Известия вузов. Математика
2008, №8, с. 3–15

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Е.С. БЕЛКИНА, С.С. ПЛАТОНОВ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ K-ФУНКЦИОНАЛОВ И МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ОБОБЩЕННЫМ СДВИГАМ ДАНКЛЯ

Аннотация. В гильбертовом пространстве $L_{2,\alpha} := L_2(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}dx)$, $\alpha > -1/2$, рассматриваются обобщенные сдвиги Данкля, построенные по дифференциально-разностному оператору Данкля. Используя обобщенные сдвиги Данкля, в пространстве $L_{2,\alpha}$ вводятся обобщенные модули гладкости, а на основе оператора Данкля определяются пространства соболевского типа и K-функционалы. Основным результатом статьи является доказательство теоремы об эквивалентности K-функционала и модуля гладкости.

Ключевые слова: оператор Данкля, обобщенный сдвиг Данкля, K-функционал, модули гладкости.

УДК: 517.518

Abstract. In a Hilbert space $L_{2,\alpha} := L_2(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}dx)$, $\alpha > -1/2$, we study the generalized Dunkl translations constructed by the Dunkl differential-difference operator. Using the generalized Dunkl translations, we define generalized modulus of smoothness in the space $L_{2,\alpha}$. On the base of the Dunkl operator we define Sobolev-type spaces and K-functionals. The main result of the paper is the proof of the equivalence theorem for a K-functional and a modulus of smoothness.

Keywords: Dunkl operator, generalized Dunkl translation, K-functional, modulus of smoothness.

1. Введение и формулировка основных результатов

В классической теории приближения функций на прямой $\mathbb{R}$ центральную роль играют операторы сдвига $f(x) \to f(x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Так инфинитезимальным оператором сдвига является оператор дифференцирования, преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям оператора сдвига, оператор сдвига используется для построения модулей непрерывности и гладкости, которые являются основными элементами прямых и обратных теорем теории приближения. Различные обобщения операторов сдвига позволяют ставить естественные аналоги задач теории приближения. Одним из обобщений операторов сдвига является группа или полугруппа операторов в банаховом пространстве. Различные задачи теории приближения в банаховых пространствах с группой или полугруппой операторов рассмотрены в работах [1], [2]. Другим обобщением операторов сдвига являются так называемые "операторы обобщенного сдвига" (напр., [3], гл. I, § 1–2). Эти операторы не обязательно образуют группу или полугруппу, но построенные по ним обобщенные модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения связей между гладкостными свойствами функции и наилучшими приближениями этой функции в весовых

Поступила 26.07.2006

функциональных пространствах, чем обычные модули гладкости. Некоторые результаты о приближении функций с использованием обобщенных модулей непрерывности и гладкости изложены в работах [4]–[8] и в цитированной там литературе.

В различных задачах теории приближения функций большую роль играют K-функционалы. Изучение связи между модулями гладкости и K-функционалами является одной из основных задач теории приближения функций. Для различных обобщенных модулей гладкости такие задачи изучались, например, в [4], [6], [9].

В последние годы в математической литературе появился и стал использоваться новый класс обобщенных сдвигов — обобщенные сдвиги Данкля. Обобщеные сдвиги Данкля строятся по некоторым дифференциально-разностным операторам (операторам Данкля), которые широко используются в математической физике (напр., [10], [11]). Здесь будем рассматривать только операторы Данкля ранга 1 (т. е. на $\mathbb{R}^1$), общий случай имеется в [11].

В данной работе рассматриваются некоторые задачи теории приближения функций на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ в метрике L_2 с некоторым весом. Основным результатом является доказательство теоремы об эквивалентности K-функционала и модуля гладкости, построенного по обобщенным сдвигам Данкля.

Перейдем к более подробному изложению результатов. Всюду далее α — действительное число, удовлетворяющее условию $\alpha > -1/2$.

Оператором Данкля называется дифференциально-разностный оператор D:

$$Df(x) = \frac{df}{dx}(x) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{f(x) - f(-x)}{x}.$$

Действие оператора D определено для всех функций $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$. Заметим, что для любой четной функции $f(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$D^2 f = \mathcal{B}f, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{B} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha+1}{x}\frac{d}{dx}$ — дифференциальный оператор Бесселя.

Пусть $j_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя первого рода, т. е.

$$j_\alpha(x) = \frac{2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)\,J_\alpha(x)}{x^\alpha},$$

где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода ([12], гл. 7). Функция $j_\alpha(x)$ бесконечно дифференцируемая, четная и $j_\alpha(0) = 1$.

Обобщенной экспоненциальной будем называть функцию

$$e_\alpha(x) := j_\alpha(x) + i\,c_\alpha\,x\,j_{\alpha+1}(x), \tag{1.2}$$

где $c_\alpha = (2\alpha+2)^{-1}$, $i = \sqrt{-1}$.

Функция $y = e_\alpha(x)$ удовлетворяет уравнению $Dy = iy$ с начальным условием $y(0) = 1$. В предельном случае при $\alpha = -1/2$ обобщенная экспоненциальная функция совпадает с обычной экспоненциальной функцией e^{ix}.

Используя соотношение

$$j'_\alpha(x) = -\frac{x j_{\alpha+1}(x)}{2(\alpha+1)},$$

которое следует, например, из ([13], формула 8.472), получим, что функцию $e_\alpha(x)$ можно также записать в виде

$$e_\alpha(x) = j_\alpha(x) - i j'_\alpha(x). \tag{1.3}$$

Для основных классов функций на $\mathbb{R}$ (все функции предполагаются комплекснозначными) будем использовать следующие обозначения: C — множество непрерывных функций, C_c

— множество непрерывных функций с компактным носителем, C^∞ — множество бесконечно дифференцируемых функций, $\mathcal{D}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Через $L_{2,\alpha}$ обозначим гильбертово пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$\|f\|_{2,\alpha} := \left(\int |f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx\right)^{1/2}.$$

Здесь и в дальнейших формулах, если не указаны пределы интегрирования, интеграл берется по всей числовой прямой.

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_{2,\alpha}$ определяется по формуле

$$(f,g) := \int \overline{f(x)}\, g(x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx, \quad f,g \in L_{2,\alpha}.$$

Интегрированием по частям проверяется соотношение

$$(Df,g) = -(f,Df) \tag{1.4}$$

для любых функций $f,g \in \mathcal{D}$.

Обычным образом пространство $\mathcal{D}$ снабжается топологией и становится топологическим векторным пространством ([14], гл. IV, § 4). Через $\mathcal{D}'$ обозначим множество обобщенных функций, т. е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}$ будем обозначать $\langle f,\varphi\rangle$. Пространство $L_{2,\alpha}$ вкладывается в $\mathcal{D}'$, если для $f \in L_{2,\alpha}$ и $\varphi \in \mathcal{D}$ положить

$$\langle f,\varphi\rangle := \int f(x)\,\varphi(x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx. \tag{1.5}$$

Действие оператора Данкля D естественным образом расширяется на пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'$, если положить

$$\langle Df,\varphi\rangle := -\langle f, D\varphi\rangle, \quad f\in\mathcal{D}', \varphi\in\mathcal{D}. \tag{1.6}$$

В частности, действие оператора Df определено для любой функции $f \in L_{2,\alpha}$, но, вообще говоря, Df будет обобщенной функцией.

Оператор обобщенного сдвига Данкля $T^y f(x)$ можно определять различными способами. Для функции $f(x) \in \mathcal{D}$ оператор обобщенного сдвига Данкля $u(x,y) = T^y f(x)$ можно определить как решение задачи Коши (напр., [15])

$$D_x u(x,y) = D_y u(x,y), \quad u(x,0) = f(x), \tag{1.7}$$

где D_x и D_y — операторы Данкля, примененные по переменным x и y соответственно.

Оператор T^y продолжается по непрерывности с линейного подмножества $\mathcal{D} \subset L_{2,\alpha}$ на все пространство $L_{2,\alpha}$ (см. далее раздел 2) и продолженный оператор также будем обозначать T^y.

При помощи обобщенного сдвига Данкля для любой функции $f(x) \in L_{2,\alpha}$ определим разности порядка m ($m \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$) с шагом $h > 0$:

$$\Delta_h^m f(x) = (I - T^h)^m f(x),$$

где I — единичный оператор.

Для любого натурального m обобщенный модуль гладкости m-го порядка определим формулой

$$\omega_m(f,\delta)_{2,\alpha} := \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta_h^m f\|_{2,\alpha}, \quad \delta > 0, \quad f \in L_{2,\alpha}.$$

Пусть $W^m_{2,\alpha}$ — пространство Соболева, построенное по оператору D, т. е.

$$W^m_{2,\alpha} := \{f \in L_{2,\alpha} : D^j f \in L_{2,\alpha},\ j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Определим K-функционал, построенный по пространствам $L_{2,\alpha}$ и $W^m_{2,\alpha}$,

$$K(f, t; L_{2,\alpha}; W^m_{2,\alpha}) := \inf\{\|f - g\|_{2,\alpha} + t\|D^m g\|_{2,\alpha} : g \in W^m_{2,\alpha}\},$$

где $f \in L_{2,\alpha}$, $t > 0$.

Для краткости будем использовать обозначение

$$K_m(f, t)_{2,\alpha} := K(f, t; L_{2,\alpha}; W^m_{2,\alpha}).$$

Эквивалентность модуля гладкости и K-функционала устанавливает

Теорема 1.1. *Существуют положительные числа $c_1 = c_1(m, \alpha)$ и $c_2 = c_2(m, \alpha)$, для которых справедливо неравенство*

$$c_1\, \omega_m(f, \delta)_{2,\alpha} \le K_m(f, \delta^m)_{2,\alpha} \le c_2\, \omega_m(f, \delta)_{2,\alpha},$$

где $f \in L_{2,\alpha}$, $\delta > 0$.

Доказательство теоремы 1.1 в разделе 3 является основной целью данной статьи. В разделе 2 приводятся необходимые сведения о преобразовании Данкля и обобщенном сдвиге Данкля.

2. Преобразование Данкля и обобщенный сдвиг Данкля

Приведем необходимые сведения о преобразовании Данкля и обобщенном сдвиге Данкля [11], [15], [16].

Преобразованием Данкля называется интегральное преобразование

$$\mathcal{F} : f(x) \to \widehat{f}(\lambda) = \int f(x)\, e_\alpha(\lambda x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Обратное преобразование Данкля задается формулой

$$\mathcal{F}^{-1} : g(\lambda) \to \widetilde{f}(x) = A \int g(\lambda)\, e_\alpha(-\lambda x)\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda,$$

где

$$A = \left(2^{\alpha+1}\, \Gamma(\alpha + 1)\right)^{-2}.$$

Пусть $\mathcal{S}$ — пространство быстроубывающих функций на $\mathbb{R}$, т. е. множество всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Обычным образом пространство $\mathcal{S}$ снабжается топологией и становится локально-выпуклым пространством (напр., [17], гл. I, § 5). Известно [11], что прямое и обратное преобразования Данкля являются взаимно обратными автоморфизмами пространства $\mathcal{S}$. Для преобразования Данкля справедливо равенство Парсеваля ($f(x) \in \mathcal{S}$)

$$\int |f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx = A \int |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda. \tag{2.1}$$

Отображение $f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ продолжается по непрерывности до изоморфизма гильбертова пространства $L_{2,\alpha}$ на себя. Продолженное отображение будем также обозначать $f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ и называть преобразованием Данкля, при этом остается справедливой формула (2.1), которую можно также записать в виде

$$\|f\|^2_{2,\alpha} = A\, \|\widehat{f}\|^2_{2,\alpha}. \tag{2.2}$$

В разделе 1 был определен оператор обобщенного сдвига Данкля $T^y f(x)$ как решение задачи Коши (1.7). Для любой функции $f(x) \in C^\infty$ решение этой задачи Коши существует, единственно и может быть выписано в явном виде [15]

$$T^y f(x) = C\biggl(\int_0^\pi f_e(G(x,y,\varphi))h^e(x,y,\varphi)\,\sin^{2\alpha}\varphi\,d\varphi + \\ + \int_0^\pi f_o(G(x,y,\varphi))h^o(x,y,\varphi)\,\sin^{2\alpha}\varphi\,d\varphi\biggr), \quad (2.3)$$

где

$$C = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(1/2)}, \quad G(x,y,\varphi) = \sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi},$$
$$h^e(x,y,\varphi) = 1 - \operatorname{sign}(xy)\cos\varphi,$$
$$h^o(x,y,\varphi) = \begin{cases} \frac{(x+y)h^e(x,y,\varphi)}{G(x,y,\varphi)} & \text{для } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{для } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
$$f_e(x) = \frac{1}{2}\bigl(f(x)+f(-x)\bigr), \quad f_o(x) = \frac{1}{2}\bigl(f(x)-f(-x)\bigr). \quad (2.4)$$

По формуле (2.3) оператор T^y может быть определен и для более широкого чем C^∞ класса функций. В частности, оператор $T^y f$ определен для любой непрерывной функции f. Далее будет показано, что по формуле (2.3) оператор T^y продолжается до непрерывного оператора в $L_{2,\alpha}$.

Лемма 2.1. *Если $f(x)$ — четная или нечетная непрерывная функция, то справедливо неравенство*

$$|T^y f(x)|^2 \le 2T^y(|f(x)|^2), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. 1) Если $f(x)$ — четная функция, то $f_e(x) = f(x)$. Введем на отрезке $[0,\pi]$ меру $dm(\varphi) = C(\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi$, где C — коэффициент из формулы (2.3). Тогда $\int\limits_0^\pi dm(\varphi) = 1$. Заметим, что

$$(h^e(x,y,\varphi))^2 = 1 - 2\operatorname{sign}(xy)\,\cos\varphi + \cos^2\varphi \le 2h^e(x,y,\varphi).$$

Используя формулу (2.3) и неравенство Коши–Буняковского, получим

$$|T^y f(x)|^2 = \biggl| \int_0^\pi f(G(x,y,\varphi))\,h^e(x,y,\varphi)\cdot 1\,dm(\varphi)\biggr|^2 \le \\ \le \biggl(\int_0^\pi |f(G(x,y,\varphi))|^2\,(h^e(x,y,\varphi))^2\,dm(\varphi)\biggr)\biggl(\int_0^\pi dm(\varphi)\biggr) \le \\ \le 2\int_0^\pi |f(G(x,y,\varphi))|^2 h^e(x,y,\varphi)\,dm(\varphi) = 2T^y(|f(x)|^2).$$

2) Пусть $f(x)$ — нечетная функция. Используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$|T^y f(x)|^2 = \left| \int_0^\pi f(G(x,y,\varphi))\, h^o(x,y,\varphi)\cdot 1\, dm(\varphi) \right|^2 \le$$
$$\le \left(\int_0^\pi |f(G(x,y,\varphi))|^2 (h^o(x,y,\varphi))^2\, dm(\varphi) \right) \left(\int_0^\pi dm(\varphi) \right) =$$
$$= \int_0^\pi |f(G(x,y,\varphi))|^2 h^e(x,y,\varphi)\, \frac{(x+y)^2 h^e(x,y,\varphi)}{G^2(x,y,\varphi)}\, dm(\varphi). \quad (2.5)$$

Докажем, что

$$\frac{(x+y)^2 h^e(x,y,\varphi)}{G^2(x,y,\varphi)} \le 2. \quad (2.6)$$

Пусть $xy > 0$ (случай $xy < 0$ рассматривается аналогично), тогда $\operatorname{sign}(xy) = 1$ и $|xy| = xy$. Заметим, что

$$\frac{(x+y)^2(1-\cos\varphi)}{x^2+y^2-2xy\cos\varphi} - 2 = \frac{(x-y)^2(1+\cos\varphi)}{x^2+y^2-2xy\cos\varphi} \ge 0,$$

откуда следует (2.6).

Из (2.5) и (2.6) имеем

$$|T^y f(x)|^2 \le 2\int_0^\pi |f(G(x,y,\varphi))|^2\, h^e(x,y,\varphi)\, dm(\varphi) = 2T^y(|f(x)|^2).$$

При этом использовано, что $|f(x)|^2$ — четная функция. □

Лемма 2.2. *Пусть $g(x)$ — непрерывная четная функция и для всех $x \in [0, a+|y|]$ выполняется неравенство $|g(x)| \le A$ ($a, A, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $A > 0$). Тогда для $x \in [-a, a]$ справедливо неравенство $|T^y g(x)| \le 2A$.*

Доказательство. Так как $g(x)$ — четная функция, то из (2.3) следует

$$T^y g(x) = C\int_0^\pi g(G(x,y,\varphi))\, h^e(x,y,\varphi)\, (\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi.$$

Заметим, что $0 \le G(x,y,\varphi) \le |x|+|y|$. Поэтому, если $x \in [-a,a]$, то $G(x,y,\varphi) \in [0, a+|y|]$ и $g(G(x,y,\varphi)) \le A$. Так как $0 \le h^e(x,y,\varphi) \le 2$, то

$$|T^y g(x)| \le C\int_0^\pi A\, h^e(x,y,\varphi)\, (\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi \le 2AC\int_0^\pi (\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi = 2A. \qquad \square$$

Лемма 2.3. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция и $|f(x)| \le A$ для любого $x \in [-a-|y|, a+|y|]$ ($a > 0$, $A > 0$). Тогда при $x \in [-a,a]$ справедливо неравенство*

$$|T^y f(x)| \le 4A. \quad (2.7)$$

Доказательство. Представим $f(x)$ как сумму четной и нечетной функций: $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$, где $f_e(x)$ и $f_o(x)$ определяются формулами (2.4). Функции $|f_e(x)|^2$ и $|f_o(x)|^2$ четные и на отрезке $[0, a+|y|]$ не превосходят A^2. По лемме 2.2 получаем $T^y(|f_e(x)|^2) \le 2A^2$, $T^y(|f_o(x)|^2) \le 2A^2$ при $x \in [-a,a]$. Используя лемму 2.1 и неравенство $(u+v)^2 \le 2(u^2+v^2)$ получим

$$|T^y f(x)|^2 = |T^y f_e(x) + T^y f_o(x)|^2 \le 2(|T^y f_e(x)|^2 + |T^y f_o(x)|^2) \le$$
$$\le 4(T^y(|f_e(x)|^2) + T^y(|f_o(x)|^2)) \le 4(2A^2 + 2A^2) = 16A^2,$$

откуда следует неравенство (2.7). □

Следствие 2.1. Пусть последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на любом отрезке $I \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}$ последовательность функций $T^y f_n(x)$ сходится к функции $T^y f(x)$ равномерно на любом отрезке.

Доказательство. Равномерная сходимость $T^y f_n(x)$ к $T^y f(x)$ на отрезке $[-a, a]$ эквивалентна тому, что $\max\limits_{|x|\le a} |T^y f_n(x) - T^y f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Но по лемме 2.3 $\max\limits_{|x|\le a} |T^y f_n(x) - T^y f(x)| \le 4 \max\limits_{|x|\le a+|y|} |f_n(x) - f(x)|$, а $\max\limits_{|x|\le a+|y|} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, так как $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на отрезке $[-a - |y|, a + |y|]$. $\square$

Лемма 2.4. *Для любых функций $f(x) \in C$ и $g(x) \in C_c$ справедливо равенство*

$$\int (T^y f(x)) g(x) |x|^{2\alpha+1}\, dx = \int f(x)(T^{-y} g(x)) |x|^{2\alpha+1}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{D}$, то равенство (2.8) доказано в ([18], 3.2). Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, $g(x) \in C_c$. Предположим, что $\operatorname{supp} g \subseteq [-N, N]$ ($\operatorname{supp} g$ — носитель функции g). Возьмем произвольную последовательность функций $f_n(x) \in \mathcal{D}$, которая сходится к $f(x)$ равномерно на каждом отрезке, и такую последовательность функций $g_n(x) \in \mathcal{D}$, что $\operatorname{supp} g_n \subseteq [-N, N]$ и $g_n(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на отрезке $[-N, N]$. Тогда

$$\int (T^y f_n(x)) g_n(x) |x|^{2\alpha+1}\, dx = \int f_n(x)(T^{-y} g_n(x)) |x|^{2\alpha+1}\, dx. \tag{2.9}$$

Из следствия 2.1 вытекает, что последовательность $T^y f_n(x)$ сходится к $T^y f(x)$ равномерно на любом отрезке, а последовательность $T^{-y} g_n(x)$ сходится к $T^{-y} g(x)$ равномерно на отрезке $[-N - |y|, N + |y|]$. Переходя в равенстве (2.9) к пределу при $n \to \infty$, получим (2.8). $\square$

Проверим, что

$$\|T^y f\|_{2,\alpha} \le 2\sqrt{2} \|f\|_{2,\alpha} \tag{2.10}$$

при $f \in C_c$.

Если $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$, то $\|T^y f\|_{2,\alpha} \le \|T^y f_e\|_{2,\alpha} + \|T^y f_o\|_{2,\alpha}$. Оценим каждое слагаемое по отдельности:

$$\|T^y f_e\|_{2,\alpha}^2 = \int |T^y f_e(x)|^2 \, |x|^{2\alpha+1}\, dx \le 2 \int T^y(|f_e(x)|^2) \cdot 1 \, |x|^{2\alpha+1}\, dx =$$
$$= 2 \int |f_e(x)|^2 \, (T^y 1) \, |x|^{2\alpha+1}\, dx = 2 \int |f_e(x)|^2 \, |x|^{2\alpha+1}\, dx = 2\|f_e\|_{2,\alpha}^2,$$

аналогично проверяется, что $\|T^y f_o\|_{2,\alpha}^2 \le 2\|f_o\|_{2,\alpha}^2$. При этом была использована лемма 2.1, соотношение (2.8) в частном случае $g(x) = 1$, а также равенство $T^y 1 = 1$.

С учетом того, что $\|f_e\|_{2,\alpha} \le \|f\|_{2,\alpha}$ и $\|f_o\|_{2,\alpha} \le \|f\|_{2,\alpha}$, получаем

$$\|T^y f\|_{2,\alpha} \le \|T^y f_e\|_{2,\alpha} + \|T^y f_o\|_{2,\alpha} \le 2\sqrt{2} \|f\|_{2,\alpha}.$$

Из неравенства (2.10) следует, что оператор T^y продолжается по непрерывности с $\mathcal{D}$ до ограниченного оператора в $L_{2,\alpha}$. Продолженный оператор будем также обозначать T^y и для него остается справедливым неравенство (2.10).

Лемма 2.5. *Пусть $f \in L_{2,\alpha}$, тогда для любого $y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\widehat{(T^y f)}(\lambda) = e_\alpha(\lambda y)\, \widehat{f}(\lambda), \tag{2.11}$$

где $f \to \widehat{f}$ — преобразование Данкля.

Доказательство. Для функций $f \in \mathcal{D}$ равенство (2.11) доказано в ([16], следствие 5.4). Так как $\mathcal{D}$ является плотным подмножеством в $L_{2,\alpha}$, то (2.12) остается справедливым и при $f \in L_{2,\alpha}$. □

Лемма 2.6. *Пусть $f(x) \in L_{2,\alpha}$, тогда*

$$\|\Delta_h^m f\|_{2,\alpha} \le 4^m \|f\|_{2,\alpha}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Используя неравенство (2.10), получим $\|T^h f\|_{2,\alpha} \le 2\sqrt{2}\|f\|_{2,\alpha} \le 3\|f\|_{2,\alpha}$, тогда $\|\Delta_h^1 f\|_{2,\alpha} = \|T^h f - f\|_{2,\alpha} \le \|T^h f\|_{2,\alpha} + \|f\|_{2,\alpha} \le 4\|f\|_{2,\alpha}$, откуда вытекает неравенство (2.12). □

Напомним (напр., [12], п. VIII.2), что линейный оператор A в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения называется в существенном самосопряженным, если его замыкание $\overline{A}$ является самосопряженным оператором. Отметим также, что для самосопряженного в существенном оператора A справедливо равенство $\overline{A} = A^*$ (т. е. замыкание оператора A совпадает с сопряженным оператором).

Лемма 2.7. *Оператор $T = iD$, где D — оператор Данкля, с областью определения $\mathcal{D} \subset L_{2,\alpha}$ в существенном самосопряженный.*

Доказательство. Из (1.4) следует, что оператор $T = iD$ является симметрическим, т. е.

$$(Tf, g) = (f, Tg) \tag{2.13}$$

для всех $f, g \in \mathcal{D}$. Равенства (1.4) и (2.13) справедливы и в случае, когда $f \in \mathcal{D}$, $g \in C^\infty$.

Для симметрического оператора A существует следующий критерий самосопряженности в существенном ([19], с. 283): A самосопряжен в существенном тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}(A^* + i) = \{0\}$. Чтобы доказать, что оператор $T = iD$ самосопряжен в существенном, достаточно проверить, что $\operatorname{Ker}(T^* + i) = \{0\}$.

Пусть функция g принадлежит области определения оператора T^* и

$$(T^* + i)g = 0. \tag{2.14}$$

Учитывая симметричность оператора T, получим, что равенство (2.14) равносильно равенству

$$(T + i)g = 0. \tag{2.15}$$

Равенство (2.15), в свою очередь, эквивалентно равенству

$$Dg = -g. \tag{2.16}$$

Пусть $g(x) = g_e(x) + g_o(x)$, где $g_e(x)$ — четная часть функции $g(x)$, $g_o(x)$ — нечетная, тогда равенство (2.16) эквивалентно системе

$$\frac{dg_e}{dx}(x) = -g_o(x),$$
$$\frac{dg_o}{dx}(x) + \frac{(2\alpha+1)}{x} g_o(x) = -g_e(x).$$

Подставляя $g_o(x)$ из первого уравнения во второе, получим

$$(-\mathcal{B} + 1)g_e = 0,$$

где $\mathcal{B}$ — дифференциальный оператор Бесселя (см. (1.1)). В ([8], лемма 3.2) показано, что из равенства $(-\mathcal{B}+1)g_e = 0$ и того, что $g_e \in L_{2,\alpha}$, следует $g_e(x) = 0$, значит, $g_o(x) = 0$, т. е. $g(x) = 0$. □

Следствие 2.2. Если функции f и Df принадлежат пространству $L_{2,\alpha}$ (действие оператора D понимается в смысле теории обобщенных функций), то найдется последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}$ такая, что $f_n \to f$ и $Df_n \to Df$ в пространстве $L_{2,\alpha}$.

Доказательство. Пусть $T = iD$. Из определения сопряженного T^* следует, что f принадлежит области определения оператора T^* и $g = T^*f$ тогда и только тогда, когда $f \in L_{2,\alpha}$ и $g = i(Df)$ в смысле теории обобщенных функций. Остается воспользоваться тем, что из самосопряженности в существенном следует, что замыкание оператора T совпадает с T^*. Значит, найдется последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}$ такая, что $f_n \to f$ и $Tf_n \to Tf$ в пространстве $L_{2,\alpha}$, откуда следует $Df_n \to Df$ в пространстве $L_{2,\alpha}$. $\square$

Лемма 2.8. *Если функция f принадлежит пространству Соболева $W^m_{2,\alpha}$, то*

$$(\widehat{D^m f})(\lambda) = (-i\lambda)^m \widehat{f}(\lambda). \tag{2.17}$$

Доказательство. Пусть функции f и Df принадлежат пространству $L_{2,\alpha}$. Докажем, что

$$(\widehat{Df})(\lambda) = (-i\lambda)\widehat{f}(\lambda). \tag{2.18}$$

По следствию 2.2 существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}$, для которой $f_n \to f$ и $Df_n \to Df$ в пространстве $L_{2,\alpha}$, поэтому (2.18) достаточно доказать для $f \in \mathcal{D}$. Заметим, что $\widehat{f}(\lambda) = \langle f(x), e_\alpha(\lambda x)\rangle$ (см. (1.5)), поэтому, используя равенства $De_\alpha(\lambda x) = i\lambda e_\alpha(\lambda x)$ и (1.6), получим

$$(\widehat{Df})(\lambda) = \langle Df(x), e_\alpha(\lambda x)\rangle = -\langle f(x), De_\alpha(\lambda x)\rangle = -i\lambda\langle f(x), e_\alpha(\lambda x)\rangle = -i\lambda\widehat{f}(\lambda),$$

что доказывает (2.18). Равенство (2.17) вытекает из (2.18). $\square$

В следующей лемме будет получено несколько оценок для функций $e_\alpha(x)$, которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 2.9. *Для $x \in \mathbb{R}$ справедливы следующие неравенства*:

1) $|e_\alpha(x)| \le 1$, *причем равенство достигается только при* $x = 0$;
2) $|1 - e_\alpha(x)| \le 2|x|$;
3) $|1 - e_\alpha(x)| \ge c$ *при* $|x| \ge 1$, *где* $c > 0$ — *некоторая постоянная, зависящая только от* α.

Доказательство. Для функции $j_\alpha(x)$ имеется интегральное представление ([13], формула 8.411)

$$j_\alpha(x) = c_1 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha} \cos(x\sin\varphi)\, d\varphi, \tag{2.19}$$

где

$$c_1 = \left(\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi\right)^{-1} = \frac{2\,\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}.$$

Используя формулы (1.3) и (2.19), получим интегральное представление

$$e_\alpha(x) = c_1 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha} \big(\cos(x\sin\varphi) + i\sin\varphi\sin(x\sin\varphi)\big)\, d\varphi.$$

Тогда

$$|e_\alpha(x)| \le c_1 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha} \left(\cos^2(x\sin\varphi) + \sin^2\varphi \sin^2(x\sin\varphi)\right)^{1/2} d\varphi \le$$

$$\le c_1 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi = 1,$$

причем равенство $|e_\alpha(x)| = 1$ достигается только при $x = 0$.

Воспользуемся представлением (1.2) функции $e_\alpha(x)$ и оценками (напр., [7], лемма 3.5)

$$|j_\alpha(x)| \le 1, \quad 1 - j_\alpha(x) \le x^2/2. \tag{2.20}$$

Тогда $|1 - e_\alpha(x)| \le |1 - j_\alpha(x)| + (2\alpha+2)^{-1}|x|\,|j_{\alpha+1}(x)|$. При $|x| \le 1$ из (2.20) следует

$$|1 - e_\alpha(x)| \le \frac{|x|^2}{2} + \frac{1}{2\alpha+2}|x| \le \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2\alpha+2} < 2|x|.$$

При $|x| \ge 1$ из неравенства 1) имеем $|1-e_\alpha(x)| \le 2 \le 2|x|$, т. е. неравенство $|1-e_\alpha(x)| \le 2|x|$ справедливо для любого x.

Из асимптотических формул для функций Бесселя вытекает, что $j_\alpha(x) \to 0$ и $j'_\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$, поэтому, учитывая равенство (1.2), имеем $e_\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Значит, существует такое число $x_0 > 0$, что при $x \ge x_0$ справедливо неравенство $|e_\alpha(x)| \le 1/2$. Пусть $m = \min_{x\in[1,x_0]} |1 - e_\alpha(x)|$. При $x \ge 1$ выполняется неравенство $|1 - e_\alpha(x)| \ge c$, если взять $c = \min\{m, 1/2\}$. □

3. Доказательство теоремы 1

Всюду далее $f(x)$ — произвольная функция из пространства $L_{2,\alpha}$; $c, c_1, c_2, c_3, \ldots$ — положительные постоянные, которые могут зависеть от m и α. Для краткости пусть $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,\alpha}$. В выкладках будет постоянно использоваться равенство Парсеваля (2.2).

Лемма 3.1. *Пусть $f \in W^m_{2,\alpha}$, $t > 0$. Справедливо неравенство*

$$\omega_m(f,t)_{2,\alpha} \le c_1 t^m \|D^m f\|.$$

Доказательство. Пусть $h \in (0,t]$, $\Delta_h^m f = (I - T^h)^m f$ — разность с шагом h. Из свойств (2.11), (2.17) и равенства Парсеваля вытекает

$$\|\Delta_h^m f\| = A\|(1 - e_\alpha(h\lambda))^m \widehat{f}(\lambda)\|, \quad \|D^m f\| = A\|\lambda^m \widehat{f}(\lambda)\|. \tag{3.1}$$

Из (3.1) вытекает равенство

$$\|\Delta_h^m f\| = h^m A \left\| \frac{(1 - e_\alpha(h\lambda))^m}{(h\lambda)^m} \lambda^m \widehat{f}(\lambda) \right\|. \tag{3.2}$$

Из леммы 2.9 следует, что при всех $s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|(1 - e_\alpha(s))^m s^{-m}| \le c_2$, где $c_2 = 2^m$. Из (3.2) и (3.1) вытекает

$$\|\Delta_h^m f\| \le c_2\, h^m A \|\lambda^m \widehat{f}(\lambda)\| = c_2\, h^m \|D^m f\| \le c_2\, t^m \|D^m f\|.$$

Взяв точную верхнюю грань по всем $h \in (0,t]$, получим $\omega_m(f,t)_{2,\alpha} \le c_2 t^m \|D^m f\|$. □

Для любой функции $f \in L_{2,\alpha}$ и любого числа $\nu > 0$ определим функцию

$$P_\nu(f)(x) := A \int_{-\nu}^{\nu} \widehat{f}(\lambda) e_\alpha(\lambda x) |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\lambda)\chi_\nu(\lambda)),$$

где $\chi_\nu(\lambda)$ — характеристическая функция отрезка $[-\nu,\nu]$, $\mathcal{F}^{-1}$ — обратное преобразование Данкля. Легко видеть, что функция $P_\nu(f)$ бесконечно дифференцируемая и принадлежит всем классам $W^m_{2,\alpha}$, $m\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$.

Лемма 3.2. *Для любой функции $f\in L_{2,\alpha}$ справедливо неравенство*

$$\|f-P_\nu(f)\|\le c_3\|\Delta^m_{1/\nu}f\|,\quad \nu>0.$$

Доказательство. Пусть $|1-e_\alpha(t)|\ge c$ при $|t|\ge 1$ (см. лемму 2.9). Используя равенство Парсеваля, получим

$$\|f-P_\nu(f)\|=A\|(1-\chi_\nu(\lambda))\widehat{f}(\lambda)\|=A\left\|\frac{1-\chi_\nu(\lambda)}{(1-e_\alpha(\lambda/\nu))^m}(1-e_\alpha(\lambda/\nu))^m\widehat{f}(\lambda)\right\|. \tag{3.3}$$

Заметим, что

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\frac{1-\chi_\nu(\lambda)}{|1-e_\alpha(\lambda/\nu)|}\le\frac{1}{c^m}.$$

Тогда из (3.3) следует $\|f-P_\nu(f)\|\le c^{-m}A\|(1-e_\alpha(\lambda/\nu))^m\widehat{f}(\lambda)\|=c_3 2\|\Delta^m_{1/\nu}f\|$, где $c_3=c^{-m}$. □

Следствие 3.1. $\|f-P_\nu(f)\|\le c_3\,\omega_m(f,1/\nu)_{2,\alpha}$.

Лемма 3.3. *Справедливо неравенство*

$$\|D^m(P_\nu(f))\|\le c_4\nu^m\|\Delta^m_{1/\nu}f\|,\quad \nu>0,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Используя равенство Парсеваля и соотношение (3.2), получим

$$\|D^m(P_\nu(f))\|=A\|\widehat{D^m(P_\nu(f))}\|=A\|\lambda^m\chi_\nu(\lambda)\widehat{f}(\lambda)\|=$$
$$=A\left\|\frac{\lambda^m\chi_\nu(\lambda)}{(1-e_\alpha(\lambda/\nu))^m}(1-e_\alpha(\lambda/\nu))^m\widehat{f}(\lambda)\right\|. \tag{3.5}$$

Заметим, что

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\frac{\lambda^m\chi_\nu(\lambda)}{|1-e_\alpha(\lambda/\nu)|^m}=\nu^m\sup_{|\lambda|\le\nu}\frac{(\lambda/\nu)^m}{|1-e_\alpha(\lambda/\nu)|^m}=\nu^m\sup_{|t|\le 1}\frac{t^m}{|1-e_\alpha(t)|^m}.$$

Пусть

$$c_4=\sup_{|t|\le 1}\frac{t^m}{|1-e_\alpha(t)|^m},$$

тогда из (3.5) вытекает неравенство (3.4). □

Следствие 3.2. $\|D^m(P_\nu(f))\|\le c_4\,\nu^m\,\omega_m(f,1/\nu)_{2,\alpha}$.

Доказательство теоремы 1. 1°. *Доказательство неравенства*

$$c_5\,\omega_m(f,\delta)_{2,\alpha}\le K_m(f,\delta^m)_{2,\alpha}. \tag{3.6}$$

Пусть $h\in(0,\delta]$, $g\in W^m_{2,\alpha}$. Используя лемму 3.1 и неравенство (2.12), получим

$$\|\Delta^m_h f\|\le\|\Delta^m_h(f-g)\|+\|\Delta^m_h g\|\le 4^m\|f-g\|+c_1h^m\|D^mg\|\le c_6(\|f-g\|+\delta^m\|D^mg\|),$$

где $c_6=\max\{4^m,c_1\}$. Взяв точную верхнюю грань по $h\in(0,\delta]$ и точную нижнюю грань по всевозможным функциям $g\in W^m_{2,\alpha}$, получим $\omega_m(f,\delta)_{2,\alpha}\le c_6K_m(f,\delta^m)_{2,\alpha}$, откуда следует неравенство (3.6).

2°. *Доказательство неравенства*

$$K_m(f,\delta^m)_{2,\alpha}\le c_7\,\omega_m(f,\delta)_{2,\alpha}. \tag{3.7}$$

Так как $P_\nu(f) \in W^m_{2,\alpha}$, то по определению K-функционала

$$K_m(f,\delta^m)_{2,\alpha} \le \|f - P_\nu(f)\| + \delta^m \|D^m(P_\nu(f))\|. \tag{3.8}$$

Используя следствия 3.1 и 3.2, можно продолжить неравенство (3.8):

$$K_m(f,\delta^m)_{2,\alpha} \le c_3\omega_m(f,1/\nu)_{2,\alpha} + c_4(\delta\nu)^m\omega_m(f,1/\nu)_{2,\alpha}.$$

Так как ν — произвольное положительное число, то, взяв $\nu = 1/\delta$, получим (3.7). $\square$

Литература

[1] Butzer P.L., Behrens H. *Semi-groups of operators and approximation.* – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967. – 318 p.

[2] Терехин А.П. *Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение* // Дифференц. уравнения и вычислительная математика. – Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1975. – Вып. 2. – С. 3–28.

[3] Левитан Б.М. *Теория операторов обобщенного сдвига.* – М.: Наука, 1973. – 312 с.

[4] Löfstróm J., Peetre J. *Approximation theorems connected with generalized translations* // Math. Ann. – 1969. – V. 181. – P. 255–268.

[5] Потапов М.К. *О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений* // Вестн. Московск. ун-та. Сер. матем., механика. – 1998. – № 3. – С. 38–48.

[6] Ditzian Z., Totik V. *Moduli of smoothness.* – New York etc.: Springer-Verlag, 1987. – 228 p.

[7] Платонов С.С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций в метрике $L_{2,\alpha}$.* I // Тр. Петрозаводск. ун-та. Сер. Математика. – 2000. – Вып. 7. – С. 70–82.

[8] Платонов С.С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций в метрике $L_{2,\alpha}$.* II // Тр. Петрозаводск. ун-та. Сер. Математика. – 2001. – Вып. 8. – С. 1–17.

[9] Feng Dai. *Some equivalence theorems with K-functionals* // J. Appr. Theory. – 2003. – V. 121. – P. 143–157.

[10] Dunkl C.F. *Differential-difference operators associated to reflection groups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 311. – P. 167–183.

[11] Rösler M. *Dunkl operators: theory and applications* // Lect. Notes in Math. – 2002. – V. 1817. – P. 93–135.

[12] Бейтмен Г., Эрдейн А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. II. – М.: Наука, 1974. – 396 с.

[13] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

[14] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1976. – 544 с.

[15] Salem N.B., Kallel S. *Mean-periodic functions associated with the Dunkl operators* // Integral Transforms Spec. Funct. – 2004. – V. 15. – № 2. – P. 155–179.

[16] Mourou M.A., Triméche K. *Transmutation operators and Paley–Wiener theorem associated with a singular differential-difference operator on the real line* // Anal. Appl., Singap. – 2003. – V. 1. – № 1. – P. 43–70.

[17] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* – М.: Наука, 1979. – 320 с.

[18] Thangavelu S., Xu Yuan. *Convolution and maximal function for Dunkl transform* // J. Anal. Math. – 2005. – V. 97. – P. 25–56.

[19] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 358 с.

Е.С. Белкина

аспирант, кафедра геометрии и топологии,
Петрозаводский государственный университет,
185640, г. Петрозаводск, проспект Ленина, д. 33,

`e-mail:` elena.belkina@gmail.com

С.С. Платонов

профессор, кафедра геометрии и топологии,
Петрозаводский государственный университет,
185640, г. Петрозаводск, проспект Ленина, д. 33,

`e-mail:` platonov@psu.karelia.ru

E.S. Belkina

Postgraduate, Chair of Geometry and Topology,
Petrozavodsk State University,
33 Lenin Ave., Petrozavodsk, 185640 Russia,

`e-mail:` elena.belkina@gmail.com

S.S. Platonov

Professor, Chair of Geometry and Topology,
Petrozavodsk State University,
33 Lenin Ave., Petrozavodsk, 185640 Russia,

`e-mail:` platonov@psu.karelia.ru