ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 517.544

И.А. БИКЧАНТАЕВ

ОЦЕНКА ЧИСЛА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

На компактной римановой поверхности в неособых случаях было подсчитано число l линейно независимых решений однородной задачи Римана, а в особых случаях была получена точная оценка для l ([1], [2]). На произвольной открытой римановой поверхности формула для вычисления числа линейно независимых решений однородной задачи Римана в классе функций с Λ_K-поведением в окрестности идеальной границы в неособых случаях была получена в [3]. Там же получена оценка для числа l линейно независимых решений однородной задачи Римана на параболической римановой поверхности в особых случаях, которая в случае компактной римановой поверхности совпадает с ранее известной.

1. Пусть R — параболическая риманова поверхность рода $h \leqslant \infty$, R^* — компактификация Стоилова поверхности R ([4], с. 250–251), Γ — гладкий замкнутый контур на R, состоящий из конечного числа компонент, D — дивизор, носитель которого состоит из конечного числа точек, лежащих в R^* (см. [5]), G — заданная на Γ функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и не имеющая нулей.

Допустим, что некоторая функция E в окрестности V точки $p \in \Gamma$ представима в виде $E = mg$, где m — функция, голоморфная в $V \setminus \{p\}$ и имеющая в точке p конечный порядок, g и $1/g$ — функции, голоморфные и ограниченные в $V \setminus \Gamma$, имеющие непрерывные предельные значения в точках $V \cap \Gamma$ слева и справа. Тогда порядком функции E в точке p назовем порядок функции m в этой точке. Если E есть кусочно-мероморфная функция на R с линией скачков Γ, представимая указанным образом в окрестности каждой точки $p \in \Gamma$, и имеющая конечный или бесконечный предел в каждой точке идеальной границы Стоилова $\beta = R^* \setminus R$, то через

$$(E) = \prod_{p \in R^*} p^{\operatorname{ord}_p E}$$

(определение порядка функции в точках идеальной границы см. в [5], [6]) будем обозначать ее дивизор, носитель которого состоит из всех нулей и бесконечностей этой функции (в том числе и тех, что лежат на $\beta \cup \Gamma$). Будем говорить, что функция E кратна дивизору D ($\operatorname{supp} D \subset R^*$), если ее дивизор (E) кратен дивизору D.

Пусть Q — область с некомпактным замыканием $\overline{Q}$ на R с компактной кусочно-гладкой границей ∂Q. Через $\beta(Q)$ обозначим часть идеальной границы поверхности R, принадлежащую замыканию области Q в топологии R^*. Пусть g — мероморфная в Q функция, имеющая предел, конечный или бесконечный, в каждой точке $q \in \beta(Q)$, непрерывная и не обращающаяся в нуль на ∂Q. Тогда имеет место следующее обобщение принципа аргумента, установленное в [5]:

$$\frac{1}{2\pi}[\arg g]_{\partial Q} = n(g,\ 0,\ Q \cup \beta(Q)) - n(g,\ \infty,\ Q \cup \beta(Q)), \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке фонда НИОКР Республики Татарстан (грант 09-12/1999).

где $n(g,\ 0,\ Q \cup \beta(Q))$ и $n(g,\ \infty,\ Q \cup \beta(Q))$ означают соответственно число нулей и полюсов (в обобщенном смысле и с учетом кратностей) функции g на $Q \cup \beta(Q)$.

Рассмотрим однородную задачу Римана в следующей постановке: *найти функцию F, мероморфную в $R \setminus \Gamma$, кратную дивизору $1/D$, имеющую непрерывные* (*в смысле отображения* Γ *в* $\overline{\mathbb{C}}$) *предельные значения слева и справа на* Γ, *удовлетворяющие условию линейного сопряжения вида*

$$F^{+}(t) = G(t)F^{-}(t), \quad t \in \Gamma. \tag{2}$$

Пусть E — мероморфная в $R \setminus \Gamma$ функция, имеющая конечный или бесконечный предел в каждой точке идеальной границы β поверхности R, имеющая на Γ непрерывные (в смысле отображения Γ в $\overline{\mathbb{C}}$) предельные значения слева и справа, удовлетворяющие условию линейного сопряжения (2); кроме того, предположим, что носитель дивизора (E) состоит из конечного числа точек на R^{*}. Такая функция E заведомо существует, если $l > 0$. Все точки, принадлежащие носителю дивизора (E), входят в E с целыми кратностями. Для точек на $R \setminus \Gamma$ это очевидно. Для точек на контуре Γ это вытекает из локальных свойств решений однородной задачи Римана с невырождающимся коэффициентом G. Для точек на идеальной границе β римановой поверхности R это вытекает из результатов статьи [6].

Если F — любое решение задачи Римана (2), то функция $f = F/E$ мероморфна на R и имеет предел (конечный или бесконечный) в каждой точке идеальной границы β поверхности R (см. [6], лемма 2.4.a). Следовательно, f — квазирациональная функция (в смысле Л. Мирберга), кратная дивизору $D^{-1}(E)^{-1}$. Таким образом, любое решение краевой задачи Римана (2) представимо в виде

$$F = Ef, \tag{3}$$

где f — квазирациональная (в смысле Л. Мирберга) функция на R, кратная дивизору $D^{-1}(E)^{-1}$. Обратно, каждая функция вида (3) является решением однородной задачи Римана (2).

Пусть Ω — регулярная область на R с компактным замыканием, содержащая внутри себя контур Γ, граница которой $\partial\Omega$ не содержит нулей и полюсов функции E. Применяя к функции E обобщенный принцип аргумента Гахова–Зверовича–Самко [7] в области $\Omega \setminus \Gamma$ (к нему приходится прибегать, если функция E обращается в нуль или в бесконечность в конечном числе точек контура Γ) и обобщенный принцип аргумента (1) в $R \setminus \Omega$ (учитывающий влияние нулей и бесконечностей на идеальной границе), приходим к равенству

$$\operatorname{ord} E = \operatorname{ind} G. \tag{4}$$

Из равенств (3), (4) и теоремы Клиффорда для квазирациональных функций на параболической римановой поверхности R (см. [5]) следует, что число l линейно независимых решений задачи (2) удовлетворяет неравенству $l \leqslant [(\operatorname{ord} D + \operatorname{ind} G)/2] + 1$, где [ ] означает целую часть числа.

Таким образом, доказана

Теорема. *При* $0 \leqslant \operatorname{ord} D + \operatorname{ind} G < 2h - 1$ *число линейно независимых решений однородной задачи Римана* (2) *не превосходит числа* $[(\operatorname{ord} D + \operatorname{ind} G)/2] + 1$.

В случае, когда риманова поверхность R компактна, этот результат совпадает с уже известной точной оценкой ([1], [2]). Следовательно, полученная здесь оценка тоже является точной.

Литература

1. Зверович Э.И. *Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях* // УМН. – 1971. – Т. 26. – Вып. 1. – С. 113–179.
2. Чибрикова Л.И. *Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Матем. анализ. – 1980. – Т. 18. – С. 3–66.
3. Бикчантаев И.А. *О числе решений краевой задачи Римана на некомпактной римановой поверхности* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 9. – С. 10–13.
4. Sario L., Nakai M. *Classification theory of open Riemann surfaces.* – Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer Verlag, 1970. – 446 p.
5. Бикчантаев И.А. *Теорема Клиффорда для квазирациональных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 4. – С. 9–13.
6. Myrberg L. *Über quasirationale Functionen auf parabolischen Riemannschen Flächen* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. – 1967. – Bd. 404. – S. 1–23.
7. Гахов Ф.Д., Зверович Э.И., Самко С.Г. *Приращение аргумента, логарифмический вычет и обобщенный принцип аргумента* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 213. – № 6. – С. 1233–1236.

Казанский государственный университет

Поступила 17.03.1998