvature and torsion tensors, structure equations of web, A-web.

УДК: 514.756

Введение

Многомерные три-ткани как самостоятельный объект начали изучать В. Бляшке, Г. Бол, затем С.С.Черн, М.А.Акивис и др. Проблемой классификации тканей занимались С.С.Черн, М.А. Акивис, В.В. Гольдберг, А.М. Шелехов и их ученики (см. библиографию в [1]).

Каждый класс тканей характеризуется соотношениями на компоненты тензоров кручения и кривизны и их ковариантные производные. Для большинства известных тканей (параллелизуемые, групповые, ткани Бола, Муфанг, изоклинные, трансверсально-геодезические ткани и т. д.) найдены необходимые и достаточные тензорные условия, характеризующие эти классы. Однако существуют такие классы тканей, для которых достаточные условия еще не найдены. К таковым относятся, например, так называемые A-ткани (A_ℓ-ткани, A_r-ткани и A_m-ткани).

В данной статье рассмотрен специальный класс многомерных три-тканей, а именно изоклинные три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Изоклинные ткани общего вида описаны в [1], там же найдены тензорные соотношения, характеризующие этот класс тканей. С другой стороны, ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения рассматривались в работе [2], где, в частности, были получены соответствующие тензорные соотношения и найден пример негрупповой четырехмерной ткани.

В данной работе находим структурные и конечные уравнения (как оказалось, с точностью до изотопии единственной) изоклинной ткани с ковариантно постоянными тензорами

Поступила 14.11.2006

кривизны и кручения. Эту три-ткань обозначим W_0. Показано, что для ткани W_0 выполняются тензорные условия, характеризующие в четвертой дифференциальной окрестности класс тканей A_m. Тем не менее ткань W_0 не является тканью A_m. Отсюда вытекает, что указанные необходимые тензорные условия не являются достаточными, т. е. не характеризуют полностью класс A_m-тканей.

1. Структурные уравнения три-ткани

Структурные уравнения произвольной многомерной три-ткани имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega_j^i + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\ d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega_j^i - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i &= b^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell. \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим ткань, для которой

$$\nabla a^i_{jk} = 0, \quad \nabla b^i_{jk\ell} = 0. \tag{2}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений приводит к следующим тензорным соотношениям [2]:

$$a^i_{mk} b^m_{jpq} + a^i_{jm} b^m_{kpq} = 0, \tag{3}$$

$$b^i_{jkp} a^p_{\ell m} = 0, \tag{4}$$

$$b^m_{jk\ell} b^i_{mpq} - b^i_{mk\ell} b^m_{jpq} - b^i_{jm\ell} b^m_{kpq} - b^i_{jkm} b^m_{\ell pq} = 0, \tag{5}$$

причем тензор кривизны $b^i_{jk\ell}$ симметричен по нижним индексам.

Пусть рассматриваемая ткань W, для которой выполняются тензорные соотношения (3)–(5), является также изоклинной. Как известно [1], изоклинные ткани характеризуются специфическим строением тензора кручения

$$a^i_{jk} = \frac{1}{2}(\delta^i_k a_j - \delta^i_j a_k). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), получаем $b^i_{jkp}(\delta^p_\ell a_m - \delta^p_m a_\ell) = 0$ или $b^i_{jk\ell} a_m = b^i_{jkm} a_\ell$. Последнее соотношение можно записать в виде

$$\frac{b^i_{jk\ell}}{a_\ell} = \frac{b^i_{jkm}}{a_m} = \mu^i_{jk},$$

откуда $b^i_{jk\ell} = \mu^i_{jk} a_\ell$. В силу симметричности тензора кривизны по нижним индексам имеем $\mu^i_{jk} a_\ell = \mu^i_{j\ell} a_k$, откуда $\frac{\mu^i_{jk}}{a_k} = \frac{\mu^i_{j\ell}}{a_\ell} = \mu^i_j$ и, следовательно, $b^i_{jk\ell} = \mu^i_j a_k a_\ell$. Повторяя те же рассуждения, получим $\mu^i_j = \mu^i a_j$. В результате компоненты тензора кривизны выглядят в виде

$$b^i_{jk\ell} = \mu^i a_j a_k a_\ell. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (3) и свертывая по индексам i и k, получим

$$(2 - r) b^m_{jpq} a_m - b^k_{kpq} a_j = 0.$$

В силу (7) эти соотношения эквивалентны следующим:

$$(1 - r)\mu^m a_m a_j a_p a_q = 0. \tag{8}$$

Рассматриваем многомерные ткани, т. е. считаем $r > 0$. Оставляя в стороне тривиальный случай $a_i = 0$, из (8) получаем

$$\mu^m a_m = 0. \tag{9}$$

В силу (6) и (9) соотношения (4) и (5) удовлетворяются тождественно.

Из уравнений (2) при условии (1) следует, что величины a_i и μ^i удовлетворяют уравнениям
$$\nabla a_i = 0, \quad \nabla \mu^i = 0, \tag{10}$$
т. е. тензоры a_i и μ^i являются ковариантно постоянными.

Найдем структурные уравнения рассматриваемой ткани. В силу (6) и (7) уравнения (1) принимают вид
$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a_j \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^i,\\
&d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i \wedge \omega^i_j - a_j \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^i,\\
&d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = \mu^i a_j a_k a_\ell \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell.
\end{aligned}$$

Далее, для упрощения вычислений адаптируем репер рассматриваемой ткани. Базисный ковектор e_1 направим по ковектору a_i, тогда $a_1 = 1$, $a_{\hat i} = 0$ $(i,j,k,l = \overline{1,r},\ \widehat{i},\widehat{j},\widehat{k},\widehat{\ell} = \overline{2,r})$. В этом случае из соотношения (9) получаем $\mu^1 = 0$, $\mu^{\hat i} \neq 0$, и компоненты тензоров кручения и кривизны (6) и (7) принимают следующий вид:
$$\begin{aligned}
&a^{\hat i}_{jk} = 0, \quad a^i_{\hat j \hat k} = 0, \quad a^1_{1\hat i} \neq 0,\\
&b^1_{jk\ell} = 0, \quad b^{\hat i}_{\hat j \hat k \hat \ell} = 0, \quad b^{\hat i}_{111} \neq 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Из структурных уравнений (1) в силу (11) следует $d\omega^1_j = \omega^k_j \wedge \omega^1_k$. По теореме Фробениуса уравнения $\omega^1_j = 0$ вполне интегрируемы и можно сузить семейство адаптированных реперов ткани, положив $\omega^1_j = 0$ $(j = \overline{1,r})$.

С другой стороны, в силу (11) $d\omega^{\hat i}_{\hat j} = \omega^k_{\hat j} \wedge \omega^{\hat i}_k = \omega^1_{\hat j} \wedge \omega^{\hat i}_1 + \omega^{\hat k}_{\hat j} \wedge \omega^{\hat i}_{\hat k} = \omega^{\hat k}_{\hat j} \wedge \omega^{\hat i}_{\hat k}$. Это означает, что соотношения $\omega^{\hat i}_{\hat j} = 0$ также вполне интегрируемы. Поэтому можно положить $\omega^{\hat i}_{\hat j} = 0$. Таким образом, ненулевыми остаются только формы $\omega^{\hat i}_1$. Из (1) находим, что они удовлетворяют структурным уравнениям
$$d\omega^{\hat i}_1 = \omega^k_1 \wedge \omega^{\hat i}_k + \mu^{\hat i} a_1 a_k a_\ell \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = \mu^{\hat i} a_k a_\ell \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = \mu^{\hat i} \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1.$$

В итоге структурные уравнения рассматриваемой ткани принимают вид
$$d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \tag{12.1}$$
$$d\underset{1}{\omega}^{\hat i} = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega^{\hat i}_1 + \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat i}, \tag{12.2}$$
$$d\underset{2}{\omega}^{\hat i} = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega^{\hat i}_1 - \underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat i}, \tag{12.3}$$
$$d\omega^{\hat i}_1 = \mu^{\hat i} \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1. \tag{12.4}$$

Из условия (10) $\nabla \mu^i = 0$ $(d\mu^i + \mu^m \omega^i_m = 0)$ с учетом проведенной канонизации и того, что $\mu^1 = 0$, следует $d\mu^{\hat i} = 0$, т. е. $\mu^{\hat i} = \mathrm{const}$. Система (12.1)–(12.4) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Изоклинные ткани с ковариантно-постоянными тензорами кривизны и кручения (ткани W_0) существуют. Этот класс тканей допускает такое семейство адаптированных реперов, в которых тензор b имеет вид* (10)*, а структурные уравнения имеют вид* (12.1)–(12.4)*, где величины μ^i являются постоянными.*

2. Конечные уравнения три-ткани W_0

Найдем теперь конечные уравнения рассматриваемой ткани W_0. Интегрируя уравнения (12.1), получим

$$\underset{1}{\omega}^1 = du^1, \quad \underset{2}{\omega}^1 = dv^1, \tag{13.1}$$

так что уравнения (12.4) примут вид $d\omega_1^{\hat{i}} = \mu^{\hat{i}} du^1 \wedge dv^1$. Так как $\mu^{\hat{i}} = \mathrm{const}$, то, проинтегрировав предыдущие уравнения, получим

$$\omega_1^{\hat{i}} = \frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}(u^1 dv^1 - v^1 du^1) + d\varphi^{\hat{i}}, \tag{13.2}$$

где $\varphi^{\hat{i}}$ — некоторые новые переменные. С учетом (13.1) и (11.2) оставшиеся структурные уравнения (12.2), (12.3) примут вид

$$d\underset{1}{\omega}^{\hat{i}} + \underset{1}{\omega}^{\hat{i}} \wedge du^1 = \frac{1}{2}\mu^{\hat{i}} u^1 du^1 \wedge dv^1 + du^1 \wedge d\varphi^{\hat{i}}, \tag{13.3}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{\hat{i}} - \underset{2}{\omega}^{\hat{i}} \wedge dv^1 = -\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}} v^1 dv^1 \wedge du^1 + dv^1 \wedge d\varphi^{\hat{i}}. \tag{13.4}$$

Решение системы уравнений (13.3) будем искать в виде

$$\underset{1}{\omega}^{\hat{i}} = e^{u^1} du^{\hat{i}} + A du^1 + B dv^1 + C d\varphi^{\hat{i}}, \tag{14}$$

где A, B, C — неизвестные функции аргументов u^1, v^1, $d\varphi^{\hat{i}}$, которые найдем методом неопределенных коэффициентов. Подставляя решение (14) в уравнение (13.3), получаем

$$\begin{aligned} e^{u^1} du^1 \wedge du^{\hat{i}} &+ A_{v^1} dv^1 \wedge du^1 + A_{\varphi^{\hat{i}}} d\varphi^{\hat{i}} \wedge du^1 + B_{u^1} du^1 \wedge dv^1 + \\ &+ B_{\varphi^{\hat{i}}} d\varphi^{\hat{i}} \wedge dv^1 + C_{u^1} du^1 \wedge d\varphi^{\hat{i}} + C_{v^1} dv^1 \wedge d\varphi^{\hat{i}} + e^{u^1} du^{\hat{i}} \wedge du^1 + \\ &+ B dv^1 \wedge du^1 + C d\varphi^{\hat{i}} \wedge du^1 = \frac{1}{2}\mu^{\hat{i}} u^1 du^1 \wedge dv^1 + du^1 \wedge d\varphi^{\hat{i}}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты левой и правой частей, получим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{gathered} -A_{\varphi^{\hat{i}}} + C_{u^1} - C = 1, \\ -A_{v^1} + B_{u^1} - B = \frac{1}{2}\mu^{\hat{i}} u^1, \\ B_{\varphi^{\hat{i}}} = C_{v^1}. \end{gathered} \tag{15}$$

Из последнего соотношения следует, что функции B и C могут быть записаны в виде

$$B = \gamma_{v^1} + \sigma_1(u^1, v^1), \quad C = \gamma_{\varphi^{\hat{i}}} + \sigma_2(u^1, \varphi^{\hat{i}}), \tag{16}$$

где $\sigma_1(u^1, v^1)$ и $\sigma_2(u^1, \varphi^{\hat{i}})$ — некоторые новые функции.

С учетом (16) первые два уравнения системы (15) принимают вид

$$\begin{gathered} -A_{\varphi^{\hat{i}}} + \gamma_{\varphi^{\hat{i}} u^1} + (\sigma_2(u^1, \varphi^{\hat{i}}))_{u^1} - \gamma_{\varphi^{\hat{i}}} - \sigma_2(u^1, \varphi^{\hat{i}}) = 1, \\ -A_{v^1} + \gamma_{v^1 u^1} + (\sigma_1(u^1, v^1))_{u^1} - \gamma_{v^1} - \sigma_1(u^1, v^1) = \frac{1}{2}\mu^{\hat{i}} u^1. \end{gathered}$$

Положим $D = A - \gamma_{u^1} + \gamma$, тогда предыдущие уравнения запишутся так:

$$-D_{\varphi^{\hat{i}}} + (\sigma_2(u^1, \varphi^{\hat{i}}))_{u^1} - \sigma_2(u^1, \varphi^{\hat{i}}) = 1,$$

$$-D_{v^1}+(\sigma_1(u^1,v^1))_{u^1}-\sigma_1(u^1,v^1)=\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1.$$

Введем новые функции δ_1 и δ_2 равенствами

$$\sigma_1(u^1,v^1)=\frac{\partial}{\partial v^1}\delta_1,\quad \sigma_2(u^1,\varphi^{\hat{i}})=\frac{\partial}{\partial\varphi^{\hat{i}}}\delta_2,$$

тогда имеем $D=-\delta_1+(\delta_1)_{u^1}-\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1v^1-\delta_2+(\delta_2)_{u^1}-\varphi^{\hat{i}}$. Отсюда вытекает

$$\begin{aligned}
&A=-\gamma-\gamma_{u^1}-\delta_1+(\delta_1)_{u^1}-\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1v^1-\delta_2(\delta_2)_{u^1}-\varphi^{\hat{i}},\\
&B=\gamma_{v^1}+(\delta_1)_{v^1},\\
&C=\gamma_{\varphi^{\hat{i}}}+(\delta_2)_{\varphi^{\hat{i}}},
\end{aligned}$$

а решение уравнения (13.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\omega}^{\hat{i}}=e^{u^1}du^{\hat{i}}+\Big(-\gamma+\gamma_{u^1}-\delta_1+(\delta_1)_{u^1}-\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1v^1-\delta_2+(\delta_2)_{u^1}-\varphi^{\hat{i}}\Big)du^1+\\
+(\gamma_{v^1}+(\delta_1)_{v^1})dv^1+(\gamma_{\varphi^{\hat{i}}}+(\delta_2)_{\varphi^{\hat{i}}})d\varphi^{\hat{i}}.
\end{aligned}$$

Обозначив $\gamma+\delta_1+\delta-2=\widetilde{\gamma}_1$, окончательно получаем

$$\underset{1}{\omega}^{\hat{i}}=e^{u^1}du^{\hat{i}}+\Big(-\widetilde{\gamma}_1-\varphi^{\hat{i}}-\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1v^1\Big)du^1+d\widetilde{\gamma}_1,$$

где $\widetilde{\gamma}_1=\widetilde{\gamma}_1(u^1,v^1,\varphi^{\hat{i}})$ — произвольная гладкая функция.

Аналогично находим решение уравнения (13.4)

$$\underset{2}{\omega}^{\hat{i}}=e^{-v^1}dv^{\hat{i}}+\Big(\widetilde{\gamma}_2-\varphi^{\hat{i}}+\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1v^1\Big)dv^1+d\widetilde{\gamma}_2,\tag{17}$$

где $\widetilde{\gamma}_2=\widetilde{\gamma}_2(u^1,v^1,\varphi^{\hat{i}})$ — некоторая произвольная гладкая функция.

Теперь найдем уравнения слоений рассматриваемой ткани. Согласно теории первое слоение задается системой уравнений $\underset{1}{\omega}^1=0$, $\underset{1}{\omega}^{\hat{i}}=0$ или $du^1=0$, $e^{u^1}du^{\hat{i}}+(-\widetilde{\gamma}_1-\varphi^{\hat{i}}-\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1v^1)du^1+d\widetilde{\gamma}_1=0$. После интегрирования получим $u^1=x^1$, $e^{x^1}u^{\hat{i}}+\widetilde{\gamma}_1=x^{\hat{i}}$, где x^i $(i=\overline{1,r})$ — параметры первого слоения.

Уравнения второго слоения имеют вид $\underset{2}{\omega}^1=0$, $\underset{2}{\omega}^{\hat{i}}=0$ или в силу (13.1) и (17)

$$dv^1=0,\quad e^{-v^1}dv^{\hat{i}}+\Big(\widetilde{\gamma}_2-\varphi^{\hat{i}}+\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1v^1\Big)dv^1+d\widetilde{\gamma}_2=0.$$

Интегрируя эту систему, найдем $v^1=y^1$, $e^{-y^1}v^{\hat{i}}+\widetilde{\gamma}_2=y^{\hat{i}}$, где y^i $(i=\overline{1,r})$ — параметры второго слоения.

Наконец, уравнения третьего слоения имеют вид $\underset{1}{\omega}^1+\underset{2}{\omega}^1=0$, $\underset{1}{\omega}^{\hat{i}}+\underset{2}{\omega}^{\hat{i}}=0$ или

$$\begin{aligned}
&du^1+dv^1=0,\\
&e^{u^1}du^{\hat{i}}+\Big(-\widetilde{\gamma}_1-\varphi^{\hat{i}}-\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1v^1\Big)du^1+d\widetilde{\gamma}_1+e^{-v^1}dv^{\hat{i}}+\Big(\widetilde{\gamma}_2-\varphi^{\hat{i}}+\frac{1}{2}\mu^{\hat{i}}u^1v^1\Big)dv^1d\widetilde{\gamma}_2=0.
\end{aligned}$$

Интегрируя эту систему, находим

$$\begin{aligned}
&u^1+v^1=z^1,\\
&e^{z^1}u^{\hat{i}}+v^{\hat{i}}+e^{v^1}\widetilde{\gamma}_1+e^{v^1}\widetilde{\gamma}_2+\mu^{\hat{i}}e^{v^1}(u^1v^1-u^1+v^1-2)=z^{\hat{i}},
\end{aligned}$$

где z^i $(i = \overline{1, r})$ — параметры третьего слоения.

Теперь, исключая локальные координаты u^i, v^i, $\varphi^{\hat{i}}$ $(i = \overline{1, r}, \,\widehat{\imath} = \overline{2, r})$, найдем уравнения нашей ткани

$$z^1 = x^1 + y^1,$$
$$z^{\hat{i}} = e^{y^1}(x^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + \mu^{\hat{i}}(x^1y^1 - x^1 + y^1 - 2)).$$

После изотопического преобразования

$$x^1 \to u^1, \qquad \frac{x^{\hat{i}}}{\mu^{\hat{i}}} \to u^{\hat{i}};$$
$$y^1 - 1 \to v^1, \qquad \frac{y^{\hat{i}} + \mu^{\hat{i}}(y^1 - 2)}{\mu^{\hat{i}}} \to v^{\hat{i}};$$
$$z^1 - 1 \to z^1, \qquad \frac{e^{-1}z^{\hat{i}}}{\mu^{\hat{i}}} \to z^{\hat{i}}$$

найденные выше уравнения примут более простой вид

$$z^1 = u^1 + v^1, \quad z^{\hat{i}} = e^{v^1}(u^{\hat{i}} + v^{\hat{i}} + u^1v^1). \tag{18}$$

Итак, доказана

Теорема 2. *Существует единственная* (*с точностью до изотопии*) *изоклинная три-ткань с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения, уравнения которой в некоторых локальных координатах имеют вид* (18).

С другой стороны [1], уравнения (18) можно рассматривать как уравнения координатной лупы найденной три-ткани (с единичным элементом $(0, 0, \dots, 0)$).

3. A-свойства изоклинной три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения

Напомним, что три-ткань с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения, найденная в работе [2], является A-тканью ($A \equiv A_\ell \& A_r \& A_m$). Как известно, три-ткань W называется A_ℓ-тканью, если в каждой ее координатной лупе операторы вида $\ell_{x,y} = L_{xy}^{-1} \circ L_x \circ L_y$, где L_x — левый сдвиг, являются автоморфизмами, т. е. для любых элементов x, y, v и u координатной лупы выполняется соотношение

$$\ell_{x,y}(uv) = \ell_{x,y}(u)\ell_{x,y}(v).$$

В координатных лупах A_r-ткани и A_m-ткани автоморфизмами являются соответственно операторы $r_{x,y} = R_x \circ R_x \circ R_{xy}^{-1}$ и $m_{x,y} = L_x^{-1} \circ R_y^{-1} \circ L_x \circ R_y$. Алгебраические свойства A-луп исследовались в работах [3], [4]. В [2] для найденной там ткани мы вычислили (по ее конечным уравнениям) операторы $\ell_{x,y}$, $r_{x,y}$, $m_{x,y}$ и доказали, что все ее координатные лупы являются A-лупами.

Тензорные соотношения, характеризующие класс A-тканей в четвертой дифференциальной окрестности могут быть получены с помощью формул, найденных в [1],

$$\mathcal{L}_{x,y}(u, v) = \mathcal{L}(x, y, u, v) + \{5\},$$
$$\mathcal{R}_{x,y}(u, v) = \mathcal{R}(x, y, u, v) + \{5\},$$
$$\mathcal{M}_{x,y}(u, v) = \mathcal{M}(x, y, u, v) + \{5\}.$$

Здесь

$$\mathcal{L}(x, y, u, v) = -\underset{2}{c}(y, x, u, v) - 2a(u, b(y, x, v)),$$

$$\mathcal{R}(x,u,u,v) = -\underset{1}{c}(x,v,y,u) + 2a(v,b(x,u,y)),$$
$$\mathcal{M}(x,y,u,v) = \underset{1}{c}(v,u,y,x) + \underset{2}{c}(u,x,v,y)$$

суть тензоры, характеризующие главную часть отклонения операторов $\ell_{x,y}$, $r_{x,y}$, $m_{x,y}$ от автоморфизма, а $\underset{1}{c}(v,u,y,x)$, $\underset{2}{c}(u,x,v,y)$ — так называемые ковариантные производные тензора кривизны $\nabla b^i_{jk\ell} = \underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m}\underset{1}{\omega}{}^m - \underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m}\underset{2}{\omega}{}^m$.

Таким образом, тензорные соотношения, характеризующие A-ткани в четвертой дифференциальной окрестности, выглядят следующим образом:

$$A_\ell : \underset{2}{c}{}^i_{kj\ell m} + 2a^i_{\ell p}b^p_{kjm} = 0, \tag{19}$$

$$A_r : \underset{1}{c}{}^i_{jmk\ell} - 2a^i_{mp}b^p_{j\ell k} = 0, \tag{20}$$

$$A_m : \underset{1}{c}{}^i_{m\ell kj} + \underset{2}{c}{}^i_{\ell jmk} = 0. \tag{21}$$

Легко проверить, что для найденной ткани W_0 тензорные соотношения (19) и (20) не выполняются. Следовательно, она не является тканью A_ℓ и A_r.

С другой стороны, соотношение (21) для найденной ткани W_0 выполняется. Покажем, тем не менее, что ткань W_0 не является тканью A_m.

Напомним, что лупа называется A_m-лупой тогда и только тогда, когда операторы вида $m_{x,y} = L_x^{-1} \circ R_y^{-1} \circ L_x \circ R_y$ являются в ней автоморфизмами, т. е. для любых элементов x, y, u и v лупы выполняется соотношение [3]

$$m_{x,y}(uv) = m_{x,y}(u)m_{x,y}(v). \tag{22}$$

Для описания действия оператора $m_{x,y}$ в этой лупе возьмем сначала равенство $m_{x,y}(u)=v$. Оно эквивалентно соотношению $x(uy) = (xv)y$. Используя уравнения (18), в левой части получаем

$$(x(uy))^1 = x^1 + u^1 + y^1,$$
$$(x(uy))^{\hat{i}} = e^{u^1+y^1}(x^{\hat{i}} + e^{y^1}(u^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + u^1y^1) + x^1(u^1+y^1)).$$

В правой части имеем

$$((xv)y)^1 = x^1 + u^1 + y^1,$$
$$((xv)y)^{\hat{i}} = e^{y^1}(e^{v^1}(x^{\hat{i}} + v^{\hat{i}} + x^1y^1) + y^{\hat{i}} + (x^1+v^1)y^1).$$

Выражая координаты v^i через u^i, находим действие оператора $m_{x,y}$:

$$v^1 = u^1,$$
$$v^{\hat{i}} = e^{y^1}(u^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + u^1y^1) + x^1y^1 - e^{-u^1}y^{\hat{i}} - e^{u^1}y^1(x^1+u^1).$$

Рассмотрим теперь соотношение (22). Найдем левую часть равенства $m_{x,y}(uv) = p$. После несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} p^1 &= (uv)^1 = u^1 + v^1,\\ p^{\hat{i}} &= e^{y^1}((uv)^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + (uv)^1y^1) + x^1y^1 - e^{-(uv)^1}y^{\hat{i}} - e^{-(uv)^1}y^1(x^1 + (uv)^1) =\\ &= e^{y^1}(e^{v^1}(u^{\hat{i}} + v^{\hat{i}} + u^1v^1)y^{\hat{i}} + (u^1+v^1)y^1) + x^1y^1 - e^{-u^1-v^1}y^{\hat{i}} -\\ &\quad - e^{-u^1-v^1}y^1(x^1+u^1+v^1).\end{aligned}$$

Теперь найдем правую часть равенства (22). Обозначим $m_{x,y}(u) = q$, $m_{x,y}(v) = s$. Вычисляя, находим

$$\begin{aligned}
&q^1 = u^1,\\
&q^{\hat{i}} = e^{y^1}(u^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + u^1y^1) + x^1y^1 - e^{-u^1}y^{\hat{i}} - e^{-u^1}y^1(x^1 + u^1);\\
&s^1 = v^1,\\
&s^{\hat{i}} = e^{y^1}(v^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + v^1y^1) + x^1y^1 - e^{-v^1}y^{\hat{i}} - e^{-v^1}y^1(x^1 + v^1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&(qs)^1 = q^1 + s^1 = u^1 + v^1,\\
&(qs)^{\hat{i}} = e^{s^1}(q^{\hat{i}} + s^{\hat{i}} + q^1s^1) = e^{v^1}(e^{y^1}(u^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + u^1y^1) + x^1y^1 - e^{-u^1}y^{\hat{i}} -\\
&\qquad - e^{-u^1}y^1(x^1 + u^1) + e^{y^1}(v^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + v^1y^1) + x^1y^1 - e^{-v^1}y^1(x^1 + v^1)u^1v^1).
\end{aligned}$$

Как видно, $p \neq qs$, следовательно, равенство (22) не выполняется, лупа (18) не является A_m-лупой, а ткань W_0 не является тканью A_m.

Таким образом, верна

Теорема 3. *Тензорные соотношения* (21), *характеризующие дифференциальную окрестность четвертого порядка A_m-тканей, не являются достаточными для того, чтобы произвольная три-ткань была A_m-тканью.*

Литература

[1] Akivis M.A., Shelekhov A.M. *Geometry and algebra of multidimensional three-webs.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1992. – 358 p.

[2] Shelekhov A.M., Pidzhakova L.M. *On three-webs with covariantly constant torsion and curvature tensors* // Webs and Quasigroups. – Tver: Tver State Univ., 1998-1999. – P. 92–103.

[3] Bruck R.H., Paige L.J. *Loops whose inner mappings are automorphisms* // Ann. Math. – 1956. – V. 63. – № 2. – P. 308–323.

[4] Goodaire E.G., Robinson D.A. *A class of loops which are isomorphic to all loop isotopes* // Canad. J. Math. – 1982. – V. 34. – № 3. – P. 662–672.

Л.М. Пиджакова

доцент, кафедра информатики и прикладной математики,
Тверской государственный технический университет,
Россия, 170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, д. 22,

`e-mail:` lpidjhacova@mail.ru

L.M. Pidzhakova

Associate Professor, Chair of Information Science and Applied Mathematics,
Tver State Technical University,
22 Afanasii Nikitin Sea-front, Tver, 170026 Russia,

`e-mail:` lpidjhacova@mail.ru