ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 8 (471)

УДК 517.982.2

Ю.Ф. КОРОБЕЙНИК

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Пусть H — локально выпуклое пространство над полем скаляров Φ (всюду далее $\Phi = \mathbb{C}$ или $\Phi = \mathbb{R}$) с определяющим топологию μ набором преднорм $Q = \{q\}$. Пусть, далее, B — некоторое множество индексов и $x(t) : B \to H$ — отображение B в H. Положим $X_B = \{x(t) : t \in B\}$. Пусть $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность индексов из B и $\Lambda := \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $X_\Lambda = \{x(t_k) : k \geqslant 1\}$. Всюду далее предполагается, что $q(x(t)) > 0$ $\forall t \in B$, $\forall q \in Q$. Положим $\tau_q(t) := \ln q(x(t))$ $\forall t \in B$, $\forall q \in Q$.

Основная цель данной работы состоит в определении условий (по возможности, типа критериев) сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x(t_k), \quad c_k \in \Phi, \quad k = 1, 2, \dots \tag{1}$$

Поскольку для любого сходящегося в H ряда (1) выполняется необходимое условие сходимости $\lim\limits_{k\to\infty} |c_k| q(x(t_k)) = 0$ $\forall q \in Q$, то справедливо

Предложение 1. *Если ряд* (1) *сходится в* H, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \bigl(\ln|c_k| + \tau_q(t_k)\bigr) = -\infty \quad \forall q \in Q. \tag{2}$$

Следствие. Если ряд (1) сходится в H, то

$$\limsup_{k\to\infty} (\ln|c_k| + \tau_q(t_k)) < +\infty \ \ \forall q \in Q. \tag{3}$$

Будем говорить, что последовательность Λ *ядерна* относительно топологии μ, если

$$\forall q \in Q \ \ \exists q_1 \in Q : \ \sum_{k=1}^{\infty} \exp\bigl(\tau_q(t_k) - \tau_{q_1}(t_k)\bigr) < \infty. \tag{4}$$

Предложение 2. *Если* Λ *ядерна относительно* μ *и выполняется условие* (3), *то ряд* (1) *сходится абсолютно в* H.

Для доказательства достаточно зафиксировать произвольно $q \in Q$ и выбрать $q_1 \in Q$ так, чтобы выполнялось условие (4). Тогда в силу (3) и (4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| q(x(t_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\bigl(\ln|c_k| + \tau_{q_1}(t_k)\bigr) \exp\bigl(\tau_q(t_k) - \tau_{q_1}(t_k)\bigr) < \infty.$$

Из следствия предложения 1 и предложения 2 получаем

Предложение 3. *Для того чтобы ряд* (1) *сходился* (*или абсолютно сходился*) *в* H, *необходимо, а в случае, если последовательность* Λ *ядерна относительно топологии* μ, *и достаточно, чтобы выполнялось условие* (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–01018).

Учитывая также предложение 1, получаем первый критерий сходимости ряда (1).

Теорема 1. *Пусть Λ ядерна относительно μ. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *ряд* (1) *сходится в* H;
2) *ряд* (1) *абсолютно сходится в* H;
3) *выполняется условие* (2);
4) *выполняется условие* (3).

Для проверки условия (4) ядерности нужно знать асимптотику поведения при $k \to \infty$ величины $\tau_q(t_k) - \tau_{q_1}(t_k)$, что во многих случаях довольно затруднительно. Однако нередко удается получить односторонние оценки (сверху) указанной величины и, используя их, получить достаточные условия ядерности Λ относительно μ. Дадим предварительно два определения.

Будем говорить, что топология μ *$\widetilde{d}$-разделена*, если

$$\forall q \in Q \ \ \exists q_1 \in Q, \ \ \exists b < \infty, \ \ \exists d_q(t) : B \longrightarrow [0, +\infty) \mid \tau_{q_1}(t) \geqslant \tau_q(t) + d_q(t) - b \ \ \forall t \in B. \qquad (5)$$

Далее, последовательность Λ *$\widetilde{d}$-ядерна* в H, если топология μ $\widetilde{d}$-разделена и функцию $d_q(t)$ в условии (5) можно выбрать так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\big(-d_q(t_k)\big) < \infty \ \ \forall q \in Q.$$

Очевидным является

Предложение 4. *Если Λ $\widetilde{d}$-ядерна в H, то Λ ядерна относительно μ.*

Следствие. Если последовательность Λ $\widetilde{d}$-ядерна в H, то утверждения 1)–4) теоремы 1 равносильны.

Укажем теперь достаточно простые условия, обеспечивающие $\widetilde{d}$-разделенность μ и $\widetilde{d}$-ядерность Λ в H. Назовем последовательность Λ *сильно $\widetilde{d}$-ядерной* в H, если топология μ $\widetilde{d}$-разделена и если функцию $d_q(t)$ в (5) можно выбрать так, чтобы

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln k}{d_q(t_k)} < 1 \ \ \forall q \in Q.$$

Если Λ сильно $\widetilde{d}$–ядерна в H, то Λ подавно $\widetilde{d}$-ядерна в H. Далее, будем говорить, что топология μ d-разделена, если μ $\widetilde{d}$-разделена и функцию $d_q(t)$ в (5) можно выбрать так, чтобы $d_q(t) = d(t)$ $\forall q \in Q$, $\forall t \in B$, где $d(t): \ B \to [0, +\infty)$. Пусть μ d-разделена и пусть $q_1 \in Q$, $d_q(t) = d(t)$ и постоянная b выбраны по $q \in Q$ так, чтобы выполнялось соотношение (5). Найдем теперь по $q_1 \in Q$ преднорму q_2 и постоянную b_1 так, чтобы $\tau_{q_2}(t) \geqslant \tau_{q_1}(t) + d_q(t) - b_1$ $\forall t \in B$. Тогда $\forall q \in Q$ $\exists q_2 \in Q$, $\exists b_2 \in \mathbb{R}$ $\forall t \in B$ $\tau_{q_2}(t) \geqslant \tau_q(t) + 2d_q(t) - b_2$, и вообще $\forall q \in Q$, $\forall N \geqslant 1$ $\exists q_N \in Q$, $\exists b_N \in \mathbb{R}$ $\forall t \in B$ $\tau_{q_N}(t) \geqslant \tau_q(t) + Nd_q(t) - b_N$. Будем говорить, что Λ имеет *конечный логарифмический тип*, если

$$D_\Lambda := \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln k}{d(t_k)} < \infty,$$

и *нулевой логарифмический тип*, если $D_\Lambda = 0$.

Из только что приведенных оценок сверху для $\tau_q(t)$ следует, что если топология μ d-разделена и Λ имеет конечный логарифмический d-тип, то Λ $\widetilde{d}$-ядерна в H.

Далее, скажем, что топология μ *слабо d-разделена*, если μ $\widetilde{d}$-разделена, причем функцию $d_q(t)$ в (5) можно выбрать так, чтобы $d_q(t) = \alpha_q d(t)$ $\forall q \in Q$, $\forall t \in B$, где $\alpha_q \in (0, +\infty)$. Легко показать, что если μ слабо d-разделена и Λ имеет нулевой логарифмический d-тип, то Λ сильно $\widetilde{d}$-ядерна в H.

Из приведенных соображений вытекает

Теорема 2. *Если Λ сильно $\widetilde{d}$-ядерна в H, то утверждения* 1)–4) *теоремы* 1 *равносильны.*

Следствие. Утверждения 1)–4) теоремы 1 равносильны, если выполнено одно из двух следующих предположений:

(i) μ d-разделена, $D_\Lambda < +\infty$;
(ii) μ слабо d-разделена, $D_\Lambda = 0$.

2. Выведем теперь условия сходимости ряда (1) несколько иного вида. Назовем последовательность $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел *стандартной*, если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$. Из следствия предложения 1 получаем

Предложение 5. *Если A — любая стандартная последовательность, и ряд* (1) *сходится в H, то*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{a_k}\big(\ln|c_k| + \tau_q(t_k)\big) \leqslant 0 \quad \forall q \in Q. \tag{6}$$

Покажем, что при некоторых дополнительных предположениях условие типа (6) обеспечивает абсолютную сходимость ряда (1). Пусть Λ ядерна относительно μ. Будем говорить, что семейство стандартных последовательностей $A(q) = \{a_k(q)\}_{k=1}^{\infty}$, $q \in Q$, не нарушает ядерности (Λ, μ), если

$$\forall q \in Q\ \exists q_1 \in Q,\ \exists \varepsilon_q > 0: \ \sum_{k=1}^{\infty} \exp\big(\varepsilon_q a_k(q_1) + \tau_q(t_k) - \tau_{q_1}(t_k)\big) < \infty. \tag{7}$$

Предложение 6. *Пусть Λ ядерна относительно μ и пусть семейство стандартных последовательностей $A(q)$ не нарушает ядерности (Λ, μ). Пусть, далее, выполнено условие*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{a_k(q)}(\ln|c_k| + \tau_q(t_k)) \leqslant 0 \quad \forall q \in Q. \tag{8}$$

Тогда ряд (1) *сходится абсолютно в H.*

Доказательство проводится так же, как и для предложения 2, но с использованием (8) и (7).

Следствие. Пусть Λ ядерна относительно μ и пусть семейство $A(q)$ не нарушает ядерности (Λ, μ). Тогда любое из утверждений 1)–4) теоремы 1 равносильно неравенству (8).

Выясним, при каких условиях семейство стандартных последовательностей $A(q)$ не нарушает ядерности (Λ, μ). Условие (7) равносильно тому, что ряд Дирихле

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-a_k(q_1)x}, \quad \beta_k = \exp\big(\tau_q(t_k) - \tau_{q_1}(t_k)\big), \quad k = 1, 2, \dots,$$

имеет отрицательную абсциссу сходимости при любом $q \in Q$ и некотором $q_1 \in Q$. Пусть $A(q)$ таково, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{a_k(q)} = 0 \quad \forall q \in Q. \tag{9}$$

Тогда условие (7) равносильно тому, что

$$\forall q \in Q \ \ \exists q_1 \in Q: \ \ \limsup_{k\to\infty} \frac{\tau_q(t_k) - \tau_{q_1}(t_k)}{a_k(q_1)} < 0. \tag{10}$$

Таким образом, если выполнены условия (9) и (10), то $A(q)$ не нарушает ядерности (Λ, μ).

Точно так же показываем при условии (9), что если μ $\widetilde{d}$-разделена и

$$\forall q \in Q \ \ \exists q_1 \in Q: \ \ \limsup_{k\to\infty} \frac{-d_q(t_k)}{a_k(q_1)} < 0,$$

т. е. если

$$\forall q \in Q \ \ \exists q_1 \in Q : \ \ \limsup_{k\to\infty} \frac{a_k(q_1)}{d_q(t_k)} < \infty, \tag{11}$$

то $A(q)$ не нарушает ядерности (Λ, μ). Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Пусть* Λ $\widetilde{d}$*-ядерна в* H *и семейство стандартных последовательностей* $A(q)$ *удовлетворяет условиям* (9), (11) *или* (9), (10). *Тогда любое из утверждений* 1)–4) *теоремы* 1 *равносильно неравенству* (8).

Рассмотрим некоторые более специальные ситуации, считая, что условие (9) выполнено. Пусть сначала справедливо предположение (i). Пусть еще последовательность $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_k}{d(t_k)} < \infty, \tag{12}$$

а коэффициенты c_k ряда(1) удовлетворяют условию (6). Покажем, что тогда ряд (1) абсолютно сходится. Согласно сделанным предположениям

$$\exists T_1 < \infty, \ \ \exists T_2 < \infty \ \ \forall k \geqslant 1 \ \ a_k \leqslant T_1 d(t_k), \quad \ln(1+k) \leqslant T_2 d(t_k).$$

Зафиксируем произвольно $q \in Q$ и выберем число $N > T_2 + 1$. Найдем $q_1 \in Q$ и $b < \infty$ так, чтобы $\tau_{q_1}(t) \geqslant \tau_q(t) + N d(t) - b \ \forall t \in B$. Выберем $k_0 \geqslant 1$ настолько большим, чтобы $\ln|c_k| + \tau_{q_1}(t_k) < a_k/T_1$ $\forall k \geqslant k_0$. Тогда

$$|c_k| \exp \tau_q(t_k) \leqslant \exp\bigl(d(t_k) - N d(t_k) + b\bigr) \leqslant b_1 (1+k)^{-\frac{N-1}{T_2}} \ \ \forall k \geqslant k_0.$$

Таким же образом доказываются следующие утверждения.

Предложение 7. *Пусть имеют место предположения* (i) *и, кроме того,*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{d(t_k)} = 0; \tag{13}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{a_k} \bigl(\ln|c_k| + \tau_q(t_k)\bigr) < \infty \ \ \forall q \in Q. \tag{14}$$

Тогда ряд (1) *сходится абсолютно в* H.

Предложение 8. *Пусть для стандартной последовательности* A *выполняется условие* (12), *и, кроме того, имеет место предположение* (ii). *Тогда, если коэффициенты ряда* (1) *удовлетворяют условию* (6), *то ряд сходится абсолютно в* H.

Предложение 9. *Пусть* A *удовлетворяет условию* (13), *и пусть выполнены предположения* (ii). *Тогда, если коэффициенты ряда* (1) *удовлетворяют условию* (14), *то ряд сходится абсолютно в* H.

Из полученных результатов следуют две теоремы.

Теорема 4. *Пусть стандартная последовательность* A *удовлетворяет условию* (12), *и пусть выполнено хотя бы одно из предположений* (i), (ii). *Тогда любое из утверждений* 1)–4) *теоремы* 1 *равносильно соотношению* (6).

Теорема 5. *Пусть стандартная последовательность* A *удовлетворяет условию* (13), *и пусть выполнено хотя бы одно из предположений* (i), (ii). *Тогда любое из утверждений* 1)–4) *теоремы* 1 *равносильно каждому из неравенств* (6), (14).

3. Все приведенные выше результаты применимы, в частности, к пространству Фреше, топология μ в котором, как известно, задается не более чем счетным набором преднорм $Q = \{q_n : n = 1, 2, \dots\}$. Читатель без труда получит формулировки вышеприведенных общих результатов в этом важном частном случае.

К сожалению, во многих локально выпуклых пространствах преднормы, определяющие топологию, не допускают простого описания и, как правило, топология в них описывается иным способом. Это относится, в частности, к играющим важную роль в анализе IF-пространствам, т. е. отделимым внутренним индуктивным пределам неубывающей последовательности пространств Фреше. Однако к этому классу пространств удается при одном дополнительном предположении применить полученные выше результаты. Следуя [1], скажем, что IF-пространство $H = \operatorname{ind} H_n$ обладает свойством (Y), если для любой последовательности $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ элементов из H, сходящейся в H к некоторому элементу $v \in H$, найдется номер m такой, что $v \in H_m$, $v_k \in H_m$ $\forall k \geqslant 1$ и $v_k \to v$ в H_m. Условимся называть любое такое IF-пространство $(IF)_0$-пространством.

Как известно [1], к $(IF)_0$-пространствам относятся LN^*-пространства, т. е. IF-пространства, в которых каждое H_n вложено вполне непрерывно в H_{n+1}, а также LF-пространства, т. е. строгие индуктивные пределы последовательности пространств Фреше.

Всюду далее в этом параграфе $H = \operatorname{ind} H_n$ — $(IF)_0$-пространство; H_n — пространство Фреше с топологией μ_n, заданной набором преднорм $Q_n = (q_{n,k})_{k=1}^{\infty}$; $H_n \hookrightarrow H_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$; $x(t) \in H_1$. Положим $\ln q_{m,n}(x(t)) =: \tau_{m,n}(t)$ $\forall t \in B$, $m, n = 1, 2, \dots$

Теорема 6. *Если последовательность $\Lambda = (t_k)_{k=1}^{\infty}$ ядерна относительно каждой топологии μ_n, то следующие утверждения равносильны:*

1) *ряд* (1) *сходится в* H;
2) $\exists p \geqslant 1$: *ряд* (1) *сходится в* H_p;
3) *ряд* (1) *сходится абсолютно в* H;
4) $\exists m \geqslant 1$: *ряд* (1) *сходится абсолютно в* H_m;
5) $\exists j \geqslant 1 : \forall m \geqslant 1$ $\lim\limits_{k\to\infty} \big(\ln|c_k| + \tau_{j,m}(t_k)\big) = -\infty$;
6) $\exists r \geqslant 1 : \forall n \geqslant 1 : \limsup\limits_{k\to\infty} (\ln|c_k| + \tau_{r,n}(t_k)) < \infty$.

Доказательство. Так как H обладает свойством (Y), то 1) $\Longleftrightarrow$ 2). Далее, всегда 4) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 1); 2) $\Longrightarrow$ 5) $\Longrightarrow$ 6). Наконец, 6) $\Longrightarrow$ 4) по предложению 2 (с $m = r$). $\square$

Учитывая также следствие предложения 4 и теорему 2, из теоремы 6 получаем

Следствие 1. Если последовательность Λ $\widetilde{d}_n$-ядерна в H при любом $n \geqslant 1$, то утверждения 1)–6) теоремы 6 равносильны.

Следствие 2. Пусть выполнено хотя бы одно из двух предположений:

$(\mathrm{i})_0$ $\forall n \geqslant 1$ топология μ_n d_n-разделена и Λ имеет конечный логарифмический d_n-тип;
$(\mathrm{ii})_0$ $\forall n \geqslant 1$ топология μ_n слабо d_n-разделена и Λ имеет нулевой логарифмический d_n-тип.

Тогда утверждения 1)–6) теоремы 6 равносильны.

Переходим теперь к критериям сходимости, в которых участвует стандартная стационарная последовательность $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Положим $d_{q_{k,n}}(t) := d_{k,n}(t)$ $\forall k, n \geqslant 1$, $\forall t \in B$. Примерно так же, как теорема 6, но с помощью теоремы 3 доказывается

Теорема 7. *Пусть Λ $\widetilde{d}_n$-ядерна в H_n $\forall n \geqslant 1$. Пусть, далее, A удовлетворяет условию* (9), *а также соотношению*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_k}{d_{j,n}(t_k)} < \infty \quad \forall j, n \geqslant 1. \tag{15}$$

Тогда любое из утверждений 1)–6) *теоремы* 6 *равносильно неравенствам*

$$\exists n \geqslant 1: \quad \forall j \geqslant 1 \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{a_k}\big(\ln|c_k| + \tau_{n,j}(t_k)\big) \leqslant 0. \tag{16}$$

Далее, из теорем 4 и 5 следуют две теоремы.

Теорема 8. *Пусть стандартная последовательность* A *удовлетворяет условию* (15) *и хотя бы одному из предположений* $(\mathrm{i})_0$, $(\mathrm{ii})_0$. *Тогда любое из утверждений* 1)–6) *теоремы* 6 *равносильно неравенствам* (16).

Теорема 9. *Пусть выполняется хотя бы одно из предположений* $(\mathrm{i})_0$, $(\mathrm{ii})_0$, *и пусть стандартная стационарная последовательность* A *такова, что* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k/d_n(t_k) = 0$ $\forall n \geqslant 1$. *Тогда соотношение*

$$\exists r \geqslant 1: \quad \forall p \geqslant 1 \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{a_k}\big(\ln|c_k| + \tau_{r,p}(t_k)\big) < \infty$$

равносильно неравенствам (16), *а также любому из утверждений* 1)–6) *теоремы* 6.

4. Рассмотрим более специальную ситуацию, когда $(IF)_0$-пространство является $H = \operatorname{ind} H_n$, где $\forall n \geqslant 1$ H_n — B-пространство с нормой $\|\cdot\|_n$, вполне непрерывно вложенное в B_{n+1}.

Если ряд (1) сходится в H, то $\exists n \geqslant 1$: ряд (1) сходится в H_n. Отсюда

$$\exists n \geqslant 1: \lim_{k\to\infty}\big(\ln|c_k| + \ln\|x(t_k)\|_n\big) = -\infty, \tag{17}$$

и

$$\exists n \geqslant 1: \limsup_{k\to\infty}(\ln|c_k| + \ln\|x(t_k)\|_n) < \infty. \tag{18}$$

Будем считать, что $\|x(t_k)\| > 0$ $\forall n \geqslant 1$, $\forall k \geqslant 1$, и назовем последовательность Λ *индуктивно-ядерной* в H, если

$$\forall n \geqslant 1 \;\; \exists m \geqslant 1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|x(t_k)\|_m}{\|x(t_k)\|_n} < \infty.$$

Тогда, если выполнено условие (18) и Λ индуктивно ядерна в H, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,\|x(t_k)\|_m = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,\|x(t_k)\|_n\,\frac{\|x(t_k)\|_m}{\|x(t_k)\|_n} < \infty,$$

и ряд (1) абсолютно сходится в H. Таким образом, справедливо

Предложение 10. *Если ряд* (1) *сходится в* H, *то выполнено условие* (17). *Обратно, если* Λ *индуктивно ядерна в* H *и выполнено условие* (18), *то ряд* (1) *сходится абсолютно в* H.

5. Рассмотрим некоторые примеры, уделив основное внимание рядам экспонент. Пусть $B \subseteq \mathbb{C}^p$, $t = (t_1,\dots,t_p) \in B$, $p \geqslant 1$, $z = (z_1,\dots,z_p) \in \mathbb{C}^p$ или $z \in \mathbb{R}^p$, $\langle z,t\rangle = \sum\limits_{k=1}^{p} z_k t_k$; $|t|_p := |t_1| + \dots + |t_p|$. Пусть сначала $0 < \sigma < \infty$, $1 < \rho < \infty$, $y(z)$ — любая целая функция в $\mathbb{C}^p$ и $\|y\|_\rho^\sigma := \sup\limits_{r>0} M_r(y)/\exp(\sigma r^\rho)$, где $M_r(y) = \max\{|y(z)|:\ |z_k| \leqslant r,\ k = 1,2,\dots,p\}$. Положим $\forall t \in \mathbb{C}^p$ $x(t) = \exp\langle z,t\rangle$. Тогда, как известно,

$$\ln\|x(t)\|_\rho^\sigma = (|t|_p)^{\tilde\rho} A_\rho^{(\sigma)}, \quad \text{где} \quad \tilde\rho = \frac{\rho}{\rho-1}; \quad \frac{1}{A_\rho^{(\sigma)}} = \tilde\rho(\rho\sigma)^{\tilde\rho/\rho}.$$

1. Пусть $H = [\rho,\infty]_p$ — пространство Фреше всех целых функций в $\mathbb{C}^p$ порядка не выше, чем ρ, с определяющим топологию набором норм

$$\|y\|_{n,\rho} := \|y\|^1_{\rho_n^0}, \quad \text{где} \quad \rho_n^0 = \rho\Big(1 + \frac{1}{n}\Big), \quad n = 1,2,\dots$$

В этом случае $\forall t\in\mathbb{C}$
$$\ln\|x(t)\|_{n,\rho}=A^{(1)}_{\rho_n^0}(|t|_p)^{\rho_n},\quad \text{где}\quad \rho_n=\frac{\rho_n^0}{\rho_n^0-1}.$$
Заметим, что $\rho_n\uparrow\rho/(\rho-1)$ при $\rho>1$ и $\rho_n\uparrow+\infty$ при $\rho=1$. Будем далее считать, что $\lim\limits_{k\to\infty}|t_{(k)}|_p=\infty$, где $t_{(k)}=(t_{k,1},t_{k,2},\dots,t_{k,p})$. Более того, будем предполагать, что числа $|t_{(k)}|_p$ возрастают не слишком медленно, а именно,
$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln\ln k}{\ln|t_{(k)}|_p}<\infty. \tag{19}$$
Из условия (19) следует, что $\exists m_0\geqslant 1$:
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{|t_{(k)}|_p^{m_0}}=0. \tag{20}$$
Согласно общей теории рядов Дирихле (напр., [2], гл. IV, § 1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\exp(-x\lambda_k)$, где $\lambda_k=|t_{(k)}|_p^{m_0}$, при условии (20) сходится при всех $x>0$.

Далее,
$$\forall n\geqslant m_0,\ \ \forall D<\infty,\forall m>n\ \ \exists k_0\geqslant 1\ \ \forall k\geqslant k_0\quad D\tau_n(t_{(k)})-\tau_m(t_{(k)})<-\tau_n(t_{(k)}).$$
Следовательно, условие (4) выполняется, и $\Lambda=(t_k)_{k=1}^{\infty}$ ядерна относительно топологии $[\rho,\infty]_p$. Кроме того, если в качестве семейства стандартных последовательностей $A(n)=\{a_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ ($n=1,2,\dots$) взять $A(n)=\{(|t_{(k)}|_p)^{\rho_n}\}_{k=1}^{\infty}$ $\forall n\geqslant 1$, то условие (7) также выполняется, и $A(n)$ не нарушает ядерности (Λ,μ). Непосредственно из теоремы 1 и следствия предложения 6 получаем, что для ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\exp\langle t_{(k)},z\rangle \tag{21}$$
равносильны утверждения:

1) ряд (21) сходится в $[\rho,\infty]_p$;
2) ряд (21) сходится абсолютно в $[\rho,\infty]_p$;
3) $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{\ln|c_k|}{|t_{(k)}|_p^{\rho_n}}\leqslant -A^{(1)}_{\rho_n^0},\ \ n\geqslant m_0$.

Нетрудно проверить, что условие 3) равносильно тому, что
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{|t_{(k)}|_p^{\rho_n}}=-\infty\ \ \forall n\geqslant m_0.$$
В свою очередь, последнее условие равносильно при $\rho=1$ соотношениям
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{|t_{(k)}|_p^{N}}=-\infty\ \ \forall N<\infty,$$
а при $\rho>1$ равносильно равенствам
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{|t_{(k)}|_p^{\tilde\rho-\varepsilon}}=-\infty\ \ \forall\varepsilon>0.$$

2. Пусть теперь $H=[\rho,\sigma]_p$ — пространство всех тех целых функций в $\mathbb{C}^p$, у которых тип при порядке ρ (по совокупности переменных) не превышает σ, $1<\rho<\infty$, $0\leqslant\sigma<\infty$. Топология Фреше в $[\rho,\sigma]_p$ задается счетным набором норм $\|y\|_\rho^{\sigma_n}$, где $\sigma_n=\sigma+1/n$ $\forall n\geqslant 1$. В данном случае $\forall t\in\mathbb{C}^p$, как выше,
$$\ln\|x(t)\|_\rho^{\sigma_n}=\big(|t|_p\big)^{\tilde\rho}A_\rho^{(\sigma+1/n)},\quad n=1,2,\dots$$

При этом
$$0 < A_\rho^{(\sigma+1/n)} \uparrow \frac{1}{\widetilde{\rho}}(\rho)^{-\widetilde{\rho}/\rho}(\sigma)^{-\widetilde{\rho}/\rho} = A_\rho^{(\sigma)}.$$
Имеем
$$\tau_n(t) - \tau_m(t) = (|t|_p)^{\tilde\rho}(A_\rho^{(\sigma+1/n)} - A_\rho^{(\sigma+1/m)}) \leqslant -(A_\rho^{(\sigma+1/(n+1))} - A_\rho^{(\sigma+1/n)})|t|_p^{\tilde\rho}\ \forall n \geqslant 1,\ \forall m > n,\ \forall t \in \mathbb{C}^p.$$

Если в качестве $d(t)$ взять $|t|_p^{\tilde\rho}$, то топология $[\rho,\sigma]_p$ слабо d-разделена. Далее, если
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+k)}{|t_{(k)}|_p^{\tilde\rho}} = 0, \tag{22}$$
то $\Lambda = \big(t_{(k)}\big)_{k=1}^{\infty}$ имеет нулевой логарифмический тип. Согласно теореме 2 равносильны утверждения:

1) ряд (21) сходится в $[\rho,\sigma]_p$;
2) ряд (21) сходится абсолютно в $[\rho,\sigma]_p$;
3) $\lim\limits_{k\to\infty}(\ln|c_k| + A_\rho^{(\sigma+1/n)}(|t_{(k)}|_p)^{\tilde\rho}) = -\infty\ \forall n \geqslant 1$;
4) $\limsup\limits_{k\to\infty}(\ln|c_k| + A_\rho^{(\sigma+1/n)}|t_{(k)}|_p^{\tilde\rho}) < \infty\ \forall n \geqslant 1$.

Взяв в качестве стандартной последовательности $\{(|t_{(k)}|_p)^{\tilde\rho}\}_{k=1}^\infty$ и учитывая условие (22), получаем непосредственно из теоремы 4, что любое из утверждений 1)–4) равносильно тому, что

5) $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{\ln|c_k|}{\big(|t_{(k)}|_p\big)^{\tilde\rho}} \leqslant -A_\rho^{(\sigma+1/n)}\ \forall n \geqslant 1.$

В свою очередь, утверждение 5) равносильно условию
$$\text{при } \sigma > 0\ \limsup_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{(|t_{(k)}|_p)^{\tilde\rho}} \leqslant -A_\rho^\sigma;\ \ \text{при } \sigma = 0\ \lim_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{(|t_{(k)}|_p)^{\rho}} = -\infty, \tag{23}$$
которое является наиболее простым и легко проверяемым критерием сходимости (или абсолютной сходимости) ряда (21) в $[\rho,\sigma]_p$ из четырех равносильных утверждений 3)–5), (23) при $\sigma \in [0,+\infty)$.

3. Пусть $1 < \rho < \infty$ и $H = [\rho,\infty)_n$ — пространство всех целых функций конечного типа при порядке ρ (по совокупности переменных). Здесь $[\rho,\infty)_n = \operatorname{ind}\limits_m H_m$, $H_m = [\rho,m]$, $m = 1,2,\dots$, и H — LN^*-пространство (следовательно, $(IF)_0$-пространство). Пусть выполнено условие (22). Имеем $\tau_{m,n} = (|t|_p)^{\tilde\rho}A_\rho^{m+1/n}$ $\forall m,n \geqslant 1$, $t \in \mathbb{C}^p$, где числа A_ρ^σ определены выше. Отсюда $\forall m \geqslant 1$ топология μ_m в H_m слабо d_m-разделена, где $d_m(t) = d(t) = \big(|t|_p\big)^{\tilde\rho}$. Учитывая также условие (22) и взяв в качестве стандартной последовательности $A = (a_k)_{k=1}^\infty$, $a_k = (|t_{(k)}|_p)^{\tilde\rho}$, согласно теореме 8 заключаем, что соотношение
$$\exists n \geqslant 1\ \ \forall j \geqslant 1\ \ \limsup_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{(|t_{(k)}|_p)^{\widetilde\rho}} \leqslant -A_\rho^{n+1/j} \tag{24}$$
равносильно любому из утверждений 1)–6) теоремы 6, в которых $H = [\rho,\infty)_p$, $H_m = [\rho,m]_p$, $\tau_{m,n}(t) = (|t|_p)^{\tilde\rho}A_\rho^{m+1/n}$.

Нетрудно видеть, что условие (24) эквивалентно тому, что
$$\exists n \geqslant 1:\ \ \limsup_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{(|t_{(k)}|_p)^{\widetilde\rho}} \leqslant -A_\rho^n.$$
В свою очередь, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} A_\rho^n = 0$, то последнее неравенство равносильно тому, что
$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{(|t_{(k)}|_p)^{\widetilde\rho}} < 0. \tag{25}$$

Очевидно, неравенство (25) и доставляет наиболее простой критерий сходимости (а также абсолютной сходимости) ряда (21) в пространстве $[\rho,\infty)_p$.

4. Пусть $H=\mathcal{H}(\mathbb{C}^p)$ — пространство Фреше всех целых функций в $\mathbb{C}^p$ со счетным набором норм: $\|y\|_n=\max\{|y(v)|:|v_k|\leqslant n,\ k=1,2,\dots,p\}$, $n=1,2,\dots$; $x(t)=\exp\langle z,t\rangle$, $t\in\mathbb{C}^p$. В данном случае $\ln\|x(t)\|_n=|t|_p n$ $\forall n\geqslant 1$, и топология d-разделена с $d(t)=|t|_p$. Пусть $\Lambda=(|t_{(k)}|_p)$ и Λ имеет конечный логарифмический тип, т. е.

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln(1+k)}{|t_{(k)}|_p}<\infty.$$

При $a_k=|t_{(k)}|_p$ согласно теореме 4 ряд (21) сходится (или абсолютно сходится) в $\mathcal{H}(\mathbb{C}^p)$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{|t_{(k)}|_p}\leqslant -n\ \ \forall n\geqslant 1,$$

т. е. когда $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{\ln|c_k|}{|t_{(k)}|_p}=-\infty$.

5. Пусть G — содержащая начало координат ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$ с опорной функцией $h_G(t)=\sup\limits_{z\in G}\operatorname{Re}\langle z,t\rangle$, и пусть $H=H(G)$ — пространство Фреше с набором норм

$$\|y\|_n=\max\{|y(z)|:z\in\overline{q_nG}\},\quad n=1,2,\dots,\quad 0<q_n\uparrow 1.$$

Если, как выше, $x(t)=\exp\langle z,t\rangle$, то $\ln\|x(t)\|_n=q_nh_G(t)$ $\forall n\geqslant 1$, $\forall t\in\mathbb{C}^p$. В данном случае топология в $H(G)$ слабо d-разделена с $d(t)=h_G(t)$. Пусть $\Lambda=\big(t_{(k)}\big)_{k=1}^{\infty}$ и Λ имеет нулевой логарифмический тип, т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+k)}{h_G(t_{(k)})}=0.\tag{26}$$

По теореме 4 при $a_k=h_G(t_{(k)})$ ряд (21) сходится (или абсолютно сходится) в $H(G)$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{h_G(t_{(k)})}\leqslant -q_n\ \ \forall n\geqslant 1,$$

или, что равносильно,

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{h_G(t_{(k)})}\leqslant -1.\tag{27}$$

Заметим, что условие (26) равносильно тому, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+k)}{|t_{(k)}|_p}=0.\tag{28}$$

6. Аналогично, если $0\in G$ и G — выпуклая область (уже не обязательно ограниченная), $H=H(G)$, $\|y\|_n=\max\{|y(z)|:z\in F_n\}$, $n=1,2,\dots$, где $0\in F_n\subset F^0_{n+1}\subset G$ и F_n — компакт, то $\ln\|x(t)\|_n=h_{F_n}(t)$ $\forall t\in\mathbb{C}^p$, $\forall n\geqslant 1$. Здесь топология в $H(G)$ слабо $\widetilde{d}$-разделена, причем $\forall n\geqslant 1$ $d_n(t)=h_{F_n}(t)$: для любого $n\geqslant 1$ найдутся достаточно большое m и малое $\varepsilon_n>0$ такие, что $\ln\|x(t)\|_n-\ln\|x(t)\|_m\leqslant -\varepsilon_n\ln\|x(t)\|_n$ $\forall t\in\mathbb{C}^p$. Полагая $a_{k,n}=h_{F_n}(t_k)$ $\forall n\geqslant 1$, $k=1,2,\dots$, получаем (учитывая неравенство $h_{F_{n+1}}(t)/h_{F_n}(t)\geqslant b_n>1$ $\ \forall t\in\mathbb{C}^p$) согласно теореме 3, что ряд (21) при условии (28) сходится (или абсолютно сходится) в $H(G)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|c_k|}{h_{F_n}(t_{(k)})}\leqslant -1\ \ \forall n\geqslant 1.\tag{29}$$

7. Пусть $0 \in F$, F — выпуклый компакт в $\mathbb{C}^p$ и $H = H(F)$ — пространство аналитических ростков на F с индуктивной топологией $\operatorname*{ind}_n H(G_n)$, где $F \subset G_n$ $\forall n \geqslant 1$, G_n — выпуклая ограниченная область в $\mathbb{C}^p$, $\overline{G_{n+1}} \subset G_n$. Так как $H(F)$ — $(IF)_0$-пространство, то ряд (21) при условии (28) сходится (или абсолютно сходится) в $H(F)$ тогда и только тогда, когда он сходится (или абсолютно сходится) в некотором $H(G_n)$, т. е. когда (в силу (27))

$$\exists n \geqslant 1 \ \ \forall m \geqslant 1 \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln|c_k|}{h_{G_n}(t_{(k)})} \leqslant -q_m. \tag{30}$$

Здесь в качестве компактов $F_{n,m}$, аппроксимирующих изнутри область G_n, берутся $q_m\overline{G_n}$, где $0 < q_m \uparrow 1$. Очевидно, условие (30) равносильно такому критерию сходимости

$$\exists n \geqslant 1: \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln|c_k|}{h_{G_n}(t_{(k)})} \leqslant -1.$$

Если, в частности, $F = \{0\}$, то можно положить $G_n = r_n\mathcal{E}_n$, где $r_n \downarrow 0$, $\mathcal{E}_1 = \{z : |z_k| < 1,\ k = 1, 2, \ldots, p\}$. Тогда $h_{G_n}(t_{(k)}) = r_n|t_{(k)}|$, и ряд (21) при условии (28) сходится (абсолютно сходится) в $H(\{0\})$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln|c_k|}{|t_{(k)}|_p} < 0.$$

8. Пусть F — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^p$ с непустой внутренностью F^0, $0 \in F$, и пусть $C^\infty(F)$ — пространство Фреше всех комплекснозначных функций $y(x) : F \to \mathbb{C}$, имеющих в F^0 частные производные всех порядков по всем p переменным $x_1, \ldots, x_p$, равномерно непрерывные в F^0. Топология в $C^\infty(F)$ задается набором норм

$$\|y\|_n = \sup\left\{\left|\frac{\partial^{|\alpha|_p} y(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_p^{\alpha_p}}\right| : |\alpha|_p \leqslant n,\ x \in F_0\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$). Имеем

$$\ln\|x(t)\|_n = h_F(t) + \ln\max\{|t_1|^{\alpha_1}\cdots|t_p|^{\alpha_p} : |\alpha|_p \leqslant n\} = \gamma_n(t) + h_F(t) \ \ \forall t \in \mathbb{C}^p \ \text{ и } \ x(t) = \exp\langle t, x\rangle.$$

Легко проверить, что

$$\begin{gathered}\max\{|t_1|^{\alpha_1}\cdots|t_p|^{\alpha_p} : |\alpha|_p \leqslant n+1\} \geqslant \\ \geqslant \max\{|t_1|^{\alpha_1}\cdots|t_p|^{\alpha_p} : |\alpha|_p \leqslant n\}\max\{|t_1|, |t_2|, \ldots, |t_p|\} \geqslant \\ \geqslant \max\{|t_1|^{\alpha_1}\cdots|t_p|^{\alpha_p} : |\alpha|_p \leqslant n\}\frac{|t|_p}{p}.\end{gathered}$$

Отсюда $\gamma_{n+1}(t) \geqslant \gamma_n(t) + \ln|t|_p - \ln p$ $\forall t \in \mathbb{C}^p$. Следовательно, топология в $C^\infty(F)$ d-разделена с $d(t) = \ln|t|_p$. Предположим, что $\Lambda = (t_{(k)})$ имеет конечный логарифмический d-тип, т. е.

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln(1+k)}{\ln|t_{(k)}|_p} < \infty. \tag{31}$$

Полагая $a_k = \ln|t_{(k)}|_p$, по теореме 4 заключаем, что ряд (21) сходится (или абсолютно сходится) в $C^\infty(F)$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\ln|t_{(k)}|_p}\bigl(\ln|c_k| + \gamma_n(t_{(k)}) + h_F(t_{(k)})\bigr) \leqslant 0 \ \ \forall n \geqslant 1.$$

При этом

$$\gamma_n(t_{(k)}) \geqslant \gamma_0(t_{(k)}) + n\ln|t_{(k)}|_p - n\ln p = 1 + n\ln|t_{(k)}|_p - n\ln p \ \ \forall k \geqslant 1.$$

Следовательно, если ряд (21) сходится в $C^\infty(F)$, то

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{\ln|t_{(k)}|_p}\big(\ln|c_k|+h_F(t_{(k)})\big)\leqslant -n\ \ \forall n\geqslant 1,$$

т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln|t_{(k)}|_p}\big(\ln|c_k|+h_F(t_{(k)})\big)=-\infty. \tag{32}$$

С другой стороны, $\gamma_n(t)\leqslant n\ln|t_{(k)}|_p\ \forall n\geqslant 1$. Поэтому, если равенство (32) имеет место, то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln|t_{(k)}|_p}\big(\ln|c_k|+\gamma_n(t_{(k)})+h_F(t_{(k)})\big)=-\infty\ \ \forall n\geqslant 1.$$

Таким образом, ряд (21) при условии (31) сходится (или абсолютно сходится) в $C^\infty(F)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (32).

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

1. Коробейник Ю.Ф. *Об одной двойственной задаче.* I. *Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше* // Матем. сб. – 1975. – Т. 97. – №2. – С. 193–229.
2. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* – М.: ГИТТЛ, 1950. – 703 с.

Ростовский государственный университет

Поступила
28.06.1999