ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 7 (530)

УДК 517.95

К.Б. САБИТОВ, Н.В. ЧИГАНОВА

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ СТЕПЕННОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

1. Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \operatorname{sgn} y|y|^n u_{xx} + x^m u_{yy} + \lambda \operatorname{sgn} y x^m |y|^n u = 0, \quad m, n > 0, \tag{1}$$

в области D, ограниченной простой кривой Γ, лежащей в первой четверти с концами в точках $A(1,0)$ и $B(0,b)$, $b > 0$, отрезком OB оси Oy и характеристиками OC и CA уравнения (1) при $x > 0$, $y < 0$, где $O(0,0)$, $C(x_C, y_C)$, $x_C = (1/2)^{1/\alpha}$, $y_C = -(1/2)^{1/\beta}$, $2\alpha = m+2$, $2\beta = n+2$, $p = n/2(n+2)$, $q = m/2(m+2)$.

В области D для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Задача Трикоми (Задача T). Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv g(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma; \tag{4}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le b; \tag{5}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in OC, \tag{6}$$

где $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, ψ, f, φ_1 — заданные достаточно гладкие функции, причем $f(0,b) = \varphi_1(b)$, $\varphi_1(0) = \psi(0,0)$.

Отметим, что задача (2)–(6) для уравнения (1) при $n > m > 0$, $\lambda = 0$ изучена в [1]. В [2] установлен принцип максимума и на его основе получена теорема единственности решения задачи T для уравнения (1) при $\lambda = 0$ и $n > 0$, $m > -n/(n+1)$. В [3] построено решение в виде биортогонального ряда и доказана единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного типа с одной линией изменения типа методом интегральных тождеств. В [4] методом спектрального анализа решена задача Трикоми для уравнения (1) при $m = n > 0$ и $\lambda = 0$. Данная работа является продолжением работ [4]–[6]. Здесь в классе регулярных в области D решений уравнения (1) получена теорема единственности решения задачи (2)–(6) при всех $\lambda \le 0$ и $n = m$, если λ — действительный параметр и при всех

$$4\lambda_2^2 \le -\lambda_1(7(q-p)^2 + 2(p+q)), \quad \lambda_1 \le 0, \quad n > m, \tag{7}$$

если $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. В случае, когда $n = m > 0$, $g(x,y) = \varphi_1(y) = \psi(x,y) = 0$ и кривая Γ совпадает с "нормальной" кривой $\Gamma_0 : x^{2\alpha} + y^{2\alpha} = \alpha^2$, построено решение задачи Трикоми для уравнения (1) на основании теории рядов по собственным функциям соответствующей спектральной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код гранта № 02-01-97901.

Определение. Под регулярным в D решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2), (3), для которой на окружностях $K_{0\delta}$, $K_{1\delta}$ и $K_{2\delta}$ с центрами в точках O, A и B произвольно малого радиуса $\delta > 0$ справедливы неравенства

$$\int_{K_{j\delta}\cap D_+} (y^n|u_x| + x^m|u_y|)dS \le C_j, \quad j = 0,1,2, \tag{8}$$

где постоянные C_j не зависят от δ.

2. Пусть λ — комплексный параметр, $\operatorname{Re} u(x,y) = u_1(x,y)$ и $\operatorname{Im} u(x,y) = u_2(x,y)$. Тогда уравнение (1) равносильно системе уравнений смешанного типа

$$Lu_1 \equiv x^m u_{1_{yy}} + \operatorname{sgn} y|y|^n u_{1_{xx}} + \operatorname{sgn} y|y|^n x^m(\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2) = 0, \tag{9}$$

$$Lu_2 \equiv x^m u_{2_{yy}} + \operatorname{sgn} y|y|^n u_{2_{xx}} + \operatorname{sgn} y|y|^n x^m(\lambda_2 u_1 + \lambda_2 u_2) = 0. \tag{10}$$

Лемма. *Если $u = 0$ на OC и выполнено условие* (7), *то для любого регулярного решения уравнения* (1) *имеет место неравенство*

$$I = \int_0^l t^m\big(u_1(t,0)u_{1_y}(t,0) + u_2(t,0)u_{2_y}(t,0)\big)dt \ge 0.$$

Доказательство. Тождество $\overline{u}Lu \equiv 0$ проинтегрируем по области D_- и, выделяя реальную часть, получим

$$\operatorname{Re}\int_{D_-} \overline{u}Lu\,dx\,dy = \int_{D_-} \big((-y)^n(u_1u_{1_x} + u_2u_{2_x})_x - x^m(u_1u_{1_y} + u_2u_{2_y})_y\big)dx\,dy -$$
$$- \int_{D_-} \big(x^m|u_y|^2 - (-y)^n|u_x|^2 + (-y)^n x^m(\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2)\big)dx\,dy = 0.$$

Отсюда

$$\int_0^l t^m(u_1(t,0)u_{1_y}(t,0) + u_2(t,0)u_{2_y}(t,0))dt =$$
$$= \int_C^A \big(u_1[(-y)^n u_{1_x}dy + x^m u_{1_y}dx] + u_2[(-y)^n u_{2_x}dy + x^m u_{2_y}dx]\big) +$$
$$+ \int_{D_-} [x^m|u_y|^2 - (-y)^n|u_x|^2 + x^m(-y)^n(\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2)]dx\,dy = I_1 + I_2, \tag{11}$$

где

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int_C^A |u|^2\left(\frac{m}{2}x^{\alpha-2}(-y)^{\beta-1}dx - \frac{n}{2}x^{\alpha-1}(-y)^{\beta-2}dy\right) = \frac{1}{2}\int_C^A |u|^2(-y)^{2\beta-2}x^{2\alpha-2}(2n-m)dy \ge 0.$$

В уравнениях (9) и (10) перейдем к характеристическим координатам

$$\xi = \frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}} - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}}, \quad \eta = \frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} \tag{12}$$

и найдем

$$u_{1_\eta} = \frac{\eta^2-\xi^2}{\xi(p+q)+\eta(p-q)}\left(u_{1_{\xi\eta}} + \frac{\xi(p-q)+\eta(p+q)}{\eta^2-\xi^2}u_{1_\xi} + \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2\right),$$
$$u_{2_\eta} = \frac{\eta^2-\xi^2}{\xi(p+q)+\eta(p-q)}\left(u_{2_{\xi\eta}} + \frac{\xi(p-q)+\eta(p+q)}{\eta^2-\xi^2}u_{2_\eta} + \lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2\right).$$

При этом область D_- перейдет соответственно в область $\Delta = \{(\xi,\eta) \mid 0 < \xi < \eta < l\}$, $l = 2/(m+2)$. Интеграл I_2 из (11) в характеристических координатах (12) принимает вид

$$I_2 = \left(\frac{m+2}{2}\right)^{2q}\left(\frac{n+2}{2}\right)^{2p}\int_\Delta (\eta+\xi)^{2q}(\eta-\xi)^{2p}\big(-4(u_{1_\xi}u_{1_\eta} + u_{2_\xi}u_{2_\eta}) + \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2\big)d\xi\,d\eta. \tag{13}$$

Обозначим $A_{k,l}(\xi,\eta)=\frac{2(\eta+\xi)^k(\eta-\xi)^l}{p(\xi+\eta)-q(\eta-\xi)}$. Подставляя выражение u_{1_η} и u_{2_η} в интеграл (13), получим

$$I_2=\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2q+1}\left(\frac{n+2}{2}\right)^{2p+1}\Bigl(\int_\Delta\bigl[-(A_{2q+1,2p+1}(\xi,\eta)|u_\xi|^2)_\eta+\lambda_1(A_{2q+1,2p+1}(\xi,\eta)|u|^2)_\xi\bigr]d\xi\,d\eta+$$
$$+\int_\Delta\Bigl((A_{q+1,p+1}(\xi,\eta)\lambda_2u_2+u_{1_\xi}(\eta-\xi)^q(\eta+\xi)^p)^2+(A_{q+1,p+1}(\xi,\eta)\lambda_2u_1-u_{2_\xi}(\eta-\xi)^q(\eta+\xi)^p)^2+$$
$$+\frac{1}{4}A^2_{q,p}(\xi,\eta)|u_\xi|^2\bigl[(\xi+\eta)^2(3p^2+2p)-(\eta-\xi)^2(5q^2+2q)+2pq(\eta^2-\xi^2)\bigr]+$$
$$+\frac{1}{4}A^2_{q,p}(\xi,\eta)u_1^2\bigl[\lambda_1\bigl(-(7p^2+2p)(\eta+\xi)^2-(7q^2+2q)(\eta-\xi)^2+14pq(\eta^2-\xi^2)\bigr)-4\lambda_2^2(\eta^2-\xi^2)^2\bigr]+$$
$$+\frac{A^2_{q,p}(\xi,\eta)u_2^2}{p(\xi+\eta)-q(\eta-\xi)}\bigl[2\lambda_1\bigl(8pq(\eta^2-\xi^2)-(4q^2+q)(\eta-\xi)^2-$$
$$-(4p^2+p)(\eta+\xi)^2\bigr)-4\lambda_2^2(\eta^2-\xi^2)^2+\lambda_2(p(\xi+\eta)-q(\eta-\xi))^2\bigr]\Bigr)d\xi\,d\eta\Bigr).\quad(14)$$

Применяя формулу Грина к первому интегралу правой части равенства (14) и учитывая граничное условие $u=0$ на OC, имеем

$$-\int_\Delta\bigl((A_{2q+1,2p+1}(\xi,\eta)|u_\xi|^2)_\eta-\lambda_1(A_{2q+1,2p+1}(\xi,\eta)|u|^2)_\xi\bigr)d\xi\,d\eta=-\lambda\int_0^l A_{2q+1,2p+1}(\xi,1)|u_\xi(\xi,1)|^2d\xi\geq 0,$$

если $p>q$ $(n>m)$ и $\lambda_1\leq 0$.

Второй интеграл в равенстве (14) будет неотрицателен, если выполнены следующие условия:

$$(\xi+\eta)^2(3p^2+2p)-(\eta-\xi)^2(5q^2+2q)+2pq(\eta^2-\xi^2)\geq 0,\quad(15)$$
$$\lambda_1\bigl[(7p^2+2p)(\eta+\xi)^2+(7q^2+2q)(\eta-\xi)^2-14pq(\eta^2-\xi^2)\bigr]+4\lambda_2^2(\eta^2-\xi^2)^2\leq 0,\quad(16)$$
$$2\lambda_1\bigl[-8pq(\eta^2-\xi^2)+(4q^2+q)(\eta-\xi)^2+(4p^2+p)(\eta+\xi)^2\bigr]+$$
$$+4\lambda_2^2(\eta^2-\xi^2)^2-\lambda_2(p(\xi+\eta)-q(\eta-\xi))^2\leq 0.\quad(17)$$

Условие (15) в области Δ выполнено при $p\geq q$. В (16) и (17) выражения, стоящие в квадратных скобках, положительны в Δ. Условие (16) верно при (7), а условие (17) — при $(8\lambda_2-(p-q)^2)^2-(p-q)^4\leq-16\lambda_1(4(p-q)^2+p+q)$, $\lambda_2\geq 0$ и $\lambda_1\leq 0$. Отсюда следует, что все три условия (15)–(17) выполнены в Δ при (7). Тем самым, $I\geq 0$. $\square$

Теорема 1. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1) *существует решение задачи* (2)–(6)*, то оно единственно при условии* (7).

Доказательство. Рассмотрим уравнение (1) в области D_+. Вырежем из области D_+ круги радиуса δ с центрами соответственно в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,b)$ и оставшуюся часть области обозначим D_+^δ. Проинтегрируем тождество $\overline{u}Lu=0$ по области D_+^δ, применяя формулу Грина и учитывая граничные условия $u(0,y)=0$, $u=0$ на Γ, получим

$$\int_0^1 x^m(u_1(x,0)u_{1_y}(x,0)+u_2(x,0)u_{2_y}(x,0))dx+$$
$$+\int_\Gamma u(y^n(u_1u_{1_x}+u_2u_{2_x})dy-x^m(u_1u_{1_y}+u_2u_{2_y})dx)+$$
$$+\int_{K_{j\delta}\cap D_+}(y^n(u_1u_{1_x}+u_2u_{2_x})+x^m(u_1u_{1_y}+u_2u_{2_y}))dx\,dy+$$
$$+\int_{D_+^\delta}\bigl[x^m|u_y|^2+y^n|u_x|^2-\lambda_1x^my^n|u|^2\bigr]dx\,dy=0.\quad(18)$$

С учетом (8) в равенстве (18), переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$\int_0^1 x^m(u_1(x,0)u_{1_y}(x,0)+u_2(x,0)u_{2_y}(x,0))dx+\int_{D_+}[x^m|u_y|^2+y^n|u_x|^2-\lambda_1 x^m y^n|u|^2]dx\,dy=0. \tag{19}$$

По лемме первый интеграл, стоящий слева в равенстве (19), не отрицателен, второй интеграл по области D_+ также неотрицателен, когда $\lambda_1 \le 0$. Из (19) следует, что $u_x = u_y \equiv 0$ в области D_+, т. е. $u \equiv \mathrm{const} = C$ в D_+. Поскольку $u=0$ на Γ и $u \in C(\overline{D_+})$, то $C=0$. Значит, $u(x,y)\equiv 0$ в замкнутой области $\overline{D_+}$, тогда $u(x,0)=u_y(x,0)\equiv 0$. В силу единственности решения задачи Коши или Дарбу получили $u(x,y)\equiv 0$ в области D_-. $\square$

Отметим, что для действительного параметра λ, т. е. при $\lambda_2 = 0$ и $n=m$ теорема 1 остается в силе. Единственность в этом случае доказывается на основании принципа максимума. В области D_- уравнение (1) в характеристических координатах (12) имеет вид

$$u_{\xi\eta}+\frac{2q\eta}{\eta^2-\xi^2}u_\xi+\frac{2q\xi}{\eta^2-\xi^2}u_\eta+\lambda u=0. \tag{20}$$

На основании результатов работы [2] для доказательства единственности достаточно показать справедливость условий

$$h\ge 0,\quad I=\alpha_1(P)+\int_{PQ}\beta_1(t,\eta)\gamma(t,\eta)dt>0 \tag{21}$$

в области $\overline{\Delta}\setminus\overline{O'A'}$ для уравнения (20), где $\beta_1 = \exp\Big(\int\beta d\xi\Big)$, $\alpha_1=\beta_1\alpha$, $h=\alpha_\xi+\alpha\beta-\gamma$, $P\in\overline{O'A'}\setminus A'$, $Q\in\Delta\bigcup O'A'$, точки A', O' и C' — образы точек A, O и C при отображении (12).

Для уравнения (20) $\alpha=\frac{2q\eta}{\eta^2-\xi^2}$, $\beta=\frac{2q\xi}{\eta^2-\xi^2}$, $\gamma=\lambda$, $h=\frac{4\xi\eta}{(\eta^2-\xi^2)^2}(q+q^2)-\lambda$.

Легко заметить, что $h\ge 0$ при $\lambda\le 0$. Покажем выполнение второго условия из (21). Рассмотрим левую часть этого условия $I=\frac{2q}{\eta}+\lambda\int\limits_0^\xi(\eta^2-t^2)^{-q}dt$. Последний интеграл вычислим и оценим на основании формулы ([7], с. 25)

$$I=2q/\eta+\lambda\xi\eta^{-2q}F(1/2,q,3/2;\xi^2/\eta^2)\ge 2q/l+\lambda l^{1-2q}F(1/2,q,3/2;1)>0,$$

где $F(\cdot)$ — гипергеометрическая функция. Отсюда при $-\frac{2ql^{2q-2}}{F(1/2,q,3/2;1)}=-\lambda_0^2<\lambda\le 0$ выполнены условия (21), следовательно, для уравнения (1) при $m=n$ и $-\lambda_0^2<\lambda\le 0$ имеет место принцип максимума [2]. Отсюда вытекает единственность решения задачи T в классе регулярных в области D решений уравнения (1). Если $\lambda\le-\lambda_0^2$, то в уравнении (1) произведем замену переменных: $x_1=ax$, $y_1=ay$, $a=\mathrm{const}>0$. Тогда имеем

$$L(u)\equiv\operatorname{sgn}y_1|y_1|^m u_{x_1x_1}+x_1^m u_{y_1y_1}+\lambda_1\operatorname{sgn}y_1 x_1^m|y_1|^m u=0, \lambda_1=\lambda/a^{-m-1}.$$

Постоянную a возьмем настолько большой, чтобы $\lambda_1\in(-\lambda_0^2,0)$. Итак, при $n=m$ справедлива теорема единственности при $\lambda\le 0$.

3. Предположим, что кривая Γ совпадает с нормальной кривой Γ_0: $x^{2\alpha}+y^{2\alpha}=\alpha^2$ и $\varphi_1(y)=\psi(x,y)\equiv 0$, $g(x,y)=0$, $n=m$. В области D_+ введем новые переменные $x=(\alpha r)^{1/\alpha}\cos^{1/\alpha}\varphi$, $y=(\alpha r)^{1/\alpha}\sin^{1/\alpha}\varphi$. В координатах (r,φ) уравнение (1) примет вид

$$v_{rr}+\frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r^2}(-2q\operatorname{tg}\varphi+2q\operatorname{ctg}\varphi)v_\varphi+\frac{1}{r}(1+4q)v_r+\lambda v=0, \tag{22}$$

где $v(r,\varphi)=u((\alpha r)^{1/\alpha}\cos^{1/\alpha}\varphi,(\alpha r)^{1/\alpha}\sin^{1/\alpha}\varphi)$, $2q=(\alpha-1)/\alpha$.

В уравнении (22), разделяя переменные $v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$R''(r)+\frac{1}{r}(1+4q)R'(r)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\right)R(r)=0,\quad 0<r<1, \tag{23}$$

$$R(0)=0,\quad R(1)=0, \tag{24}$$

$$\Phi''(\varphi)+2q(\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi)\Phi'(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\pi/2, \tag{25}$$

где μ — произвольная постоянная.

Решением уравнения (23), удовлетворяющим условиям (24), является функция ([7], с. 401)

$$R(r)=(\sqrt{\lambda}r)^{-2q}J_{2\rho}(\sqrt{\lambda}r), \tag{26}$$

где $J_{2\rho}(\cdot)$ — функция Бесселя 1-го рода, $2\rho=\sqrt{4q^2+\mu^2}$.

Найдем общее решение уравнения (25). Для этого в уравнении (25) сделаем замену $x=\sin^2\varphi$. Получим

$$x(1-x)F''(x)+\left(\frac{1}{2}+q-(1+2q)x\right)F'(x)+\frac{\mu^2}{4}F(x)=0 \tag{27}$$

— известное гипергеометрическое уравнение ([7], с. 69) с коэффициентами $a=q+\rho$, $b=q-\rho$, $c=1/2+q\notin Z$. Тогда общее решение уравнения (25) определяется по формуле

$$\Phi(\varphi)=C_1F(q+\rho,q-\rho,1/2+q;\sin^2\varphi)+ \\ +C_2\sin^{1-2q}\varphi F(1/2+\rho,1/2-\rho,3/2-q;\sin^2\varphi),\quad 0<\varphi<\pi/2, \tag{28}$$

где C_1, C_2 — произвольные константы. На основании (26) и (27) множество частных решений уравнения (1) в области D_+ в полярных координатах (r,φ) имеет вид

$$u(x,y)=v(r,\varphi)=(\sqrt{\lambda}r)^{-2q}J_{2\rho}(\sqrt{\lambda}r)[C_1F(q+\rho,q-\rho,1/2+q;\sin^2\varphi)+ \\ +C_2\sin^{1-2q}\varphi F(1/2+\rho,1/2-\rho,3/2-q;\sin^2\varphi)], \tag{29}$$

где $2\rho=\sqrt{4q^2+\mu^2}$.

Уравнение (1) в области D_- с новыми переменными $\sigma=\sqrt{(x^\alpha/\alpha)^2-((-y)^\alpha/\alpha)^2}$, $\theta=-\frac{(-y)^{2\alpha}}{x^{2\alpha}-(-y)^{2\alpha}}$ примет вид

$$\sigma^2W_{\sigma\sigma}+(1+4q)\sigma W_\sigma+4\theta(1-\theta)W_{\theta\theta}+2(1+2q-2(1+2q)\theta)W_\theta+\sigma^2\lambda W=0. \tag{30}$$

Разделяя переменные $u(x,y)=W(\sigma,\theta)=G(\sigma)Q(\theta)$ в уравнении (30), получим

$$G''(\sigma)+\frac{1}{\sigma}(1+4q)G'(\sigma)+\left(\lambda-\frac{\mu_1^2}{\sigma^2}\right)G(\sigma)=0, \tag{31}$$

$$\theta(1-\theta)Q''(\theta)+\left(\frac{1}{2}+q-(1+2q)\theta\right)Q'(\theta)+\frac{\mu_1^2}{4}Q(\theta)=0, \tag{32}$$

где μ_1 — произвольная постоянная. Решение уравнения (31) имеет вид ([7], с. 143)

$$G(\sigma)=(\sqrt{\lambda}\sigma)^{-2q}J_{2\rho_1}(\sqrt{\lambda}\sigma),$$

где $J_{\rho_1}(\cdot)$ — функция Бесселя 1-го рода, $2\rho_1=\sqrt{4q^2+\mu_1^2}$. Уравнение (32), как и уравнение (27), представляет собой гипергеометрическое уравнение с коэффициентами $a=q+\rho_1$, $b=q-\rho_1$,

$c = 1/2 + q \notin Z$. Его решениями будут функции

$$Q_1(\theta) = F(a, b, c; \theta) = (1-\theta)^{-b} F\left(c-a, b, c; \frac{\theta}{\theta-1}\right),$$
$$Q_2(\theta) = (1-\theta)^{-a} F\left(a, c-b, a-b+1; \frac{1}{\theta-1}\right).$$

На характеристике OC, т.е. при $\theta \to -\infty$, решение уравнения (1) должно обращаться в нуль. Таким же свойством обладает функция $Q_2(\theta)$. Тогда решение уравнения (1) в области D_-, равное нулю на характеристике OC, имеет вид

$$u(x,y) = W(\sigma,\theta) = C_3(\sqrt{\lambda}\sigma)^{-2q}(1-\theta)^{-q-\rho_1} J_{2\rho_1}(\sqrt{\lambda}\sigma) F\left(q+\rho_1, \rho_1+1/2, \rho_1+1; \frac{1}{1-\theta}\right), \quad (33)$$

где C_3 — произвольная постоянная.

В области D ищем решение $u(x,y)$ в классе $C(\overline{D}) \cap C^1(D)$. Поэтому функция $u(x,y)$ должна удовлетворять условиям склеивания

$$u(x, 0+0) = u(x, 0-0), \quad (34)$$
$$u_y(x, 0+0) = u_y(x, 0-0). \quad (35)$$

В силу (29) и (33) имеем

$$u(x, 0+0) = C_1(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)^{-q-p} J_{2\rho}(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha),$$
$$u(x, 0-0) = C_3(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)^{-q-p} J_{2\rho_1}(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha) F(q+\rho_1, \rho_1+1/2, 2\rho_1+1; 1).$$

Тогда с учетом (34)

$$C_1 = C_3 F(q+\rho_1, \rho_1+1/2, 2\rho_1+1; 1).$$

На основании формулы ([7], с. 73) $F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$, $c \neq 0, -1, -2$, $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$, получим

$$C_3 = C_1 \frac{\Gamma(1-q+\rho_1)\Gamma(\rho_1+1/2)}{\Gamma(2\rho_1+1)\Gamma(1/2-q)}. \quad (36)$$

Пользуясь правилом дифференцирования гипергеометрической функции ([7], с. 110) из (33), вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C_3(\sqrt{\lambda})^{-2q}(x^\alpha/\alpha)^{-2q-2\rho_1}\Bigg(\bigg(\frac{\rho_1}{\alpha}((x^\alpha/\alpha)^2 - ((-y)^\alpha/\alpha)^2)^{\rho_1-1} \times$$
$$\times (-y)^{2\alpha-1} J_{2\rho_1}[\sqrt{\lambda}\sqrt{(x^\alpha/\alpha)^2 - ((-y)^\alpha/\alpha)^2}\,] + \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}((x^\alpha/\alpha)^2 - ((-y)^\alpha/\alpha)^2)^{\rho_1-1/2}(-y)^{2\alpha-1} \times$$
$$\times J'_{2\rho_1}[\sqrt{\lambda/}\alpha\sqrt{x^{2\alpha}-(-y)^{2\alpha}}\,]\bigg) F\left(q+\rho_1, \rho_1+1/2, \rho_1+1; \frac{1}{1-\theta}\right) +$$
$$+ \frac{(2q+\rho_1)(1+\rho_1)}{2(\rho_1+1)\alpha}((x^\alpha/\alpha)^2 - ((-y)^\alpha/\alpha)^2)^{\rho_1}(x^\alpha/\alpha)^{-2}(-y)^{2\alpha-1} \times$$
$$\times J_{2\rho_1}[\sqrt{\lambda/}\alpha\sqrt{x^{2\alpha}-(-y)^{2\alpha}}\,] F\left(q+\rho_1+1, \rho_1+3/2, \rho_1+2; \frac{1}{1-\theta}\right)\Bigg).$$

Отсюда на основании формулы ([7], с. 113)

$$F\left(a, c-b, a+1-b; \frac{1}{1-\theta}\right) = (1-\theta)^{c-1}(-\theta)^{1-c} F\left(a+1-c, 1-b, a+1-b; \frac{1}{1-\theta}\right)$$

следует

$$u_y(x,0-0)=C_3(\sqrt{\lambda})^{-2q}\alpha^{2q}(x^\alpha/\alpha)^{-1}J_{2\rho_1}(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)(q+\rho_1)\frac{\Gamma(2\rho_1+2)\Gamma(q+1/2)}{\Gamma(q+\rho_1+1)\Gamma(\rho_1+3/2)}. \tag{37}$$

Теперь найдем производную $u_y(x,y)$ из (29) и вычислим предел

$$u_y(x,0+0)=\lim_{y\to 0+0}\frac{\partial u}{\partial y}=-\alpha^{2q}r^{2q}\lim_{\varphi\to 0+0}\sin^{2q}\varphi\Big(R'\Phi\sin\varphi+\frac{1}{r}\cos\varphi\Phi' R\Big),$$

где

$$\Phi'(\varphi)=C_1\frac{2(q^2-\rho^2)}{1+2q}\sin 2\varphi F(q+\rho+1,q-\rho+1,3/2+q;\sin^2\varphi)+$$
$$+C_2(1-2q)\sin^{-2q}\varphi\cos\varphi F(\rho+1/2,1/2-\rho,3/2-q;\sin^2\varphi)+$$
$$+C_2\sin 2\varphi\sin^{1-2q}\varphi\frac{1-4\rho^2}{2(3-2q)}F(3/2+\rho,3/2-\rho,5/2-q;\sin^2\varphi),$$
$$R'(r)=-2q(\sqrt{\lambda}r)^{-2q-1}\sqrt{\lambda}J_{2\rho}(\sqrt{\lambda}r)+(\sqrt{\lambda}r)^{-2q}\sqrt{\lambda}J'_{2\rho}(\sqrt{\lambda}r).$$

Отсюда имеем

$$u_y(x,0+0)=-\alpha^{2q}C_2(1-2q)(\sqrt{\lambda})^{-2q}(x^\alpha/\alpha)^{-1}J_{2\rho}(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha). \tag{38}$$

Подставляя (37) и (38) в равенство (35), найдем

$$C_2=\frac{2C_3}{1-2q}\frac{\Gamma(2\rho_1+1)\Gamma(q+1/2)}{\Gamma(q+\rho_1)\Gamma(\rho_1+1/2)}. \tag{39}$$

Из условия (5) имеем

$$u(0,y)=(\sqrt{\lambda}r)^{-2q}J_{2\rho}(\sqrt{\lambda}r)\left(C_1\frac{\cos\rho\pi}{\cos q\pi}+C_2\frac{2\Gamma^2(1/2-q)}{\alpha\Gamma(1-q-\rho)\Gamma(1-q+\rho)}\right)=0. \tag{40}$$

Таким образом, для нахождения неизвестных постоянных C_1, C_2, C_3, ρ, ρ_1 получена система уравнений (36) и (39), (40). Отсюда с учетом формул

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z,\quad \Gamma(1/2+z)\Gamma(1/2-z)=\pi/\cos\pi z, \tag{41}$$

получим тригонометрическое уравнение $\operatorname{tg}\rho\pi=-\frac{1+\sin q\pi}{\cos q\pi}$, из которого находим

$$\rho=\rho_1=\rho_n=-q/2+3/4+n,\quad n=0,1,2,\dots, \tag{42}$$
$$C_1=C_2(1/2-q)\frac{\Gamma(q+\rho_n)\Gamma(1/2-q)}{\Gamma(1-q+\rho_n)\Gamma(1/2+q)},\quad C_3=C_2(1/2-q)\frac{\Gamma(q+\rho_n)\Gamma(\rho_n+1/2)}{\Gamma(2\rho_n+1)\Gamma(1/2+q)}.$$

С учетом найденных значений C_1, C_3 и ρ_n преобразуем функцию $\Phi_n(\varphi)$. На основании формул ([7], сс. 144, 148) для гипергеометрических функций из (28) при $0<\varphi<\pi/2$, получим следующее представление:

$$F(q+\rho_n,q-\rho_n,q+1/2;\sin^2\varphi)=\Gamma\Big(1/2+q\Big)\Big(\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big)^{1/2-q}\mathrm{P}^{1/2-q}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi), \tag{43}$$

$$F(1/2+\rho_n,1/2-\rho_n,3/2-q;\sin^2\varphi)=\Gamma(3/2-q)(\operatorname{tg}\varphi)^{q-1/2}\mathrm{P}^{q-1/2}_{-\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi)=$$
$$=\Gamma(3/2-q)(\operatorname{tg}\varphi)^{q-1/2}\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi), \tag{44}$$

где $\mathrm{P}^\mu_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Лежандра.

Тогда после подстановки (43) и (44) в выражение для $\Phi_n(\varphi)$ получаем

$$\Phi_n(\varphi) = \frac{C_2}{2\alpha}\Gamma(1/2-q)\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{1/2-q}\left[\frac{\Gamma(\rho_n+q)}{\Gamma(\rho_n-q+1)}\mathrm{P}^{1/2-q}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi)+\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi)\right]. \quad (45)$$

В силу формулы ([7], с. 145)

$$\Gamma(\nu+\mu+1)\mathrm{P}^{-\mu}_{\nu}(x) = \Gamma(\nu-\mu+1)\left[\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)\cos(\mu\pi)-\frac{2}{\pi}\sin(\mu\pi)\mathrm{Q}^{\mu}_{\nu}(x)\right]$$

имеем

$$\mathrm{P}^{1/2-q}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi) = \frac{\Gamma(\rho_n-q+1)}{\Gamma(\rho_n+q)}\left[\sin(\pi q)\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi)-\frac{2}{\pi}\cos(\pi q)\mathrm{Q}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi)\right].$$

С учетом последнего равенства выражение (45) примет вид

$$\Phi_n(\varphi) = \frac{C_2}{2\alpha}\Gamma(1/2-q)\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{1/2-q}\times$$
$$\times\left[(1+\sin(\pi q))\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi)+\frac{2}{\pi}\cos(\pi q)\mathrm{Q}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi)\right]. \quad (46)$$

На основании формулы ([7], с. 145)

$$\mathrm{Q}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi) = \frac{\pi \mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(-\cos 2\varphi)}{2\sin(\pi\rho_n+\pi q)}+\frac{\pi}{2}\,\mathrm{ctg}(\pi\rho_n+\pi q)\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi)$$

правая часть равенства (46) преобразуется к виду

$$\Phi_n(\varphi) = \frac{C_2\cos(\pi q)}{2\alpha}\Gamma(1/2-q)\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{1/2-q}\times$$
$$\times\left[\frac{\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(-\cos 2\varphi)}{\sin(\pi\rho_n+\pi q)}+\left(\frac{1+\sin(\pi q)}{\cos(\pi q)}+\mathrm{ctg}(\pi\rho_n+\pi q)\right)\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(\cos 2\varphi)\right].$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{1+\sin(\pi q)}{\cos(\pi q)}+\mathrm{ctg}(\pi\rho_n+\pi q) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi q}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{ctg}(\pi\rho_n+\pi q) =$$
$$= \frac{\cos(\pi\rho_n+\pi/4-\pi q/2)}{\cos(\pi q/2+\pi/4)\sin(\pi\rho_n-\pi q)} = 0,$$

т. к. $\rho=\rho_n=n-q/2+3/4$.

Таким образом, частные решения уравнения (1) в области D_+ имеют вид

$$u_n(x,y) = V_n(r,\varphi) = c_n(\sqrt{\lambda}r)^{-2q}J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda}r)\sin^{1/2-q}2\varphi\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(-\cos 2\varphi),$$

где c_n — произвольные постоянные.

Используя функции $u_n(x,y)$, решение задачи (2)–(6) в области D_+ будем искать в виде суммы равномерно сходящегося на $\overline{D_+}$ ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\sqrt{\lambda}r)^{-2q}J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda}r)\sin^{1/2-q}2\varphi\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(-\cos 2\varphi), \quad (47)$$

где $\lambda\neq\lambda_{n,m}$, $\lambda_{n,m}$ — собственные значения спектральной задачи [6]. При $r=1$ из (47) на основании граничного условия (4) имеем

$$f\big((\alpha r\cos\varphi)^{1/\alpha},(\alpha r\sin\varphi)^{1/\alpha}\big)|_{r=1} = f_1(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\sin^{1/2-q}2\varphi\mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(-\cos 2\varphi), \quad (48)$$

где $f_n = c_n(\sqrt{\lambda})^{-2q} J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda})$. В равенстве (48) сделаем замену $\pi - 2\varphi = \psi$, $0 \le \psi \le \pi$:

$$f_1\left(\frac{\pi-\psi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin^{1/2-q}\psi \mathrm{P}^{q-1/2}_{\rho_n-1/2}(-\cos\psi). \tag{49}$$

Согласно формуле Мелера–Дирихле ([7], с. 140)

$$\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(\cos\psi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\sin\psi)^{\mu}}{\Gamma(1/2-\mu)}\int_0^{\psi}(\cos v - \cos t)^{-\mu-1/2}\cos[(\nu+1/2)v]dv,$$

$0 < t < \pi$, $\operatorname{Re}\mu \le 1/2$, ряд (49) имеет вид

$$f_1\left(\frac{\pi-\psi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\Gamma(1-q)}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \int_0^{\psi}(\cos v - \cos t)^{-q}\cos(\rho_n v)dv. \tag{50}$$

Поменяем справа в (50) порядок суммирования и интегрирования

$$f_1\left(\frac{\pi-\psi}{2}\right) = k_1\int_0^{\psi}(\cos v - \cos\psi)^{-q}F(v)dv, \tag{51}$$

где $k_1 = \sqrt{2/\pi}/\Gamma(1-q)$, $F(v) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \cos\left[(n - q/2 + 3/4)v\right]$.

Найдем решение интегрального уравнения (51) относительно функции $F(v)$. После замены $\cos\psi = z$, $\cos v = t$ уравнение (51) примет вид $\overline{f}_1(z) = k_1 \int\limits_z^1 \frac{F(\arccos t)dt}{\sqrt{1-t^2}(t-z)^q}$, $-1 \le z \le 1$. Если

$$\overline{f}_1(z) = f_1\left(\frac{\pi - \arccos z}{2}\right) \in C^1[-1,1], \quad \overline{f}_1(1) = 0, \tag{52}$$

то решением интегрального уравнения Абеля является функция ([4], с. 11)

$$F(\arccos z) = -\frac{\sin\pi q\sqrt{1-z^2}}{k_1\pi}\int_z^1\frac{\overline{f}_1'(t)dt}{(t-z)^{1-q}}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cos\left[(n-q/2+3/4)\arccos z\right] = -\frac{\sin\pi q\sqrt{1-z^2}}{k_1\pi}\int_z^1\overline{f}_1'(t)(t-z)^{q-1}dt = \widetilde{F}(z). \tag{53}$$

Рассмотрим следующую систему синусов: $\{\sin[(n-q/2-5/4)v+\pi/2]\}_{n=1}^{\infty} = \{\cos[(n-q/2-1/4)v]\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда ряд (53) является биортогональным разложением функции $F_1(\psi)$ по этой системе, причем первое слагаемое f_0 равно нулю, а остальные коэффициенты f_n вычисляются по формулам [8]

$$f_n = \frac{\sin\pi q}{k_1\pi}\int_0^{\pi} h^s_{n+1}(\theta)F(\theta)d\theta, \tag{54}$$

$$h^s_n(\theta) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos(\theta/2))^{-5/2-q}}{\operatorname{tg}\theta/2}\sum_{i=1}^{n}\sin i\theta B_{n-i}, \quad F(\theta) = \frac{\sin\pi q}{qk_1\pi}\sin\theta\int_0^{\theta} f_1'\left(\frac{\pi-t}{2}\right)(\cos t - \cos\theta)^{q-1}dt,$$

$$B_l = \sum_{m=0}^{l} C_1^{l-m}C^m_{3/2+q}(-1)^{l-m}, \quad C^m_n = n(n-1)\cdots(n-m+1)/m!.$$

Покажем, что действительно при условии

$$\int_0^{\pi} f'\left(\frac{\pi-v}{2}\right)\left(\cos\frac{v}{2}\right)^{q-1/2}dv = 0 \tag{55}$$

первый коэффициент $f_0 = 0$:

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{(\cos\theta/2)^{q+1/2}} \int_0^\theta f'\Big(\frac{\pi - v}{2}\Big)(\cos v - \cos\theta)^{q-1} dv =$$
$$= \int_0^\pi f'\Big(\frac{\pi - v}{2}\Big) dv \int_v^\pi \sin\theta \Big(\cos\theta/2\Big)^{-q-1/2} (\cos v - \cos\theta)^{q-1} d\theta.$$

Произведя замену $\cos\theta = t - 1$, получим

$$I = 2\int_0^\pi f'\Big(\frac{\pi - v}{2}\Big) dv \int_0^{1+\cos v} (t/2)^{-q/2-1/4} (\cos v - t + 1)^{q-1} dt.$$

Полагая $t = 2\xi \cos^2 \frac{v}{2}$, имеем

$$I = 2^{3/2+q} \int_0^\pi f'\Big(\frac{\pi - v}{2}\Big)\Big(\cos\frac{v}{2}\Big)^{q-1/2} dv \int_0^1 \xi^{-q/2-1/4}(1-\xi)^{q-1} d\xi =$$
$$= 2^{3/2+q} B(q, 3/4 - q/2) \int_0^\pi f'\Big(\frac{\pi - v}{2}\Big)\Big(\cos\frac{v}{2}\Big)^{q-1/2} dv = 0.$$

Изучим сходимость ряда (47). Согласно результатам [8] ряд в левой части равенства (53) сходится равномерно на $[-1,1]$ к функции $\widetilde{F}(z)$, если она принадлежит классу Гёльдера $H^\gamma[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$, $\widetilde{F}(1) = 0$. Если $p > 1/(1-q)$, $\overline{f}_1'(t) \in L_p[-1,1]$, то в силу теоремы ([9], с. 65) функция $\widetilde{F}(z)$ принадлежит $H^{1-q-1/p}[-1,1]$.

Условия (52) будут выполнены, если $f_1(\varphi) \in C^1[0,\pi/2]$, $f_1(\pi/2) = 0$, $p \in ((1-q)^{-1}, (1-2q)^{-1})$, поэтому ряд (53) сходится равномерно. Биортогональная система $h_n^s(\theta)$ равномерно ограничена по n, следовательно, коэффициенты f_n равномерно ограничены по n, поэтому ряд (47) при $r \le 1$ сходится равномерно. Так же равномерно при $r < 1$ сходятся ряды, полученные путем дифференцирования ряда (47) по переменным r и φ любое число раз. Поэтому ряд (47) является решением задачи в области D_+.

Решение уравнения (1) в гиперболической области будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n f_n \Big(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\sqrt{x^{2\alpha} - y^{2\alpha}}\Big)^{-2q} J_{2\rho_n}\Big(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\sqrt{x^{2\alpha} - y^{2\alpha}}\Big) \times$$
$$\times \Big(\frac{x^{2\alpha}}{x^{2\alpha} - y^{2\alpha}}\Big)^{-q-\rho_n} F\Big(q + \rho_n, 1/2 + \rho_n, 1 + 2\rho_n; \frac{x^{2\alpha} - y^{2\alpha}}{x^{2\alpha}}\Big), \quad (56)$$

где f_n — коэффициенты, найденные из эллиптической области.

Потребуем совпадения значений функций (47) и (56) при $y = 0$. Для этого из (47) имеем

$$\tau_+(x) = u(x, 0+0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\sqrt{\lambda} r)^{-2q} J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda} r) \big[(\sin 2\varphi)^{\frac{1}{2}-q} P^{q-\frac{1}{2}}_{\rho_n - \frac{1}{2}}(-\cos 2\varphi)\big]\big|_{\varphi=0}.$$

Используя асимптотическое разложение функции Лежандра при $\varphi \to 0$

$$P^{q-\frac{1}{2}}_{\rho_n - \frac{1}{2}}(-\cos 2\varphi) \sim \frac{\Gamma(1/2 - q)\sin^{q-1/2}\varphi}{\Gamma(1 + \rho_n - q)\Gamma(1 - q - \rho_n)},$$

получим

$$\tau_+(x) = 2^{1/2-q}(-1)^{1/4-q/2}\Gamma(1/2-q)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f_n(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)^{-2q}J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)}{\Gamma(1+\rho-q)\Gamma(1-q-\rho_n)}, \tag{57}$$

$$\tau_-(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n f_n(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)^{-2q}J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)F(q+\rho_n, 1/2+\rho_n, 1+2\rho_n; 1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} C_n f_n(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)^{-2q}J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)\frac{\Gamma(1+2\rho_n)\Gamma(1/2-q)}{\Gamma(1-q+\rho_n)\Gamma(1/2+\rho_n)}. \tag{58}$$

Для нахождения коэффициента C_n приравняем выражения (57) и (58)

$$C_n = \frac{2^{1/2-q-2\rho_n}(-1)^{1/4-q/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\rho_n)\Gamma(1-q-\rho_n)}. \tag{59}$$

Потребуем теперь, чтобы функции (47) и (56) удовлетворяли соотношению (35). Для этого вычислим производные функций по y при $y \to 0$

$$\nu_-(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n f_n \lambda^{-q}\alpha^{2q}\frac{\partial}{\partial y}\left((x^{2\alpha}-y^{2\alpha})^{\rho_n}x^{-2q\alpha-2\rho_n\alpha}J_{2\rho_n}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\sqrt{x^{2\alpha}-y^{2\alpha}}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times F\left(q+\rho_n, 1/2+\rho_n, 1+2\rho_n; \frac{x^{2\alpha}-y^{2\alpha}}{x^{2\alpha}}\right)\right)\right|_{y=0} =$$

$$= \frac{\lambda^{-q}\alpha^{2q+1}\Gamma(q+1/2)}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n C_n 2^{2\rho_n+1}J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda}x^\alpha/\alpha)\frac{x^{-\alpha}\Gamma(1+\rho_n)}{\Gamma(q+\rho_n)}, \tag{60}$$

$$\nu_+(x) = \lim_{y\to 0+0}\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha^{2q}r^{2q-1}\lim_{\varphi\to 0}\sin^{2q}\varphi\cos 2\varphi u_\varphi =$$

$$= -2\alpha^{2q}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\sqrt{\lambda}r)^{-2q}J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda}r)\lim_{\varphi\to 0}\sin^{2q}\varphi\sin^{1/2-q}2\varphi \mathrm{P}^{q+1/2}_{\rho_n-1/2}(-\cos 2\varphi) =$$

$$= \frac{2^{3/2-q}}{\pi}\alpha^{2q}\sum_{n=0}^{\infty} f_n r^{2q-1}(\sqrt{\lambda}r)^{-2q}J_{2\rho_n}(\sqrt{\lambda}r)\times$$

$$\times\lim_{\varphi\to 0}\sin^{1/2+q}\varphi 2^{q/2+1/4}\sin\pi(\rho_n-1/2)\Gamma(q+1/2)(1-\cos 2\varphi)^{-q/2-1/4} =$$

$$= \frac{2^{3/2-q}\alpha^{2q+1}\lambda^{-q}}{\pi}\sin\pi(1/4-q/2)\Gamma(1/2+q)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n x^{-\alpha}J_{2\rho_n}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}x^\alpha\right). \tag{61}$$

Приравнивая (60) и (61), получим

$$C_n = \frac{2^{\frac{1}{2}-2\rho_n-q}(-1)^n\sin\pi(1/4-q/2)\Gamma(q+\rho_n)}{\Gamma(1+\rho_n)\sqrt{\pi}}. \tag{62}$$

С учетом (41) и (42) выражения (59) и (62) будут равны между собой.

Таким образом, решение в области D_- имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f_n 2^{-2\rho_n-q-1/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\rho_n)\Gamma(1-q-\rho_n)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\sqrt{x^{2\alpha}-y^{2\alpha}}\right)^{-2q}\times$$

$$\times J_{2\rho_n}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\sqrt{x^{2\alpha}-y^{2\alpha}}\right)\left(\frac{x^{2\alpha}}{x^{2\alpha}-y^{2\alpha}}\right)^{-q-\rho}F\left(q+\rho_n, \frac{1}{2}+\rho_n, 1+2\rho_n; \frac{x^{2\alpha}-y^{2\alpha}}{x^{2\alpha}}\right), \tag{63}$$

где f_n – коэффициенты, найденные из эллиптической области.

Итак, доказана

Теорема 2. *Если* $f_1(\varphi) \in C^1[0, \pi/2]$, $f_1(\pi/2) = 0$ *и выполнено условие* (55), *то существует единственное решение задачи Трикоми в области* D (*где* $\Gamma = \Gamma_0$, $\varphi_1(y) = \psi(x, y) \equiv 0$, $n = m$) *и оно определяется формулами* (47) *и* (63) *соответственно в области* D_+ *и* D_-, *где коэффициенты* f_n *определяются по формулам* (54).

Литература

1. Салахитдинов М.С., Хасанов А. *Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 1. – С. 110–119.
2. Сабитов К.Б. *О принципе максимума для уравнения смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С. 1967–1976.
3. Моисеев Е.И. *Представление решения задачи Трикоми в виде биортогонального ряда* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 7. – С. 1229–1237.
4. Сабитов К.Б., Карамова А.А. *Решение одной газодинамической задачи для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения* // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 37. – № 1. – С. 111–116.
5. Чиганова Н.В. *Задача на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 9. – С. 67–73.
6. Чиганова Н.В. *О единственности задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией степенного вырождения* // Тр. международн. научн. конф. “Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы”, посвященной юбилею академика В.А. Ильина. – СФ АН РБ. – Уфа. – Т. 2. – 2003. – С. 134–141.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. – М.: Наука, 1973. – 299 с.
8. Моисеев Е.И. *О базисности систем синусов и косинусов* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 275. – № 4. – С. 794–798.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия

Стерлитамакский филиал Академии наук Республики Башкортостан

Поступила
29.04.2004