ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968

З.Б. ЦАЛЮК, С.С. ЧИСТОКЛЕТОВА

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА–ГАММЕРШТЕЙНА

Асимптотика решений линейных интегральных уравнений с разностным ядром изучена сравнительно хорошо (напр., [1]–[8]). Здесь будет рассмотрено уравнение

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)[x(s)+\varphi(x(s))]ds + f(t). \tag{1}$$

Очевидно, в таком виде может быть записано любое уравнение Вольтерра–Гаммерштейна с разностным ядром. Ниже предполагается, что $K \in L_1[0,\infty)$, $\varphi \in C(R)$, $f \in C[0,\infty)$. Как и в линейном уравнении, асимптотика решений (1) (при заданной асимптотике f) связана с нулями $1-\widehat{K}(z)$, где $\widehat{K}(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}K(t)dt$ — преобразование Лапласа ядра $K(t)$.

Теорема 1. *Пусть $1-\widehat{K}(z)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и $\varphi(x) = o(x)$ при $|x| \to \infty$. Тогда при любой ограниченной $f(t)$ решение (1) ограничено.*

Действительно, решение x уравнения (1) является решением уравнения

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)[1+q_\gamma(s)]x(s)\,ds + \psi(t), \tag{2}$$

где $q_\gamma(s) = \frac{\varphi[x(s)]}{x(s)}$, если $|x(s)| > \gamma$, и $q_\gamma(s) = 0$, если $|x(s)| \leq \gamma$, а ψ — некоторая ограниченная функция. По условию K — устойчивое ядро ([9], гл. 4, § 18, с. 94), а $q_\gamma(s) \to 0$ равномерно по s при $\gamma \to \infty$, значит, при достаточно больших γ ядро уравнения (2) устойчиво, а потому $x(t)$ — ограниченная функция.

Теорема 2. *Пусть $1-\widehat{K}(z)$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ конечное число нулей $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$. Пусть далее $\varphi(x) = O(|x|^\beta)$, $0 \leq \beta < 1$, причем $\operatorname{Re}\lambda_j \neq \beta\mu$, где $\mu = \max \operatorname{Re}\lambda_j$. Тогда при любой ограниченной f решение*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re}\lambda_j > \beta\mu} P_j(t)e^{\lambda_j t} + O(t^{\beta(n-1)}e^{\beta\mu t}),$$

где $P_j(t)$ — некоторые многочлены степени меньшей кратности корня λ_j, а n — максимальная кратность тех λ_j, для которых $\operatorname{Re}\lambda_j = \mu$.

Доказательство основано на следующих соображениях. В силу теоремы 1 из [5] резольвента R ядра K имеет вид

$$R(t) = \sum_{j=1}^k P_j(t)e^{\lambda_j t} + R_0(t), \quad \text{где} \quad R_0 \in L_1[0,\infty). \tag{3}$$

Тогда

$$x(t) = \int_0^t R(t-s)\varphi[x(s)]ds + \psi(t), \tag{4}$$

где $\psi(t) = f(t) + \int\limits_0^t R(t-s)f(s)ds = \sum\limits_j P_j(t)e^{\lambda_j t} + u(t)$, $u(t)$ — ограниченная функция. По условию $|\varphi(x)| \le C_1[|x|^\beta + 1]$, значит,

$$|x(t)| \le C_1 \int_0^t |R(t-s)|[|x^\beta(s)| + 1]ds + |\psi(t)|.$$

Функция $z(t) = C(t+1)^{n-1}e^{\mu t}$ при достаточно больших C удовлетворяет неравенству

$$z(t) \ge C_1 \int_0^t |R(t-s)|[z^\beta(s) + 1]ds + |\psi(t)|.$$

Отсюда и из теоремы об интегральном неравенстве (напр., [10]) следует $|x(t)| \le z(t)$. Из этой оценки получим, что в равенстве

$$\int_0^t R(t-s)\varphi[x(s)]ds = \sum_{\operatorname{Re}\lambda_j > \beta\mu} \left\{ \int_0^\infty P_j(t-s)e^{\lambda_j(t-s)}\varphi[x(s)]ds - \right.$$
$$\left. - \int_t^\infty P_j(t-s)e^{\lambda_j(t-s)}\varphi[x(s)]ds \right\} + \sum_{\operatorname{Re}\lambda_j < \beta\mu} \int_0^t P_j(t-s)e^{\lambda_j(t-s)}\varphi[x(s)]ds +$$
$$+ \int_0^t R_0(t-s)\varphi[x(s)]ds$$

три последних интеграла есть $O(t^{\beta(n-1)}e^{\beta\mu t})$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Следствие. Если φ — ограниченная функция, то

$$x(t) = \sum_{j=1}^k P_j(t)e^{\lambda_j t} + u(t), \tag{5}$$

где $u(t)$ — ограниченная функция.

Чтобы получить более полную информацию о поведении x при $t \to \infty$, будем предполагать далее, что

$$f \in A_m = \left\{ y(t) \in C[0,\infty) : y(t) = \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right\},$$

т. е. f имеет тейлоровское разложение на бесконечности порядка m.

Рассмотрим сначала неограниченные решения. Из (5) следует, что такие решения либо имеют колебательный характер с неограничено возрастающей амплитудой, либо имеют вид $x(t) \sim Ct^n e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$. Потребуем дополнительно существования $\lim\limits_{|x|\to\infty} \varphi(x) = a_0$. Очевидно, можно считать $a_0 = 0$, т. к. слагаемое $\int\limits_0^t K(t-s)a_0\,ds$ в уравнении (1) можно отнести к свободному члену.

Теорема 3. *Пусть уравнение* $1 - \widehat{K}(z) = 0$ *имеет в правой полуплоскости* $\operatorname{Re} z \ge 0$ *конечное число корней* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, *причем* $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ *и на каждой прямой* $\operatorname{Re} z = \mathrm{const}$ *находится не более двух корней. Пусть* $t^m K(t) \in L_1[0,\infty)$, $t^m K(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$, $f(t) \in A_m$, $\varphi(x) = \frac{a+o(1)}{\ln^m(|x|+2)}$ *при* $|x| \to \infty$. *Тогда, если решение уравнения* (1) *неограничено,*

$$x(t) = \sum_j P_j(t)e^{\lambda_j t} + \sum_{k=0}^m \frac{c_k}{(t+1)^k} + \frac{o(1)}{(t+1)^m}. \tag{6}$$

Действительно, из (5) следует, что при достаточно больших t

$$x(t) = P(t)e^{\alpha t}(\sin(\gamma t + \beta(t)) + \psi(t)),$$

где $\alpha > 0$, $P(t) > 0$, $P(t) \sim ct^k$, $\beta(t) \to \beta_0$ и $\psi(t) = o(e^{-\varepsilon_1 t})$ при $t \to \infty$ для некоторого $\varepsilon_1 > 0$. Положим $A_1 = \{t : |x(t)| \geq P(t)e^{\alpha t - \sqrt{t}}\}$, $A_2 = [0,\infty)\setminus A_1$, $\varphi_1(t) = \varphi(x(t))\chi_{A_1}(t) + \varphi[P(t)e^{\alpha t-\sqrt{t}}]\chi_{A_2}(t)$ и $\varphi_2(t) = \{\varphi(x(t)) - \varphi[P(t)e^{\alpha t - \sqrt{t}}]\}\chi_{A_2}(t)$, где $\chi_A(t)$ — характеристическая функция множества A. Можно показать, что $\int\limits_{A_2} t^m\,dt < \infty$, и, следовательно, $t^m\varphi_2(t) \in L_1[0,\infty)$. Из (1) имеем

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f(t) + \int_0^t K(t-s)\varphi_1(s)ds + \int_0^t \varphi_2(t-s)K(s)ds.$$

Так как $t^m\varphi_2(t) \in L_1[0,\infty)$, $t^mK(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то последний интеграл есть $o(t^{-m})$ при $t \to \infty$ [7]. Далее, $\varphi_1(t) = \frac{c+o(1)}{t^m}$ и $t^mK(t) \in L_1[0,\infty)$. Следовательно, второй интеграл эквивалентен $\frac{c_1}{t^m}$, $t \to \infty$. Таким образом, $x(t)$ является решением линейного уравнения со свободным членом из A_m. Отсюда следует, что $x(t)$ имеет вид (6). Если $x(t) \sim Ce^{\lambda t}$, то представление (6) справедливо при более слабых условиях на $\varphi(x)$.

Теорема 4. *Пусть уравнение* $1-\widehat{K}(z) = 0$ *имеет в правой полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geq 0$ *конечное число корней* λ_j, *причем* $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$. *Пусть далее* $t^mK(t) \in L_1[0,\infty)$ *и* $f(t) \in A_m$.

Если $x(t) = e^{\lambda t}(C + o(1))$, $t \to \infty$, *где* $\lambda > 0$, $C \neq 0$, *и*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{\ln^k(|x|+2)} + \frac{o(1)}{\ln^m(|x|+2)}, \quad |x| \to \infty,$$

то $x(t)$ *имеет вид* (6).

Из $x(t) \sim Ce^{\lambda t}$ и (5) следует, что $x(t) = Ce^{\lambda t}(1 + O(e^{-\varepsilon t}))$, $t \to \infty$, при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда $\frac{1}{\ln(|x(t)|+2)} \in A_m$ и, следовательно, $\varphi[x(t)] \in A_m$. Поэтому

$$\psi(t) = f(t) + \int_0^t K(t-s)\varphi(x(s))ds \in A_m.$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из того, что $x(t)$ является решением уравнения

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds + \psi(t).$$

Перейдем к изучению ограниченных решений. Вообще говоря, нельзя утверждать, что ограниченное решение имеет предел при $t \to \infty$. Однако, если $x(t) \to x_0$, то, как следует из приводимой ниже теоремы, $x(t) \in A_m$. Подобно тому, как это было сделано с $\varphi(x)$, здесь также без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Ясно, что в таком случае $\varphi(0) = 0$ и $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 5. *Пусть уравнение* $1 - \widehat{K}(z) = 0$ *имеет в полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geq 0$ *конечное число корней* λ_j, $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, $t^mK(t) \in L_1[0,\infty)$, *существуют* $\varphi^{(m)}(0)$, $\varphi''(0)$ *и* $\varphi'(0) = 0$. *Тогда, если* $x(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$, *то* $x(t) \in A_m$.

В самом деле, в уравнении (4) $\psi(t)$ имеет представление (6). Отсюда, из (3) и (4) с учетом того, что $x(t) \to 0$, найдем

$$x(t) = \sum_j \int_t^\infty P_j(t-s)e^{\lambda_j(t-s)}\varphi[x(s)]ds + \int_0^t R_0(t-s)\varphi[x(s)]ds + \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m}. \quad (7)$$

Положим $\overline{x}(t) = \sup\limits_{s\geq t}|x(s)|$. Из (7), условия $\varphi(x) = O(x^2)$, $x \to 0$ и монотонности $\overline{x}(t)$ получим

$$\overline{x}(t) \leq C_1\overline{x}^2(t) + C_2\overline{x}^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{C_3}{t+1}. \quad (8)$$

Пусть $y(t) = \overline{x}(t)\sqrt{t+1}$. Если $y(t)$ — неограниченная функция, то существует такая последовательность $t_n \to \infty$, что $y(t_n) = \sup\limits_{t \le t_n} y(t) \to \infty$. Тогда

$$y(t_n) \le \left\{ C_1 \overline{x}(t_n) + 2C_2 \overline{x}\left(\frac{t_n}{2}\right) \right\} y(t_n) + \frac{C_3}{\sqrt{t_n+1}}.$$

Так как $\overline{x}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то последнее неравенство противоречиво при достаточно больших n. Следовательно, $\overline{x}(t) = O(\frac{1}{\sqrt{t+1}})$, откуда согласно (8) $x(t) = O(\frac{1}{t+1})$. Так как $t^m R_0(t) \in L_1[0,\infty)$ и $\varphi(x) = O(x^2)$, $x \to 0$, то первые два слагаемых в (7) являются $O(\frac{1}{(t+1)^2})$ [2] и потому $x(t) \in A_1$. Далее можно показать, что оператор, определенный правой частью уравнения (7), переводит функции из A_k в A_{k+1}, $k < m$. Отсюда по индукции получим утверждение теоремы.

Аналогичное утверждение для устойчивого ядра было доказано в [1].

Литература

1. Дербенёв В.А., Цалюк З.Б. *К вопросу об асимптотическом разложении решений уравнения восстановления* // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10. – № 2. – С. 335–341.
2. Дербенёв В.А. *Асимптотические свойства решения уравнения восстановления* // Матем. анализ. – Краснодар, 1974. – Вып. 2. – С. 43–49.
3. Дербенёв В.А. *Асимптотика решения неустойчивого уравнения восстановления.* – Ред. журн. “Изв. вузов. Математика”. – Казань, 1976. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 01.07.76, № 2460–76.
4. Дербенёв В.А., Пуляев В.Ф. *Структура резольвенты и устойчивость линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Изв. Сев.-Кавказск. научн. центра высш. школы. Сер. естеств. наук. – 1992. – № 1–2. – С. 7–14.
5. Дербенёв В.А., Цалюк З.Б. *Асимптотика резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – № 1. – С. 88–94.
6. Ойнас И.Л., Цалюк З.Б. *Асимптотика решений одной системы разностных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 70–71.
7. Цалюк З.Б. *О допустимости пары (Y, X) и асимптотике резольвенты для системы интегральных уравнений Вольтерра* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 9. – С. 1226–1230.
8. Цалюк З.Б. *Асимптотическая структура резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 50–55.
9. Винер Н., Пэли Р. *Преобразование Фурье в комплексной области.* – М.: Наука, 1964. – 268 с.
10. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. *Об интегральных неравенствах.* I // Матем. сб. – 1962. – Т. 56. – № 3. – С. 325–342.

Кубанский государственный университет

Поступила
10.05.2001