

О. ДЖОХАДЗЕ, Б. МИДОДАШВИЛИ

**ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДОМИНИРОВАННЫМИ МЛАДШИМИ
ЧЛЕНАМИ**

1. Введение

В данной работе изучается общий класс пространственных гиперболических уравнений в частных производных высокого порядка с доминированными младшими членами [1] вида

$$\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-1 \\ \alpha_i \leq k_i, i=1, \dots, n}} a^\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \quad x \in D, \quad (1.1)$$

где $m = \sum_{i=1}^n k_i$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $m \in \mathbb{N}$ и $k_i, \alpha_i, i = 1, \dots, n$, — неотрицательные целые числа.

Уравнение (1.1) является гиперболическим, для которого плоскости $x_i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$, являются характеристическими, а направления координатных осей — бихарактеристическими.

Дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка с доминированными младшими членами встречаются при изучении математических моделей некоторых природных и физических процессов [2]–[8].

Частные случаи этих уравнений для $m = 3$ и $n = 3$ изучены в работах [8]–[11], для $m = 4$ и $n = 3$ — в [8], [12], для произвольного положительного m и $n = 2$ — в [7], а для $k_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, и n произвольного в [8], [13], [14]. Ниже изучается случай для произвольного m и $n = 3$.

Введено определение функции Римана, доказана ее корректность для вышеупомянутых уравнений и дано интегральное представление решения характеристической задачи Гурса.

2. Задача Гурса для уравнения (1.1) в случае непрерывных коэффициентов

В пространстве независимых переменных $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ для $j = 1, 2, 3$ введем обозначение

$$D_{x_j}^i = \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^i, & i = 1, 2, \dots; \\ 1, & i = 0; \\ \left(\int_{x_j^0}\right)^{-i}, & i = -1, -2, \dots, \end{cases}$$

где $x^0 := (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ — произвольная фиксированная точка. Пусть также $D^{l,m,n} := D_{x_1}^l D_{x_2}^m D_{x_3}^n$, $l, m, n = 0, 1, \dots$, и символ $C^{l,m,n}$ означает класс функций, которые непрерывны вместе со своими частными производными $D_{x_1}^i, D_{x_2}^j, D_{x_3}^k$, $0 \leq i \leq l, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq n$.

Предположим, что $l, m, n \in \mathbb{N}$ и выполнены следующие условия согласованности:

$$\begin{aligned} D^{0jk} \varphi_{011}^i \Big|_{x_2=x_2^0, x_3=x_3^0} &= D^{i0k} \varphi_{101}^j \Big|_{x_1=x_1^0, x_3=x_3^0} = D^{ij0} \varphi_{110}^k \Big|_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0}, \\ D^{0jk} \varphi_{011}^i \Big|_{x_2=x_2^0} &= D^{i0k} \varphi_{101}^j \Big|_{x_1=x_1^0}, \quad D^{i0k} \varphi_{101}^j \Big|_{x_3=x_3^0} = D^{ij0} \varphi_{110}^k \Big|_{x_2=x_2^0}, \\ D^{0jk} \varphi_{011}^i \Big|_{x_3=x_3^0} &= D^{ij0} \varphi_{110}^k \Big|_{x_1=x_1^0}, \\ i = 0, 1, \dots, l-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Для уравнения

$$Lu := D^{lmn}u + \sum_{i+j+k < s} a^{ijk} D^{ijk}u = f, \quad (2.1)$$

$$i = 0, 1, \dots, l, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad s := l + m + n,$$

рассмотрим задачу Гурса

$$\begin{aligned} D^{i00}u \Big|_{x_1=x_1^0} &= \varphi_{011}^i, \quad D^{j00}u \Big|_{x_2=x_2^0} = \varphi_{101}^j, \quad D^{00k}u \Big|_{x_3=x_3^0} = \varphi_{110}^k, \\ i = 0, 1, \dots, l-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Не ограничивая общность рассуждения (напр., [7]), можем рассмотреть (2.1) с однородными граничными условиями, т.е. предположить, что $\varphi_{011}^i = \varphi_{101}^j = \varphi_{110}^k = 0$, $i = 0, 1, \dots, l-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, вместо (2.2). После подстановки $u = D^{-l-m-n}w$, $w \in C$, в (2.1) приведем задачу Гурса (2.1), (2.2) к интегральному уравнению Вольтерра

$$w + \sum_{i,j,k} a^{ijk} D^{i-l, j-m, k-n}w = f. \quad (2.3)$$

Это уравнение можно переписать в виде $w + Kw = f$, где K — сумма известных операторов Вольтерра.

Спектральный радиус оператора Вольтерра K равен нулю, поэтому уравнение (2.3) однозначно разрешимо, его решение задается формулой $w = \sum_{n \geq 0} (-1)^n K^n f$ и, следовательно, однозначная разрешимость задачи Гурса (2.1), (2.2) доказана.

Замечание 2.1. Если функции φ_{011}^i , φ_{101}^j , φ_{110}^k , $i = 0, 1, \dots, l-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, непрерывно дифференцируемы по параметру τ до порядка p , то решение задачи Гурса (2.1), (2.2) также p раз непрерывно дифференцируемо относительно того же параметра.

3. Функция Римана и интегральное представление решения задачи Гурса

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L^* := (-1)^{l+m+n} D^{lmn} + \sum_{i+j+k < s} (-1)^{i+j+k} D^{ijk} (a^{ijk} \cdot),$$

который является сопряженным к оператору L (см. уравнение (2.1)) в смысле Лагранжа.

Лемма 3.1. Для операторов L и L^* выполнено тождество

$$vLu - uL^*v = \sum_{i=1}^3 D_{x_i} P_i,$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &:= Q_1 + \sum_{i+j+k < s} \sum_{p < i} (-1)^{p+j+k} D^{i-p-1} u D^{p j k} (a^{i j k} v), \\ P_2 &:= Q_2 + \sum_{i+j+k < s} \sum_{p < j} (-1)^{p+k} D^{i j - p - 1} u D^{0 p k} (a^{i j k} v), \\ P_3 &:= Q_3 + \sum_{i+j+k < s} \sum_{p < k} (-1)^p D^{i j k - p - 1} u D^{0 0 p} (a^{i j k} v), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q_1 &:= \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{i+m+n} D^{l-i-1} u D^{i m n} v, & Q_2 &:= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+n} D^{l-m-i-1} u D^{0 i n} v, \\ Q_3 &:= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i D^{l m n - i - 1} u D^{0 0 i} v. \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала покажем, что имеет место равенство

$$v D^{l m n} u - (-1)^{l+m+n} u D^{l m n} v = \sum_{i=1}^3 D_{x_i} Q_i. \quad (3.1)$$

Рассмотрим билинейную форму

$$\Lambda(u, v) := \sum_{|\alpha|=|\beta|} D^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} u D^{\beta_1 \beta_2 \beta_3} v,$$

где сумма конечна. Взаимно однозначное соответствие

$$D^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} u D^{\beta_1 \beta_2 \beta_3} v \longleftrightarrow \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \eta_3^{\beta_3} \quad (3.2)$$

устанавливает также взаимно однозначное соответствие между формой $\Lambda(u, v)$ и многочленом

$$F(\xi, \eta) := \sum_{|\alpha|=|\beta|} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \eta_3^{\beta_3}.$$

Теперь, принимая во внимание, что (3.2) переводит

$$D_{x_1} (D^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} u D^{\beta_1 \beta_2 \beta_3} v) = D^{\alpha_1+1 \alpha_2 \alpha_3} u D^{\beta_1 \beta_2 \beta_3} v + D^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} u D^{\beta_1+1 \beta_2 \beta_3} v$$

в

$$\xi_1^{\alpha_1+1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \eta_3^{\beta_3} + \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \eta_1^{\beta_1+1} \eta_2^{\beta_2} \eta_3^{\beta_3} = (\xi_1 + \eta_1) \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \eta_3^{\beta_3},$$

закключаем, что $\Lambda(u, v)$ можно представить в форме дивергенции, если только многочлен $F(\xi, \eta)$ допускает представление

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^3 (\xi_k + \eta_k) F_k(\xi, \eta).$$

В этом случае

$$\Lambda(u, v) = \sum_{k=1}^3 D_{x_k} [\Lambda_k(u, v)],$$

где связь билинейной формы $\Lambda_k(u, v)$ и многочлена $F_k(\xi, \eta)$ учитывает вышеупомянутое соответствие.

Далее, простым вычислением имеем

$$\begin{aligned} \xi_1^l \xi_2^m \xi_3^n - (-1)^{l+m+n} \eta_1^l \eta_2^m \eta_3^n &= (\xi_1 + \eta_1) \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{i+m+n} \xi_1^{l-i-1} \eta_1^i \eta_2^m \eta_3^n + \\ &+ (\xi_2 + \eta_2) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+n} \xi_1^l \xi_2^{m-i-1} \eta_2^i \eta_3^n + (\xi_3 + \eta_3) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \xi_1^l \xi_2^m \xi_3^{n-i-1} \eta_3^i, \end{aligned}$$

откуда истинность (3.1) очевидна.

Применяя (3.1) для младших членов $a^{i j k} v D^{i j k} u - (-1)^{i+j+k} u D^{i j k} (a^{i j k} v)$ и суммируя их по i, j, k , видим, что лемма 2.1 доказана. \square

Используя эту лемму, для $x_1^0 \leq y_1 \leq x_1$, $x_2^0 \leq y_2 \leq x_2$, $x_3^0 \leq y_3 \leq x_3$ получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{x^0}^x (vLu - uL^*v) dy &= \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} P_1 \Big|_{y_1=x_1^0}^{y_1=x_1} dy_2 dy_3 + \\ &+ \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_3^0}^{x_3} P_2 \Big|_{y_2=x_2^0}^{y_2=x_2} dy_1 dy_3 + \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} P_3 \Big|_{y_3=x_3^0}^{y_3=x_3} dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пусть

$$\begin{aligned} L_{100} &:= D^{l 0 0} + \sum_{i < l} a^{i m n} D^{i 0 0}, \quad L_{010} := D^{0 m 0} + \sum_{j < m} a^{l j n} D^{0 j 0}, \\ L_{001} &:= D^{0 0 n} + \sum_{k < n} a^{l m k} D^{0 0 k} \end{aligned}$$

и L_{100}^* , L_{010}^* , L_{001}^* — соответствующие сопряженные операторы. Предположим, что функции $\omega_{100} := \omega_{100}(x_1; y)$, $\omega_{010} := \omega_{010}(x_2; y)$, $\omega_{001} := \omega_{001}(x_3; y)$ являются соответствующими решениями следующих задач Коши:

$$\begin{aligned} L_{100}^* \Big|_{x_2=y_2, x_3=y_3} \omega_{100} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dx_1} \right)^i \omega_{100} \Big|_{x_1=y_1} = \delta_{l-1 i}, \quad i = 0, 1, \dots, l-1; \\ L_{010}^* \Big|_{x_1=y_1, x_3=y_3} \omega_{010} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dx_2} \right)^j \omega_{010} \Big|_{x_2=y_2} = \delta_{m-1 j}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1; \\ L_{001}^* \Big|_{x_1=y_1, x_2=y_2} \omega_{001} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dx_3} \right)^k \omega_{001} \Big|_{x_3=y_3} = \delta_{n-1 k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

— символ Кронекера.

Пусть также

$$\begin{aligned} L_{011} &:= D^{0 m n} + \sum_{j+k < m+n} a^{l j k} D^{0 j k}, \quad L_{101} := D^{l 0 n} + \sum_{i+k < l+n} a^{i m k} D^{i 0 k}, \\ L_{110} &:= D^{l m 0} + \sum_{i+j < l+m} a^{i j n} D^{i j 0} \end{aligned}$$

и L_{011}^* , L_{101}^* , L_{110}^* — соответствующие сопряженные операторы, а функции $\theta_{011} := \theta_{011}(x_2, x_3; y)$, $\theta_{101} := \theta_{101}(x_1, x_3; y)$, $\theta_{110} := \theta_{110}(x_1, x_2; y)$ — решения следующих задач Гурса:

$$\begin{aligned} L_{011}^* \Big|_{x_1=y_1} \theta_{011} &= 0, & D_{x_2}^j \theta_{011} \Big|_{x_2=y_2} &= \delta_{m-1 j} \omega_{001}, & D_{x_3}^k \theta_{011} \Big|_{x_3=y_3} &= \delta_{n-1 k} \omega_{010}; \\ L_{101}^* \Big|_{x_2=y_2} \theta_{101} &= 0, & D_{x_1}^i \theta_{101} \Big|_{x_1=y_1} &= \delta_{l-1 i} \omega_{001}, & D_{x_3}^k \theta_{101} \Big|_{x_3=y_3} &= \delta_{n-1 k} \omega_{100}; \\ L_{110}^* \Big|_{x_3=y_3} \theta_{110} &= 0, & D_{x_1}^i \theta_{110} \Big|_{x_1=y_1} &= \delta_{l-1 i} \omega_{010}, & D_{x_2}^j \theta_{110} \Big|_{x_2=y_2} &= \delta_{m-1 j} \omega_{100}; \\ & & i = 0, 1, \dots, l-1, & j = 0, 1, \dots, m-1, & k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Вопрос разрешимости двумерной задачи Гурса высокого порядка легко сводится к разрешимости задачи (2.1), (2.2).

Определение. Определим функцию Римана $v := v(x; y)$ для уравнения (2.1) как решение следующей задачи Гурса:

$$L^* v = 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} D_{x_1}^i v \Big|_{x_1=y_1} &= \delta_{l-1 i} \theta_{011}, & D_{x_2}^j v \Big|_{x_2=y_2} &= \delta_{m-1 j} \theta_{101}, & D_{x_3}^k v \Big|_{x_3=y_3} &= \delta_{n-1 k} \theta_{110}, \\ i = 0, 1, \dots, l-1, & j = 0, 1, \dots, m-1, & k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Существование и единственность этой функции Римана следуют из эквивалентности задач (2.1), (2.2) и (3.6), (3.7).

Замечание 3.1. Так как решения θ_{ijk} , $i, j, k = 0, 1$, $i + j + k = 2$, задач Гурса являются гладкими функциями, т. е. $\theta_{110} \in C^{l m, l m n}$, $\theta_{011} \in C^{m n, l m n}$, $\theta_{101} \in C^{l n, l m n}$, а также принимая во внимание замечание 2.1, для функции Римана имеем $v \in C^{l m n, l m n}$.

Перепишем подинтегральные выражения правой части (3.3). Легко видеть, что согласно (2.2)

$$\begin{aligned} P_1 \Big|_{y_1=x_1^0} &= \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{i+m+n} \varphi_{011}^{l-i-1} D^{i m n} v \Big|_{y_1=x_1^0} + \sum_{i+j+k < s} \sum_{p < i} (-1)^{p+j+k} \varphi_{011}^{i-p-1} D^{p j k} (a^{i j k} v) \Big|_{y_1=x_1^0}, \\ P_2 \Big|_{y_2=x_2^0} &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+n} D^{l 0 0} \varphi_{101}^{m-i-1} D^{0 i n} v \Big|_{y_2=x_2^0} + \sum_{i+j+k < s} \sum_{p < j} (-1)^{p+k} D^{i 0 0} \varphi_{101}^{j-p-1} D^{0 p k} (a^{i j k} v) \Big|_{y_2=x_2^0}, \\ P_3 \Big|_{y_3=x_3^0} &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i D^{l m 0} \varphi_{110}^{n-i-1} D^{0 0 i} v \Big|_{y_3=x_3^0} + \sum_{i+j+k < s} \sum_{p < k} (-1)^p D^{i j 0} \varphi_{110}^{k-p-1} D^{0 0 p} (a^{i j k} v) \Big|_{y_3=x_3^0}. \end{aligned}$$

Кроме того, предполагая, что $v(x; y)$ является функцией Римана, согласно (3.7) имеем

$$\begin{aligned} P_1 \Big|_{y_1=x_1} &= (-1)^{l+m+n-1} u \Big|_{y_1=x_1} D^{0 m n} \theta_{011} + \sum_{j+k < m+n} (-1)^{l-1+j+k} u \Big|_{y_1=x_1} D^{0 j k} (a^{l j k} \Big|_{y_1=x_1} \theta_{011}) = \\ &= (-1)^{l-1} u \Big|_{y_1=x_1} L_{011}^* \Big|_{y_1=x_1} \theta_{011} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} P_2 \Big|_{y_2=x_2} &= (-1)^{m-1} \left\{ (-1)^n D^{l 0 0} u \Big|_{y_2=x_2} D^{0 0 n} \theta_{101} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+k < l+n} (-1)^k D^{i 0 0} u \Big|_{y_2=x_2} D^{0 0 k} (a^{i m k} \Big|_{y_2=x_2} \theta_{101}) \right\}, \\ P_3 \Big|_{y_3=x_3} &= (-1)^{n-1} \left\{ D^{l m 0} u \Big|_{y_3=x_3} \theta_{110} + \sum_{i+j < l+m} D^{i j 0} u \Big|_{y_3=x_3} a^{i j n} \Big|_{y_3=x_3} \theta_{110} \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 3.2. Для любых функций $u, v \in C^m$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место равенство

$$vD^m u = (-1)^m u D^m v + D \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i D^{m-i-1} u D^i v \right\}.$$

Доказательство. Предположим, что лемма 3.2 справедлива для $m \in \mathbb{N}$, и покажем ее справедливость для $m+1$. Действительно, т. к.

$$\begin{aligned} vD^{m+1} u &= (-1)^m D u D^m v + D \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i D^{m-i} u D^i v \right\} = (-1)^m D u D^m v + \\ &+ D \left\{ \sum_{i=0}^m (-1)^i D^{m-i} u D^i v - (-1)^m u D^m v \right\} = (-1)^m D u D^m v + D \left\{ \sum_{i=0}^m (-1)^i D^{m-i} u D^i v \right\} - \\ &- (-1)^m D u D^m v - (-1)^m u D^{m+1} v = (-1)^{m+1} u D^{m+1} v + D \left\{ \sum_{i=0}^m (-1)^i D^{m-i} u D^i v \right\} \end{aligned}$$

и $vD u = -uD v + D(uv)$ для $m=1$, то справедливость леммы 3.2 очевидна. \square

С использованием этой леммы и формулы Ньютона–Лейбница находим

$$\begin{aligned} I_{101}(x) &:= \int_{x_1^0}^{x_1^1} \int_{x_3^0}^{x_3^1} P_2|_{y_2=x_2} dy_1 dy_3 = (-1)^{m-1} \int_{x_1^0}^{x_1^1} \int_{x_3^0}^{x_3^1} \left\{ (-1)^{n+l} u|_{y_2=x_2} D^{l0n} \theta_{101} + \right. \\ &+ D^{100} \left(\sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{n+p} D^{l-p-100} u|_{y_2=x_2} D^{p0n} \theta_{101} \right) + \sum_{i+k < l+n} (-1)^{k+i} u|_{y_2=x_2} D^{i0k} (a^{imk}|_{y_2=x_2} \theta_{101}) + \\ &+ D^{100} \left(\sum_{p=0}^{i-1} (-1)^{k+p} D^{i-p-100} u|_{y_2=x_2} D^{p0k} (a^{imk}|_{y_2=x_2} \theta_{101}) \right) \left. \right\} dy_1 dy_3 = \\ &= (-1)^{m-1} \int_{x_3^0}^{x_3^1} \left\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{n+p} D^{l-p-100} u|_{y_2=x_2} D^{p0n} \theta_{101} + \right. \\ &+ \sum_{i+k < l+n} \sum_{p < i} (-1)^{n+p+k} D^{i-p-100} u|_{y_2=x_2} D^{p0k} (a^{imk}|_{y_2=x_2} \theta_{101}) \left. \right\} \Big|_{x_1^0}^{x_1^1} dy_3 + \\ &+ (-1)^{m-1} \int_{x_1^0}^{x_1^1} \int_{x_3^0}^{x_3^1} u|_{y_2=x_2} L_{101}^*|_{y_2=x_2} \theta_{101} dy_1 dy_3. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (2.2), (3.4) и (3.5) имеем

$$\begin{aligned} I_{101}(x) &= (-1)^{m-1} \int_{x_3^0}^{x_3^1} \left\{ (-1)^{l-1} u|_{y_1=x_1, y_2=x_2} L_{001}^*|_{y_1=x_1, y_2=x_2} \omega_{001} - \right. \\ &- \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{n+p} \varphi_{011}^{l-p-1}|_{y_2=x_2} D^{p0n} \theta_{101}|_{y_1=x_1^0} - \\ &- \sum_{i+k < l+n} \sum_{p < i} (-1)^{k+p} \varphi_{011}^{i-p-1}|_{y_2=x_2} D^{p0k} (a^{imk}|_{y_2=x_2} \theta_{101})|_{y_1=x_1^0} \left. \right\} dy_3 = \\ &= (-1)^m \int_{x_3^0}^{x_3^1} \left\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{n+p} \varphi_{011}^{l-p-1}|_{y_2=x_2} D^{p0n} \theta_{101}|_{y_1=x_1^0} + \right. \\ &+ \sum_{i+k < l+n} \sum_{p < i} (-1)^{k+p} \varphi_{011}^{i-p-1}|_{y_2=x_2} D^{p0k} (a^{imk}|_{y_2=x_2} \theta_{101})|_{y_1=x_1^0} \left. \right\} dy_3. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.2 и использованным выше процедурам получим

$$I_{110}(x) := \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} P_3|_{y_3=x_3} dy_1 dy_2 = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x),$$

где $I_1(x) := I_0(x) - I_0(x_1, x_2^0, x_3) - I_0(x_1^0, x_2, x_3) + I_0(x_1^0, x_2^0, x_3)$,

$$I_0(y_1, y_2, x_3) := (-1)^{n-1} \left\{ \sum_{p=0}^{l-1} \sum_{q=0}^{m-1} (-1)^{p+q} D^{l-p-1} D^{m-q-1} u|_{y_3=x_3} D^{p+q} \theta_{110} + \right. \\ \left. + \sum_{i+j < l+m} \sum_{p < i} \sum_{q < j} (-1)^{p+q} D^{i-p-1} D^{j-q-1} u|_{y_3=x_3} D^{p+q} (a^{i+j} n|_{y_3=x_3} \theta_{110}) \right\}$$

и

$$I_2(x) := (-1)^{n-1} \int_{x_2^0}^{x_2} \left\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{p+m} D^{l-p-1} u|_{y_3=x_3} D^{p+m} \theta_{110} + \right. \\ \left. + \sum_{i+j < l+m} \sum_{p < i} (-1)^{p+j} D^{i-p-1} u|_{y_3=x_3} D^{p+j} (a^{i+j} n|_{y_3=x_3} \theta_{110}) \right\} \Big|_{x_1^0}^{x_1} dy_2, \\ I_3(x) := (-1)^{n-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \left\{ (-1)^l D^{0+m} u|_{y_3=x_3} D^{l+0} \theta_{110} + \right. \\ \left. + \sum_{i+j < l+m} (-1)^i D^{0+j} u|_{y_3=x_3} D^{i+0} (a^{i+j} n|_{y_3=x_3} \theta_{110}) \right\} dy_1 dy_2.$$

Теперь, принимая во внимание (3.5) и первое из условий (3.4), находим

$$I_0(x) = (-1)^{n+m} \left\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^p D^{l-p-1} u|_{y_2=x_2, y_3=x_3} D^{p+0} \omega_{100} + \right. \\ \left. + \sum_{i < l} \sum_{p < i} (-1)^p D^{i-p-1} u|_{y_2=x_2, y_3=x_3} D^{p+0} (a^{i+m} n|_{y_2=x_2, y_3=x_3} \omega_{100}) \right\} \Big|_{y_1=x_1} = (-1)^{s-1} u|_{y=x}.$$

Аналогично

$$I_0(x_1, x_2^0, x_3) = (-1)^{l+n} \left\{ \sum_{q=0}^{m-1} (-1)^q \varphi_{101}^{m-q-1}(x_1, x_3) D^{0+q} \omega_{010} \Big|_{y_2=x_2^0} + \right. \\ \left. + \sum_{j < m} \sum_{q < j} (-1)^q \varphi_{101}^{j-q-1}(x_1, x_3) D^{0+q} (a^{l+j} n|_{y_1=x_1, y_3=x_3} \omega_{010}) \Big|_{y_2=x_2^0} \right\}, \\ I_0(x_1^0, x_2, x_3) = (-1)^{m+n} \left\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^p \varphi_{011}^{l-p-1}(x_2, x_3) D^{p+0} \omega_{100} \Big|_{y_1=x_1^0} + \right. \\ \left. + \sum_{i < l} \sum_{p < i} (-1)^p \varphi_{011}^{i-p-1}(x_2, x_3) D^{p+0} (a^{i+m} n|_{y_2=x_2, y_3=x_3} \omega_{100}) \Big|_{y_1=x_1^0} \right\}$$

и

$$I_0(x_1^0, x_2^0, x_3) = (-1)^{n-1} \left\{ \sum_{p=0}^{l-1} \left(\sum_{q=0}^{m-1} (-1)^{p+q} D^{0+m-q-1} \varphi_{011}^{l-p-1}(x_2, x_3) D^{p+q} \theta_{110} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{i+j < l+m} \sum_{p < i} \sum_{q < j} (-1)^{p+q} D^{0+j-q-1} \varphi_{011}^{i-p-1}(x_2, x_3) D^{p+q} (a^{i+j} n|_{y_3=x_3} \theta_{100}) \right\} \Big|_{y_1=x_1^0, y_2=x_2^0}.$$

Тем же самым методом вычислений будем иметь

$$I_2(x) = (-1)^n \int_{x_2^0}^{x_2} \left\{ \sum_{p=0}^{l-1} (-1)^{m+p} \varphi_{011}^{l-p-1}(y_2, x_3) D^{p m 0} \theta_{110} + \right. \\ \left. + \sum_{i+j < l+m} \sum_{p < i} (-1)^{j+p} \varphi_{011}^{i-p-1}(y_2, x_3) D^{p j 0} (a^{i j n} |_{y_3=x_3} \theta_{110}) \right\} \Big|_{y_1=x_1^0} dy_2$$

и

$$I_3(x) = (-1)^{n-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \left\{ (-1)^{l+m} u |_{y_3=x_3} D^{l m 0} \theta_{110} + \right. \\ \left. + D^{0 1 0} \left(\sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{l+p} D^{0 m-p-1 0} u |_{y_3=x_3} D^{l p 0} \theta_{110} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{i+j < l+m} (-1)^{i+j} u |_{y_3=x_3} D^{i j 0} (a^{i j n} |_{y_3=x_3} \theta_{110}) + \right. \\ \left. + D^{0 1 0} \left(\sum_{p < j} (-1)^{i+p} D^{0 j-p-1 0} u |_{y_3=x_3} D^{i p 0} (a^{i j n} |_{y_3=x_3} \theta_{110}) \right) \right\} dy_1 dy_2 = \\ = (-1)^{n-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} u |_{y_3=x_3} L_{110}^* |_{y_3=x_3} \theta_{110} dy_1 dy_2 + \\ + (-1)^{n-1} \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{l+p} D^{0 m-p-1 0} u |_{y_3=x_3} D^{l p 0} \theta_{110} + \right. \\ \left. + \sum_{i+j < l+m} \sum_{p < j} (-1)^{i+p} D^{0 j-p-1 0} u |_{y_3=x_3} D^{i p 0} (a^{i j n} |_{y_3=x_3} \theta_{110}) \right\} \Big|_{x_2^0}^{x_2} dy_1 = \\ = (-1)^{n+m} \int_{x_1^0}^{x_1} u |_{y_2=x_2, y_3=x_3} L_{100}^* |_{y_2=x_2, y_3=x_3} \omega_{100} dy_1 dy_3 + \\ + (-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{l+p} \varphi_{101}^{m-p-1}(y_1, x_3) D^{l p 0} \theta_{110} + \right. \\ \left. + \sum_{i+j < l+m} \sum_{p < j} (-1)^{i+p} \varphi_{101}^{j-p-1}(y_1, x_3) D^{i p 0} (a^{i j n} |_{y_3=x_3} \theta_{110}) \right\} \Big|_{y_2=x_2^0} dy_1 = \\ = (-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{l+p} \varphi_{101}^{m-p-1}(y_1, x_3) D^{l p 0} \theta_{110} + \right. \\ \left. + \sum_{i+j < l+m} \sum_{p < j} (-1)^{i+p} \varphi_{101}^{j-p-1}(y_1, x_3) D^{i p 0} (a^{i j n} |_{y_3=x_3} \theta_{110}) \right\} \Big|_{y_2=x_2^0} dy_1.$$

Наконец, принимая во внимание выражения для I_{101} и I_{110} , из (3.3) получим интегральное представление решения задачи Гурса (2.1), (2.2) в виде

$$(-1)^s u(x) = I_{101}(x) - I_0(x_1, x_2^0, x_3) - I_0(x_1^0, x_2, x_3) + I_0(x_1^0, x_2^0, x_3) + \\ + I_2(x) + I_3(x) - \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} P_1 |_{y_1=x_1^0} dy_2 dy_3 - \\ - \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_3^0}^{x_3} P_2 |_{y_2=x_2^0} dy_1 dy_3 - \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} P_3 |_{y_3=x_3^0} dy_1 dy_2 - \int_{x_0}^x v(y; x) f(y) dy. \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) успешно может быть использовано в изучении широкого класса локальных и нелокальных граничных задач для уравнения (2.1). Например, для уравнения (2.1) при $l \geq 2$

рассмотрим начально-краевую задачу

$$D^{i00}u|_{x_1=0} = \varphi_{011}^i, \quad u|_{x_1=x_1^0} = \psi, \quad D^{0j0}u|_{x_2=0} = \varphi_{101}^j, \quad D^{00k}u|_{x_3=0} = \varphi_{110}^k, \quad (3.9)$$

$$i = 0, 1, \dots, l-2, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Путем введения неизвестной функции $\tau := D^{l-100}u|_{x_1=0}$ и использования интегрального представления (3.8), задача (2.1), (3.9) эквивалентно сводится к следующему интегральному уравнению Вольтерра третьего рода:

$$\begin{aligned} \omega_{100}(0; x_1^0, x_2, x_3)\tau(x_2, x_3) + \int_0^{x_2} K_2(0, y_2, x_3; x_1^0, x_2, x_3)\tau(y_2, x_3)dy_2 + \\ + \int_0^{x_3} K_3(0, x_2, y_3; x_1^0, x_2, x_3)\tau(x_2, y_3)dy_3 + \\ + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} K_{23}(0, y_2, y_3; x_1^0, x_2, x_3)\tau(y_2, y_3)dy_2dy_3 = \chi(x_2, x_3), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где K_2, K_3, K_{23} и χ — известные функции, а ω_{100} — решение первой задачи Коши в (3.4). Как известно, если

$$\omega_{100}(0; x_1^0, x_2, x_3) \neq 0 \quad (3.11)$$

всюду, то (3.10) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, в силу которого изучаемая задача безусловно разрешима. Некоторые достаточные условия выполнимости (3.11) получены в работах [7], [15], [12].

Литература

1. Hörmander L. *Linear partial differential operators*. – Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1963. – 285 S.
2. Bailey N.T.J. *The mathematical approach to biology and medicine*. – New York: Wiley, 1967. – 296 p.
3. Bullough R.K., Caudrey P.J. (Eds.) *Solitons* (Springer Topics in Current Physics, V. 17). – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1980. – 389 p.
4. Showalter R.E. *Hilbert space methods for partial differential equations* // Electron. J. Diff. Eqns., Monograph 01, 1994.
5. Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J. *Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip* // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1965. – V. 19. – P. 100–116.
6. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии*. – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
7. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.
8. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения с частными производными*. – Казань: Казанск. матем. о-во, 2001. – 226 с.
9. Di Vincenzo R., Villani A. *Sopra un problema ai limiti per un'equazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicità e rappresentazione della soluzione* // Le Matematiche. – 1977. – V. XXXII. – P. 211–238.
10. Джохадзе О. *Функция Римана для гиперболических уравнений и систем высокого порядка с доминированными младшими членами* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 10. – С. 1366–1378.
11. Джохадзе О. *Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных* // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 58–68.
12. Midodashvili B. *A nonlocal problem for fourth order hyperbolic equations with multiple characteristics* // Electron. J. Diff. Eqns. – 2002. – № 85. – P. 1–7.

13. David A. *The estimation for approximate solution of the initial value problem for the partial differential equation* // Acta F. R. N. Univ. Comen. – Mathematica. – 1970. – V. XXIV. – P. 1–18.
14. Durikovic V. *Some remarks on the existence of solutions of hyperbolic partial differential equations* // Acta F. R. N. Univ. Comen. – Mathematica. – 1970. – V. XXIV. – P. 19–35.
15. Jokhadze O. *The first mixed problem for pseudoparabolic equations on a plane* // Bulletin of the Academy of sciences of Georgia. – 1996. – V. 154. – № 2. – P. 177–180.

*Институт математики им. А.М.Размадзе
академии наук Грузии
Грузинский технический университет*

*Поступила
12.07.2004*