И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 8 (459)

УДК 517.977

А.И. МАЛИКОВ

МАТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УСЛОВИЕМ КВАЗИМОНОТОННОСТИ

1. Введение

Метод векторных функций Ляпунова [1]–[3] опирается на дифференциальные неравенства. При этом системы сравнения строятся путем мажорирования производных от компонент вектор-функции Ляпунова, взятых в силу исходной системы. Обычно в качестве систем сравнения используются системы дифференциальных уравнений с условием Важевского. Такие системы сравнения изучались в [2], [4], [5], где установлены критерии устойчивости, ограниченности, инвариантности и даны оценки различных показателей качества. Требование, чтобы выбираемая мажоранта удовлетворяла условию Важевского, сужает класс допустимых систем сравнения. В связи с этим были предприняты попытки построения таких систем сравнения, которые удовлетворяли бы менее ограничительным требованиям, нежели условие Важевского. В [6], [7] было предложено в качестве систем сравнения использовать системы дифференциальных уравнений, определенные в линейном пространстве, полуупорядоченном с помощью некоторого конуса. Такие системы изучались в [8]. В [9] предложено использовать матричные системы сравнения. В данной статье расширяется класс матричных систем сравнения за счет систем дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности правой части относительно конуса неотрицательно определенных симметрических матриц. Доказывается теорема о матричных дифференциальных неравенствах, с помощью которой устанавливается инвариантность некоторых множеств, монотонность решений по начальным данным, динамические свойства устойчивости, инвариантности и ограниченности решений матричных систем сравнения.

2. Исходные понятия и определения. Постановка задачи

Пусть G — множество симметрических $n\times n$-матриц Q. В G определим квадратичную форму $\psi^T Q\psi$, где $\psi\in R^n$, $Q\in G$. Для любого $\psi\in R^n$ определена норма $\|\psi\|=\sqrt{\psi^t\psi}$. Обозначим $\Phi=\{\psi\in R^n:\|\psi\|=1\}$. В G выделим подмножество неотрицательно определенных матриц

$$G_+=\{Q\in G:\psi^T Q\psi\ge 0\ \forall\psi\in\Phi\},$$

которое будет являться конусом в G.

Как известно ([9], с. 17), конус G_+ неотрицательно определенных симметрических матриц является телесным, воспроизводящим и нормальным. Обозначим конус положительно определенных матриц через G^+. Отношение частичного порядка в G вводится с помощью конуса G_+ следующим образом [9]–[11]. Если $Z,Y\in G$, то неравенства $Z\ge Y$, $Z>Y$ означают соответственно $Z-Y\in G_+$, $Z-Y\in G^+$. В G введем норму $\|Q\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1,\ j=i}^{n} q_{ij}^2}$ и определим область $\mathcal{B}=\{Y\in G:\|Y-Y_0\|<h\}$ для любого заданного $Y_0\in G$, $h=\text{const}$.

Будем изучать решения $Y(t)$ задачи Коши

$$dY(t)/dt=F(t,Y(t)),\quad Y(t_0)=Y_0,\quad Y_0\in\mathcal{B},\tag{1}$$

на промежутках определения $T = [t_0, t_0 + \tau)$ $(\forall t \in T)$ $Y(t) \in \mathcal{B}$. Здесь матричная функция $F : \mathcal{A} \to G$ предполагается определенной в области $\mathcal{A} = T \times \mathcal{B}$.

Для матричных дифференциальных уравнений, как и для векторных, имеют место теоремы существования и продолжимости классических решений (по терминологии из ([1], с. 69–70)), правосторонних решений и решений в смысле Каратеодори (K-решений) в случае, если матричная функция $F(t, Y)$ соответственно непрерывна, непрерывна справа, удовлетворяет условиям Каратеодори. Например, справедлива следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы ([12], с. 7) существования и единственности решения задачи Коши для векторных дифференциальных уравнений.

Теорема 1. *Пусть матричная функция $F(t, Y)$ удовлетворяет при $t \in T = [t_0, t_0 + \tau]$, $Y \in \mathcal{B}$ условиям Каратеодори:*

1) *$F(t, Y)$ при почти всех t определена и непрерывна по Y;*
2) *$F(t, Y)$ измерима по t при каждом Y;*
3) *$\|F(t, Y)\| \le \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ суммируема (на каждом конечном отрезке, если t не ограничено в области $\mathcal{A}$);*

и пусть существует такая суммируемая функция $l(t)$, что для любых $Y', Y'' \in \mathcal{B}$, $t \in T$

$$\|F(t, Y') - F(t, Y'')\| \le l(t)\|Y' - Y''\|. \tag{2}$$

Тогда для всякого $(t_0, Y_0) \in \mathcal{A}$ дифференциальное матричное уравнение (1) *имеет единственное решение $Y(t, t_0, Y_0)$, удовлетворяющее условию $Y(t_0, t_0, Y_0) = Y_0$ и $Y(t, t_0, Y_0) \in \mathcal{B}$ при всех $t \in T$.*

Доказательство проводится так же, как для векторных дифференциальных уравнений ([12], с. 8), поскольку любой симметрической матрице можно поставить в соответствие вектор размерности $n(n + 1)/2$, а матричному дифференциальному уравнению (1) поставить в соответствие векторное дифференциальное уравнение.

Аналогичные утверждения имеют место для классических и правосторонних решений матричной системы дифференциальных уравнений (1).

Множество $\mathcal{B} \in G$ называют *ограниченным по конусу* G_+, если найдется такая матрица $Y \in G_+$, что $Z \le Y$ при всех $Z \in \mathcal{B}$.

Обозначим через $P_m \uparrow$ *монотонно неубывающую последовательность* $\{P_m\}$ *матриц* $P_m \in G$, для которой $P_{m+1} \ge P_m$ $(m = 1, 2, \dots)$. Аналогично можно определить *монотонно невозрастающую последовательность* $P_m \downarrow$.

Лемма 1 ([13], с. 52). *Если все матрицы P_m симметрические и таковы, что найдется $Q \in G : P_m \ge Q$ $(m = 1, 2, \dots)$ и $P_m \downarrow$, то существует матрица $P = \lim P_m$ при $m \to \infty$.*

Здесь предел в правой части означает ([13], с. 52), что для любых $x, y \in R^n$ $y^T P x = \lim\limits_{m \to \infty} y^T P_m x$.

Таким образом, конус G_+ является правильным ([11], с. 38), поскольку каждая монотонная и ограниченная по конусу G_+ последовательность матриц имеет предел. Если последовательность Z_m сходится к элементу $Z \in G$ и $Z_m \in G_+$ при $m = 1, 2, \dots$, то и $Z \in G_+$.

Определение 1. Будем говорить, что функция F *монотонно неубывающая относительно конуса* G_+, если для любых $Z, Y \in \mathcal{B}$ из условия $Y - Z \in G_+$ следует $F(t, Y) - F(t, Z) \in G_+$ (или если для любых $Z, Y \in \mathcal{B}$ и всех $\psi \in \Phi$ из условия $\psi^T(Y - Z)\psi \ge 0$ следует $\psi^T(F(t, Y) - F(t, Z))\psi \ge 0$ для почти всех $t \in T$).

Определение 2. Будем говорить, что функция F *квазимонотонно неубывающая относительно конуса* G_+, если для любых $Z, Y \in \mathcal{B}$, $Y - Z \in G_+$, и таких $\psi \in \Phi$, что если $\psi^T(Y - Z)\psi = 0$, то $\psi^T(F(t, Y) - F(t, Z))\psi \ge 0$ для почти всех $t \in T$.

Например, для $Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$ матричная функция $F(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2y_2 \end{bmatrix}$ не является монотонной, поскольку из $Y'' - Y' = \begin{bmatrix} y_1'' - y_1' & 0 \\ 0 & y_2'' - y_2' \end{bmatrix}$ не следует $F(Y'') - F(Y') = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2(y_2'' - y_2') \end{bmatrix} \geq 0$. Однако, если возьмем какой-либо $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, при котором $\psi^T(Y'' - Y')\psi = \psi_1^2(y_1'' - y_1') + \psi_2^2(y_2'' - y_2') = 0$ (что имеет место либо при $\psi_1 = 0$ и $y_2'' - y_2' = 0$, либо при $\psi_2 = 0$ и $y_1'' - y_1' = 0$), то получим $\psi^T(F(Y'') - F(Y'))\psi = -2\psi_2^2(y_2'' - y_2') = 0$. А это по определению 2 означает, что матричная функция $F(Y)$ является квазимонотонно неубывающей относительно G_+.

Отметим, что определение 2, введенное в ([14], с. 128) для вектор-функций в конечномерном пространстве, частично упорядоченном с помощью телесного конуса K, является обобщением известного условия квазимонотонности Важевского (неубывания вектор-функции по внедиагональным компонентам).

Обозначим класс матричных функций на T, квазимонотонно неубывающих относительно конуса G_+, через $W(G_+)$.

Определение 3. Функция $F(t, Y)$ называется *полуквазимонотонной по Y относительно конуса G_+*, если $Y \in G_+$ и $\psi^T Y \psi = 0$ для некоторого $\psi \in \Phi$ влекут $\psi^T(F(t, Y))\psi \geq 0$.

3. Существование верхних решений

При условии квазимонотонности функции $F(t, Y)$ по Y относительно конуса G_+ так же, как в векторном случае, можно показать существование верхнего относительно конуса G_+ решения на некотором не равном нулю интервале значений $[t_0, t_0 + \tau)$.

Определение 4. Решение $\overline{Y}$ (соответственно $\underline{Y}$) системы (1) будем называть верхним (соответственно нижним), если $Y(t) \leq \overline{Y}(t)$ (соответственно $\underline{Y}(t) \leq Y(t)$) для каждого решения (1) и всех $t \in T$, при которых обе матричные функции определены.

Лемма 2. 1) *Если функция $F(t, Y)$ квазимонотонно неубывающая по Y, и $F(t, 0) \geq 0$, то F полуквазимонотонна по Y. Обратное также верно, если F — линейная функция.*

2) *Пусть функция $F(t, Y)$ квазимонотонно неубывающая по Y, и $Z(t) : T \to \mathcal{B}$. Тогда $H(t, Y) = F(t, Z(t) + Y) - F(t, Z(t))$ является квазимонотонно неубывающей по Y и, кроме того, H полуквазимонотонна по Y.*

Доказательство очевидно.

Для доказательства существования верхнего решения потребуется лемма из ([16], с. 110), которая, как показано в ([17], с. 215), остается справедливой для матричных функций с условием квазимонотонности относительно конуса G_+.

Лемма 3 ([17], с. 215). *Предположим, что $F(t, Y)$ обладает следующими свойствами по отношению к G_+ :*

a) *F ограничена;*

b) *F квазимонотонно неубывающая по Y.*

Пусть $Z(t)$, $Y(t)$ непрерывны на T и дифференцируемы на $T_\Sigma = T \setminus \Sigma$ (где Σ — множество нулевой меры). Предположим далее

c) $Z(0) < Y(0)$;

d) $dZ/dt - F(t, Z) < dY/dt - F(t, Y)$ *на* T_Σ.

Тогда $Z(t) < Y(t)$ на T.

Теорема 2. *Пусть $F \in W(G_+)$ и удовлетворяет в области $\mathcal{A} = T \times \mathcal{B}$ условиям Каратеодори. Тогда задача (1) имеет локальное верхнее решение, которое может быть продолжено до границы замкнутой ограниченной области $\Gamma \subset \mathcal{B}$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$dY_k/dt = F(t, Y_k) + \frac{1}{k}I, \quad Y_k(t_0) = Y(t_0) + \frac{1}{k}I, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где I — единичная $n \times n$-матрица, правая часть которого так же, как и $F(t, Y)$, удовлетворяет условиям Каратеодори и является квазимонотонной относительно конуса G_+. В силу теоремы 1 при каждом k существует решение задачи (3), которое может быть продолжено до границы любой замкнутой ограниченной области $\Gamma \subset \mathcal{B}$. При $k \to \infty$ правая часть уравнения (3) сходится равномерно к правой части уравнения (1). В силу условий Каратеодори для правой части (3) из последовательности решений Y_k можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой $\overline{Y}$ есть решение уравнения (1) на независимом от k интервале $[t_0, t_0 + \tau)$. Если $Z(t)$ — любое решение задачи (1) с начальным условием $Z(t_0) = Z_0$, то для него имеем $Z(t_0) < Y(t_0)$, $dZ/dt - F(t, Z) < dY_k/dt - F(t, Y_k)$ при почти всех $t \in [t_0, t_0 + \tau)$. Поэтому согласно лемме 3 $Z(t) < Y_k(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \tau)$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, находим $\lim\limits_{k\to\infty} Y_k(t) \geq Z(t)$, или $\overline{Y}(t) \geq Z(t)$, т. е. $\overline{Y}(t)$ — верхнее относительно конуса G_+ решение задачи (1). $\square$

Аналогичные утверждения имеют место для классических и правосторонних решений.

4. Теорема о матричных дифференциальных неравенствах

Рассмотрим вопрос о соотношении классов монотонных и квазимонотонных относительно конуса G_+ матричных функций. Легко видеть, что любая монотонная функция будет являться и квазимонотонной. Однако не каждая квазимонотонная функция монотонна.

Лемма 4. *Пусть матричная функция $F(t, Y) \in W(G_+)$, т. е. квазимонотонно неубывающая по Y относительно конуса G_+. Тогда существует число $a > 0$ такое, что матричная функция $F(t, Y) + aY$ является монотонной относительно конуса G_+.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из определения 2 квазимонотонности. Действительно, пусть $Z, Y \in G$ и $Y - Z \in G_+$. Тогда при любом $\psi \in \Phi$ $\psi^T(Y - Z)\psi \geq 0$. Если $\psi^T(Y - Z)\psi = 0$, то из условия квазимонотонности следует $\psi^T(F(t, Y) - F(t, Z))\psi \geq 0$, и в этом случае монотонность имеет место. Также определение монотонности удовлетворяется при $\psi^T(Y - Z)\psi > 0$ и $\psi^T(F(t, Y) - F(t, Z))\psi \geq 0$. Наконец, среди всех $\psi \in \Phi$ выделим подмножество Φ' таких ψ, при которых $\psi^T(Y - Z)\psi > 0$ и $\psi^T(F(t, Y) - F(t, Z))\psi < 0$. Тогда при $a = \sup\limits_{\psi\in\Phi'}[-\psi(F(t, Y) - F(t, Z))\psi / \psi^T(Y - Z)\psi]$ будет выполняться условие монотонности для матричной функции $F(t, Y) + aY$. $\square$

Лемма 5. *Пусть матричная функция $F(t, Y)$ полуквазимонотонно неубывающая по Y относительно конуса G_+. Тогда существует число $a > 0$ такое, что матричная функция $F(t, Y) + aY$ является монотонной относительно конуса G_+ и $F(t, Y) + aY \geq 0$ при всех $Y \in G_+$ (или $F(t, Y) + aY > 0$ при всех $Y \in G^+$).*

Доказательство аналогично предыдущему.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании положительных относительно конуса G_+ решений уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Если, кроме того, $F(t, Y)$ полуквазимонотонно неубывающая по Y относительно конуса G_+, то каждому начальному условию $Y_0 \in G_+ \cap \mathcal{B}$ соответствует решение уравнения (1), принадлежащее $\mathcal{B}$ на некотором не равном нулю интервале значений t, и $Y(t, t_0, Y_0) \in G_+$ при всех $t \in T$.*

Доказательство. То, что решение существует и принадлежит $\mathcal{B}$, следует из теоремы 1. Остается показать, что оно будет принадлежать G_+, если $Y_0 \in G_+$.

Из условия полуквазимонотонности $F(t,Y)$ и леммы 4 следует, что найдется такое число a, при котором матричная функция $F(t,Y)+aY$ будет монотонной относительно конуса G_+. Рассмотрим последовательные приближения, построенные по схеме ([9], с. 28)

$$Z_0 = e^{-a(t-t_0)}Y_0,$$
$$Z_{k+1} = e^{-a(t-t_0)}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-a(t-\tau)}[F(\tau, Z_k(\tau)) + aZ_k(\tau)]d\tau, \quad k \geq 1.$$

Очевидно, $F(t,Z(t))+aZ(t)$ удовлетворяет условию (2) с переменной $l(t)+a$, поэтому последовательность Z_k является фундаментальной, равномерно ограниченной и равномерно на $\mathcal{B}$ сходится к $Y(t)$. Кроме того, $Z_0 = e^{-a(t-t_0)}Y_0 \geq 0$, а т.к. по лемме 5 $F(t,Z(t))+aZ(t) \geq 0$, то

$$Z_1 = e^{-a(t-t_0)}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-a(t-\tau)}[F(\tau, Z_0(\tau)) + aZ_0(\tau)]d\tau \geq Z_0.$$

Следовательно, в силу монотонности $F(t,Y)+aY$ относительно G_+ получаем $F(t,Z_1(t)) + aZ_1(t) \geq F(t,Z_0(t)) + aZ_0(t) \geq 0$ и $Z_2 \geq Z_1$. По индукции находим $0 \leq Z_1 \leq Z_2 \leq \cdots \leq Z_k \leq Z_{k+1}$ при всех k. Применяя лемму 1 о поточечной сходимости, получаем $\lim\limits_{k\to\infty} Z_k = Y$, а т.к. конус G_+ замкнут, то $Y \in G_+$. $\square$

Теорема 4. *Пусть для непрерывно дифференцируемой матричной функции $Z(t)$ выполняется дифференциальное неравенство*

$$dZ(t)/dt \leq F(t,Z(t)), \quad t \in T, \tag{4}$$

где функция $F(t,Z)$ непрерывная, квазимонотонно неубывающая относительно G_+ и удовлетворяет условию (2). Пусть также $Z(t_0) \leq Y_0$. Тогда $Z(t) \leq Y(t)$ при всех $t \in T$, где $Y(t)$ — единственное решение задачи (1) с функцией $F(t,Y)$ из (4) и $Y(t_0) = Y_0$.

Без условия (2), гарантирующего единственность решения задачи (1), справедливо следующее аналогичное теореме ([2], с. 56) о векторных дифференциальных неравенствах с условием Важевского утверждение.

Теорема 5. *Пусть матричная функция $F(t,Y)$, квазимонотонно неубывающая по Y относительно конуса G_+, удовлетворяет условиям Каратеодори, а абсолютно непрерывная матричная функция $Z : [t_0, t_0+\tau] \to G$ удовлетворяет при почти всех $t \in [t_0, t_0+\tau]$ дифференциальному неравенству*

$$D_+Z(t) \leq F(t,Z(t)) \quad \text{и} \quad Z(t_0) \leq Y_0.$$

Тогда существует верхнее относительно конуса G_+ K-решение $\overline{Y}(t)$ задачи Коши на $[t_0, t_0+\tau)$ такое, что $Z(t) \leq \overline{Y}(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0+\tau]$.

Доказательство. Теорема 4 является частным случаем теоремы 5. Поэтому докажем теорему 5. Существование верхнего решения $\overline{Y}(t) = \overline{Y}(t,t_0,Y_0)$ уравнения (1) с $Y(t_0) = Y_0$ следует из теоремы 2. Это верхнее решение будет единственным, т.к. если $\overline{Y}'(t)$ и $\overline{Y}''(t)$ — два верхних решения (1) с $Y(t_0) = Y_0$, то для них имеют место одновременно неравенства $\overline{Y}''(t) \leq \overline{Y}'(t)$ и $\overline{Y}'(t) \leq \overline{Y}''(t)$, из которых следует $\overline{Y}''(t) = \overline{Y}'(t)$ при $t \in T$. Для матричной функции $U(t) = \overline{Y}(t) - Z(t)$ имеет место уравнение $dU/dt = F(t,U+Z) - F(t,Z) + H(t)$, где $H(t) = F(t,Z(t)) - dZ(t)/dt \geq 0$, правая часть которого в силу условий теоремы и леммы 2 полуквазимонотонно неубывающая по U относительно G_+. Из теоремы 3 следует $U(t) \in G_+$ при $t \in T$. $\square$

Отметим, что ранее были получены теоремы о матричных дифференциальных и интегральных неравенствах в случае, когда функция F является монотонной относительно конуса G_+ ([17], сс. 150, 216). В ([9], с. 28–35) доказана монотонность решений и существование положительных относительно конуса решений в банаховом пространстве при условии монотонности резольвенты оператора дифференциального уравнения при всех достаточно больших значениях ее параметра. Однако проверить это условие оказывается затруднительным. В [17] доказана теорема о матричных дифференциальных (и интегральных) неравенствах с условием монотонности правой части (соответственно монотонности подинтегральной матричной функции), которое гарантирует монотонность решений относительно конуса G_+. Но это условие является довольно грубым, т. к. даже правые части матричных уравнений Ляпунова и Риккати не являются монотонными матричными функциями. Теоремы 4 и 5 дают более мягкие и легко проверяемые условия на правые части матричных систем дифференциальных уравнений, которые обеспечивают монотонность их решений.

5. Свойства матричных систем дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности

Будем говорить, что уравнение (1) на T обладает свойством *монотонности решений по начальным данным*, если из $Y_0' \le Y_0''$ следует $Y(t,t_0,Y_0') \le Y(t,t_0,Y_0'')$. Правые части таких систем будем обозначать $F(t,Y) \in \mathcal{M}(G_+)$.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. Пусть правая часть уравнения (1) $F(t,Y) \in W(G_+)$ и удовлетворяет условию Липшица (2). Тогда $F(t,Y) \in \mathcal{M}(G_+)$.

Доказательство. Возьмем $Y_0' \le Y_0''$ и обозначим $Z(t) = Y(t,t_0,Y_0'') - Y(t,t_0,Y_0')$. Тогда для $Z(t)$ справедливо уравнение $dZ(t)/dt = F'(t,Z(t)) = F(t,Z(t)+Y(t,t_0,Y_0'))-F(t,Y(t,t_0,Y_0'))$, правая часть которого согласно лемме 2 — полуквазимонотонная матричная функция. Поскольку $Z(t_0) \in G_+$, то по теореме 3 $Z(t) \in G_+$ при всех $t \in T$. $\square$

С помощью теорем 4, 5 можно установить инвариантность некоторых множеств и получить оценки решений системы (1) с $F \in W(G_+)$ аналогично тому, как это было сделано в [2], [4] для векторных дифференциальных уравнений с условием Важевского.

Обозначим через $G_- = \{Y \in G : -Y \in G_+\}$ конус неположительно определенных матриц из G, а через $G_+ + Y_0$ — конус с вершиной в точке $Y_0 \in G$; для произвольного множества $N \in G$ ([2], с. 135)

$N_+ = N \cap G_+$, $N_- = N \cap G_-$, $N^+ = N \cap G^+$;

$S_+(N) = \bigcup\limits_{Y\in N}(G_+ + Y)$ — положительный шлейф множества N;

$S_-(N) = \bigcup\limits_{Y\in N}(G_- + Y)$ — отрицательный шлейф множества N;

$\mathcal{H} = \{Y \in \mathcal{B} :$ для почти всех $t \in T \;\; F(t,Y) \le 0\}$;

$\mathcal{G} = \{Y \in \mathcal{B} :$ для почти всех $t \in T \;\; F(t,Y) \ge 0\}$;

$\mathcal{Q} = \{Y \in \mathcal{H} : \forall t \in T \; F(t,Y) < 0\}$;

$\Omega = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ — множество точек покоя системы (1).

Множество $N \subset G$ назовем *положительно инвариантным* ((+)-инвариантным), если для решения $Y(t)$ имеем $Y(t_0) = Y_0 \in N \Rightarrow (\forall t \in T(Y))\; Y(t) \in N$. Если N (+)-инвариантно для любого решения с $Y_0 \in N$, то оно называется (+)-инвариантным.

Лемма 6. *Для любых $t \in T$, $P \in \mathcal{H}$ множество $G_- + P$ (+)-инвариантно для нижних решений, и $\forall Q \in \mathcal{G}$ множество $G_+ + Q$ (+)-инвариантно для верхних решений уравнения* (1).

Для автономного уравнения

$$dY/dt = F(Y) \tag{5}$$

так же, как в [2], удается установить ряд дополнительных сведений о поведении решений. Здесь $F : \mathcal{B} \to G$, где $\mathcal{B}$ — область в G, в определениях свойств функции F (измеримость, условия квазимонотонности и т. д.) и множеств $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{Q}$, Ω считается $T = R_+$. Если не оговорено противное, для решений уравнения (5) принимается $t_0 = 0$.

Лемма 7. *Пусть для некоторого решения Y уравнения* (5) *существует* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = Z \in G$. *Тогда для верхнего решения $\overline{Y}$ уравнения* (5) *с $Y_0 = Z$ $\forall t \in T$ $\overline{Y}(t) \geq Z$, а для нижнего решения $\underline{Y}$ с $Y_0 = Z$ $\forall t \in T$ $\underline{Y}(t) \leq Z$.*

Лемма 8. *Для автономного уравнения* (5) *множество $\mathcal{H}$ $(+)$-инвариантно для нижних, а множество $\mathcal{G}$ $(+)$-инвариантно для верхних K-решений. При единственности K-решений множества $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ $(+)$-инвариантны для всех решений.*

Леммы 6–8 распространяют результаты Козлова Р.И. ([2], с. 135–137) об инвариантности указанных множеств на случай матричных систем дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности относительно G_+. Доказательство является типовым ([2], с. 135–137). Особенность состоит в том, что для доказательства используются полученные здесь теоремы 4, 5 о матричных дифференциальных неравенствах.

Следствие 2. Пусть $F \in W(G_+)$ и $Y \in \Omega$ (Y — точка покоя системы (1)). Тогда конусы $G_+ + Y$, $G_- + Y$ положительно инвариантны.

Согласно следствиям 1, 2 оценка решений системы (1), начинающихся из множества $P_0 = \{Y \in G : Y_1 \leq Y \leq Y_2\}$ ($Y_1, Y_2 \in G$ заданы), имеет вид

$$(\forall t \in T,\ Y_0 \in P_0)\ \ \underline{Y}(t, t_0, Y_1) \leq Y(t, t_0, Y_0) \leq \overline{Y}(t, t_0, Y_2),$$

где $Y(t, t_0, Y_1)$, $Y(t, t_0, Y_2)$ — частные решения системы (1) с $Y(t_0) = Y_1$ и $Y(t_0) = Y_2$ соответственно.

Оценка множества достижимости в заданный момент времени t для решений из P_0 определяется множеством

$$\{Y \in G : \underline{Y}(t, t_0, Y_1) \leq Y \leq \overline{Y}(t, t_0, Y_2)\}.$$

Далее для автономного уравнения (5) рассматриваются оценки области притяжения. Под *областью притяжения* понимается множество $\Pi = \{Y_0 \in G : \lim\limits_{t\to\infty} Y(t, t_0, Y_0) = 0\}$.

Теорема 6. *Пусть множество $G_+ \cap \mathcal{H}$ (соответственно $G_- \cap \mathcal{G}$) содержит точку* 0 *и не содержит других особых точек уравнения* (5), *где $F \in W(G_+)$ и удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда $G_+ \cap \mathcal{H}$ (соответственно $G_- \cap \mathcal{G}$) лежит в области притяжения Π системы* (5).

Доказательство проводится так же, как для утверждения 3 из ([8], с. 52), но с использованием приведенных выше лемм 1, 8 и следствия 2.

Следующий результат может быть положен в основу численных алгоритмов построения оценок области притяжения уравнения (5) с $F \in W(G_+)$ по его частным решениям.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для того чтобы точка $Y_0 \in G_+$ ($Z_0 \in G_-$) принадлежала области притяжения Π системы (5), достаточно, чтобы при некотором τ было $Y(\tau, Y_0) \in G_+ \cap \mathcal{H}$ (соответственно $Y(\tau, Z_0) \in G_- \cap \mathcal{G}$). Точка $Y_0 \in G_+$ ($Z_0 \in G_-$) не лежит в Π, если при некотором τ' $Y(\tau', Y_0) \in G_+ \cap \mathcal{G}$ (соответственно $Y(\tau', Z_0) \in G_- \cap \mathcal{H}$).

Далее будем считать $T = R_+$, при каждом $t_0 \in T$ начальные значения $Y_0 \in V(t_0)$, где V — некоторое наперед заданное множество в $\mathcal{B}$ (обычно это множество значений вектор-функции Ляпунова ([2], с. 137), а в нашем случае — матричной функции сравнения), $\overline{Y}$ обозначает верхнее решение уравнения (1) или (5) с $Y(t_0) = Y_0$; $T_{t_0} = [t_0, +\infty)$.

Аналогично векторному случаю ([2], с. 137–138) рассматриваются свойства сравнения для матричной системы (1) с $F \in W(G_+)$.

Полуограниченность решений сверху

$$(\exists\Delta_0 \in G^+)(\forall\Delta \in G^+ : \Delta \le \Delta_0)(\exists E \in G^+)(\forall t_0 \in T)(\forall Y_0 \in V(t_0) : Y_0 \le \Delta)$$
$$(T(Y) = T_{t_0})\,\&\,(\forall t \in T(Y)(Y(t) \le E)).$$

Полуинвариантность сверху

$$(\exists\Delta \in G^+)(\forall t_0 \in T)(\forall Y_0 \in V(t_0) : Y_0 \le \Delta)(T(Y) = T_{t_0})\,\&\,(\forall t \in T(Y)(Y(t) \le E_0)),$$

где $E_0 \in G^+$ наперед задано.

Полуустойчивость сверху

$$(\forall E \in G^+)(\exists\Delta \in G^+)(\forall t_0 \in T)(\forall Y_0 \in V(t_0) : Y_0 \le \Delta)(T(Y) = T_{t_0})\,\&\,(\forall t \in T(Y)(Y(t) \le E)).$$

Теорема 7 (аналог теоремы 1.3 из ([2], с. 139)). *Пусть $F \in W(G_+)$ и выполнены условия единственности и продолжимости решений системы* (1).

А. *Если $\mathcal{H}^+ \ne \emptyset$, то имеет место полуограниченность сверху. В качестве Δ_0 можно принять какую-либо точку из $\mathcal{H}^+$, E — произвольная точка из $\mathcal{H} \cap S_+(\Delta)$.*

Б. *Если $\mathcal{H}^+ \cap S_-(E_0) \ne \emptyset$, то имеет место полуинвариантность сверху. В качестве Δ можно принять какую-либо точку из $\mathcal{H}^+ \cap S_-(E_0)$.*

В. *Если $\mathcal{H}^+ \ne \emptyset$ и $0 \in \mathcal{H}^+$, то имеет место полуустойчивость сверху. При этом Δ — любая точка из $\mathcal{H}^+$ такая, что $\Delta < E$.*

Доказательство представляет прямое применение леммы 6 о положительной инвариантности $G_- + P$ при $P \in \mathcal{H}$, которая в силу единственности будет иметь место для всех решений.

Для уравнения (5) так же, как в векторном случае ([2], с. 145), имеет место теорема о свойствах предельной полуограниченности, полуинвариантности и полупритяжения.

6. Матричные системы сравнения

Матричные системы дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности относительно конуса G_+ можно использовать в качестве систем сравнения для получения достаточных условий устойчивости, ограниченности, инвариантности и других динамических свойств, а также для нахождения различных оценок решений исходной системы.

Пусть задана система

$$dx/dt = f(t,x), \quad t \in T, \quad x \in R^n, \tag{6}$$

где функция $f : \Gamma \subseteq T \times R^n \to R^n$ удовлетворяет условиям теоремы 1 существования и единственности K-решений. С использованием теоремы 6 получается стандартная в методе сравнения

Лемма 9 ([1], [2]). *Пусть для системы* (6) *на интервале T существует абсолютно непрерывная матричная функция $V(t,x)$ такая, что $V : \Gamma \to G_+$, а для производной от функции $V(t,x)$ по времени в силу системы* (6) *справедливо при почти всех $t \in T$ неравенство*

$$D_+V(t,x) \le F(t, V(t,x)), \tag{7}$$

где $F \in W(G_+)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда из условия $V(t_0,x_0) \le Y_0$ следует

$$V(t, x(t,t_0,x_0)) \le \overline{Y}(t,t_0,Y_0),$$

где $\overline{Y}(t,t_0,Y_0)$ — верхнее решение системы (1) *с функцией F из* (7).

При этом $V(t,x)$ будет *матричной функцией сравнения* для системы (6) (при некоторых дополнительных условиях, зависящих от изучаемого свойства, — матричной функцией сравнения относительно рассматриваемого динамического свойства), а система (1), правая часть которой берется из (7) и является квазимонотонной относительно конуса G_+, называется *матричной системой сравнения* для системы (6).

Итак, согласно лемме 9 в качестве матричной системы сравнения можно выбирать систему (1) с правой частью F из (7), для которой должно выполняться условие квазимонотонности относительно G_+. Как было отмечено выше, любая монотонная относительно конуса G_+ матричная функция является квазимонотонной, так что класс квазимонотонных матричных функций шире класса монотонных. Поэтому теорема 4 расширяет класс матричных систем сравнения для анализа динамических свойств и построения оценок нелинейных систем.

Возникает вопрос, какие матричные функции кроме монотонных являются квазимонотонными относительно конуса неотрицательно определенных матриц. В следующей лемме устанавливаются некоторые свойства квазимонотонных матричных функций и приводятся примеры матричных функций из $W(G_+)$, которые не являются монотонными.

Лемма 10. *Пусть матричные функции F_1, F_2 определены при $(t,Y) \in \mathcal{A}$ и принадлежат $W(G_+)$. Тогда*

1) $F_1 + F_2 \in W(G_+)$;
2) *при любом* $a \in R_+$ $aF_i \in W(G_+)$, $i = 1, 2$;
3) *при любой непрерывной, неотрицательной функции времени* $b : T \to R_+$ $b(t)F \in W(G_+)$;
4) *при любых непрерывных функциях времени* $a, b : T \to R_+$ $a(t)F_1 + b(t)F_2 \in W(G_+)$;
5) *при любых непрерывных функциях* $a, b : T \times G \to R_+$ $a(t,Y)F_1 + b(t,Y)F_2 \in W(G_+)$, *если* a, b *— монотонные по* Y *относительно* G_+ *функции при всех* $t \geq t_0$;
6) *для любой непрерывной матричной функции* $A(t)$ *размерности* $n \times n$ *матричная функция* $F(t,Y) = A(t)Y + YA^T(t)$ *является квазимонотонно неубывающей относительно конуса* G_+;
7) *для произвольной симметрической матрицы* Q *матричная функция* $F(Y) = YQY \in W(G_+)$ *при условии, что* Y *— симметрическая матрица.*

Доказательство. Непосредственно из определения функций F_1, F_2 в лемме следуют утверждения 1), 2); 3), 4) вытекают из 1), 2). Справедливость 5) следует из 4) и того факта, что любая монотонная функция является квазимонотонной. Для доказательства 6) зададим такие $Y_1, Y_2 \in G$, что $Y_1 \geq Y_2$. Возьмем $\psi \in R^n$ такой, что $\psi^T(Y_1 - Y_2)\psi = 0$, и вычислим $\psi^T(F(t,Y_1) - F(t,Y_2))\psi$

$$\psi^T\{[A(t)Y_1 + Y_1A^T(t)] - [A(t)Y_2 + Y_2A^T(t)]\}\psi = \psi^T[A(t)(Y_1 - Y_2) + (Y_1 - Y_2)A^T(t)]\psi = \\ = \psi^T[A(t)(Y_1 - Y_2)]\psi + \psi^T[(Y_1 - Y_2)A^T(t)]\psi.$$

Обозначим $M = Y_1 - Y_2$. Так как матрица $M \in G_+$, то ([18], с. 95) для нее существует разложение $M = M^{1/2}(M^{1/2})^T$. Поэтому из равенства $\psi^T(Y_1 - Y_2)\psi = 0$ получаем $\|(M^{1/2})^T\psi\|^2 = 0$, откуда $(M^{1/2})^T\psi = 0$. С учетом последнего равенства и свойств квадратичной формы получаем

$$\psi^T(F(t,Y_1) - F(t,Y_2))\psi = \psi^T A(t)M\psi + \psi^T MA^T(t)\psi = \\ = \psi^T A(t)M^{1/2}(M^{1/2})^T\psi + \psi^T M^{1/2}(M^{1/2})^T A^T(t)\psi = 0.$$

Таким образом, условие квазимонотонности функции $F(t,Y) = A(t)Y + YA^T(t)$ выполнено по определению.

Для доказательства 7) зададим такие $Y_1, Y_2 \in G$, что $Y_1 \geq Y_2$. Выберем $\psi \in R^n$ так, что $\psi^T(Y_1 - Y_2)\psi = 0$, и вычислим

$$\psi^T(Y_1QY_1^T - Y_2QY_2^T)\psi = \psi^T(Y_1QY_1^T - Y_1QY_2^T + Y_1QY_2^T - Y_2QY_2^T)\psi = \\ = \psi^T[Y_1Q(Y_1 - Y_2)^T + (Y_1 - Y_2)QY_2^T]\psi = \psi^T[Y_1Q(Y_1 - Y_2)^T]\psi + \psi^T[(Y_1 - Y_2)QY_2^T]\psi.$$

Так как матрица $M = Y_1 - Y_2 \in G_+$ неотрицательно определенная, то для нее имеет место представление $M = M^{1/2}(M^{1/2})^T$. Кроме того, по условию $\psi^T(Y_1 - Y_2)\psi = 0$, так что $(M^{1/2})^T\psi = 0$. Отсюда находим

$$\psi^T(F(t,Y_1) - F(t,Y_2))\psi = \psi^T[Y_1Q(Y_1 - Y_2)^T]\psi + \psi^T[(Y_1 - Y_2)QY_2^T]\psi =$$
$$= \psi^T[Y_1QM^T]\psi + \psi^T[MQY_2^T]\psi = \psi^T[Y_1QM^{1/2}(M^{1/2})^T]\psi + \psi^T[M^{1/2}(M^{1/2})^TQY_2^T]\psi = 0,$$

что и указывает на свойство квазимонотонности функции YQY. □

Отметим, что доказанное в ([9], с. 36) свойство монотонности решений матричных дифференциальных уравнений Ляпунова и Риккати также получается из квазимонотонности их правых частей относительно конуса G_+, что непосредственно следует из пп. 6, 7 леммы 10.

С применением леммы сравнения в соответствии с принципом сравнения [1], [2] далее могут быть получены теоремы сравнения для рассматриваемой системы (6) при существовании для нее матричной функции с зависящими от рассматриваемых свойств дополнительными условиями и матричной системы сравнения (5) с соответствующими свойствами, а с использованием установленных критериев динамических свойств матричных систем сравнения — теоремы о динамических свойствах системы (6). Например, так же, как с вектор-функциями Ляпунова, устанавливается теорема об ограниченности, устойчивости и инвариантности системы (6) с использованием матричных систем сравнения.

Теорема 8. *Пусть для системы* (6) *с матричной функцией* $V(x) = xx^T$ *существует система сравнения вида* (5) *с квазимонотонной относительно* G_+ *и удовлетворяющей условиям теоремы* 1 *функцией* F. *Тогда для системы* (6) *имеют место следующие свойства*:

а) *ограниченность решений, если* $\mathcal{H}^+ \neq \emptyset$. *В качестве* Δ_0 *можно принять какую-либо матрицу из* $\mathcal{H}^+$, E *— произвольная матрица из* $\mathcal{H} \cap S_+(\Delta)$;

б) *инвариантность, если* $\mathcal{H}^+ \cap S_-(E_0) \neq \emptyset$. *В качестве* Δ *можно принять какую-либо матрицу из* $\mathcal{H}^+ \cap S_-(E_0)$;

в) *устойчивость, если* $\mathcal{H}^+ \neq \emptyset$ *и* $0 \in \mathcal{H}_+$. *При этом* Δ *— любая матрица из* $\mathcal{H}^+$ *такая, что* $\Delta \leq E$.

Заключение. Изучены матричные системы дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности относительно конуса неотрицательно определенных симметрических матриц. Для них доказана теорема о матричных дифференциальных неравенствах, установлены свойства монотонности решений по начальным данным, устойчивости, ограниченности и инвариантности. Даны способы построения оценок решений, начинающихся из заданного множества начальных данных, области притяжения и множества достижимости. На основе принципа сравнения с применением матричных систем получена лемма сравнения и теорема о динамических свойствах устойчивости, ограниченности и инвариантности.

Литература

1. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. *Метод сравнения в математической теории систем.* – Новосибирск: Наука, 1980. – 481 с.
2. Матросов В.М., Васильев С.Н., Каратуев В.Г. и др. *Алгоритмы вывода теорем метода векторных функций Ляпунова.* – Новосибирск: Наука, 1981. – 271 с.
3. Воронов А.А., Матросов В.М. *Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости.* – М.: Наука, 1987. – 309 с.
4. Козлов Р.И. *Оценки решений и устойчивость систем сравнения* // Теория устойчивости и ее прилож. – Новосибирск: Наука, 1979. – С. 38–49.
5. Оболенский А.Ю. *Об устойчивости решений автономных систем сравнения* // ДАН УССР. – 1979. –№ 8. – С. 607–611.
6. Lakshmikantham V., Leela S. *Cone valued Lyapunov functions and large scale systems* // AACC Proc. Joint Autom. Control Conf., Denver, Colo, 1979. – N. Y., 1979. – P. 113–116.

7. Lakshmikantham V., Leela S. *Cone valued Lyapunov functions* // Nonlinear Anal. – 1977. – № 1. – P. 215–222.
8. Маликов А.И. *Оценки решений нелинейных систем сравнения* // Динамика нелинейных систем. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 49–57.
9. Сабаев Е.Ф. *Матричные системы сравнения и их приложение в динамике реакторов.* – М.: Атомиздат, 1980. – 192 с.
10. Крейн С.Г. *Функциональный анализ.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
11. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. *Положительные линейные системы. Метод положительных операторов.* – М.: Наука, 1985. – 256 с.
12. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* – М.: Наука, 1985. – 224 с.
13. Уонэм У.М. *Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход.* – М.: Наука, 1980. – 375 с.
14. Volkmann P. *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen* // Math. Z. – 1972. – Bd. 127. – № 2. – S. 157–164.
15. Deimling K., Lakshmikantham V. *On existence of extremal solutions of differential equations in Banach spaces* // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. & Applic. – 1979. – V. 3. – № 5. – P. 563–568.
16. Eisenfeld J., Lakshmikantham V. *Differential inequalities and flow invariance via linear functionals* // J. Math. Anal. and Applic. – 1979. – V. 69. –№ 1. –P. 104–114.
17. Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С. *Устойчивость движения: метод интегральных неравенств.* – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.
18. Ланкастер П. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1978. – 280 с.

Казанский государственный
технический университет

Поступила
12.01.1999