ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

УДК 517.97

Г.Г. ИСЛАМОВ

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ, УСТРАНЯЮЩИХ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЧАСТОТАМИ

Пусть B — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$; A — замкнутый оператор в B, для которого существует обратный оператор $G = A^{-1} : B \to B$, являющийся оператором Гильберта–Шмидта: $\|G\|^2 = \mathrm{tr}(G^*G) < \infty$.

Свойства спектральной задачи $Ax = \lambda x$ играют важную роль при анализе процессов колебания упругих тел, распространения тепла и диффузии частиц в среде. Собственные колебания $x(t) = e^{i\omega t}\varphi$, $\varphi \in B$, в линейной системе

$$\ddot{x}(t) + Ax(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с такими ω, квадраты которых лежат в ограниченной области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$, можно устранить методом наложения на исходную систему ортогональных связей

$$(x(t), b_j) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, \mu. \tag{2}$$

В самом деле, собственные колебания $x(t) = e^{i\omega t}\varphi$, $\varphi \in B$, системы (1), удовлетворяющие условию (2), определяются спектральной задачей

$$\lambda = \omega^2, \quad A\varphi = \lambda\varphi, \quad (\varphi, b_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \mu, \tag{3}$$

которая при соответствующем выборе элементов $b_j \in B$, $j = 1, \dots, \mu$, будет иметь лишь тривиальное решение $\varphi = 0$.

Пусть I — тождественный оператор в B, $\lambda \in \Omega$ — собственное значение оператора A и $\varphi_1, \dots, \varphi_\chi$ — базис подпространства $\ker(A - \lambda I) = \{\varphi \in B : A\varphi = \lambda\varphi\}$. При $\mu < \chi = \dim\ker(A - \lambda I)$ система алгебраических уравнений $\sum\limits_{k=1}^{\chi} (\varphi_k, b_j)c_k = 0$, $j = 1, \dots, \mu$, будет иметь нетривиальное решение $c_1, \dots, c_\chi$ и, значит, λ останется собственным значением задачи (3). Поэтому для минимального числа μ ортогональных связей в задаче (3) справедлива оценка снизу

$$\mu \geq \nu = \max_{\lambda \in \Omega} \dim\ker(A - \lambda I). \tag{4}$$

В силу теоремы двойственности [1] для замкнутого оператора A имеем $\nu = \min \mathrm{rang}\, K : \Omega \subset P(A - K)\}$, если пересечение $\Omega \cap \sigma(A)$ пусто или конечно и состоит лишь из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности. Здесь $P(A - K)$ и $\sigma(A)$ — резольвентное множество и спектр соответственно операторов $A - K$ и A, $\mathrm{rang}\, K = \dim KB$ — ранг конечномерного оператора $K : B \to B$. В исследуемом здесь случае оператор A имеет дискретный спектр и, значит, найдется такой конечномерный оператор $K : B \to B$, $K\varphi = \sum\limits_{i=1}^{\nu} a_i(\varphi, b_i)$, что в Ω не будет точек спектра возмущенного оператора $A - K$.

Нетрудно видеть, что элементы $b_1, \dots, b_\nu$ конечномерного оператора K образуют минимальную по числу $\mu = \nu$ систему ортогональных связей (2). Действительно, всякое решение φ задачи (3) удовлетворяет равенству $(A - K)\varphi = \lambda\varphi$ и, значит, равно нулю при $\lambda \in \Omega$.

Теорема 1. *Для минимального числа μ ортогональных связей* (2) *имеет место равенство*

$$\mu = \max_{\lambda\in\Omega}\min_{Q}\|GQ - Q/\lambda + \lambda G\|^2, \tag{5}$$

где min *берется по всем операторам Гильберта–Шмидта Q, действующим в B.*

Доказательство. Достаточно показать, что величина $\min\limits_{Q}\|GQ-Q/\lambda+\lambda G\|^2$ совпадает с геометрической кратностью $M(\lambda;A) = \dim\ker(A-\lambda I)$ собственного значения λ оператора A. Обозначим через $N(\lambda;T)$ алгебраическую кратность собственного значения λ оператора Гильберта–Шмидта $T : B\to B$. В силу теоремы Шура ([2], с. 139) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\lambda_j(T)|^2 \le \operatorname{tr}(T^*T) = \|T\|^2$. Отсюда для $T = GQ - Q/\lambda + \lambda G$ имеем

$$N(1;T^*) = N(1;T) \le \|GQ - Q/\lambda + \lambda G\|^2. \tag{6}$$

Пусть теперь $G^*\psi = \psi/\overline{\lambda}$. Тогда $T^*\psi = Q^*G^*\psi - Q^*\psi/\overline{\lambda} + \overline{\lambda}G^*\psi = \psi$ и, значит,

$$M(\lambda;A) = M(1/\lambda;G) = M(1/\overline{\lambda};G^*) \le N(1;T^*). \tag{7}$$

В силу произвольности Q из (6) и (7) находим, что

$$M(\lambda;A) \le \min_{Q}\|GQ - Q/\lambda + \lambda G\|^2.$$

Осталось показать, что минимум достигается. Пусть $\psi_1,\dots,\psi_\chi$, $\chi = M(\lambda;A)$, — ортонормированный базис подпространства $\ker(G^* - I/\overline{\lambda})$. Рассмотрим операторное уравнение

$$GQ - Q/\lambda = -\lambda G + \sum_{i=1}^{\chi}\psi_i(\cdot,\psi_i), \tag{8}$$

которое разрешимо относительно Q в классе операторов Гильберта–Шмидта, т. к. при любом $\varphi\in B$ элемент $-\lambda G\varphi + \sum\limits_{i=1}^{\chi}\psi_i(\varphi,\psi_i)$ ортогонален базису подпространства сопряженного уравнения

$$G^*\psi = \psi/\overline{\lambda} : \Big(-\lambda G\varphi + \sum_{i=1}^{\chi}\psi_i(\varphi,\psi_i),\psi_j\Big) = -(\varphi,\psi_j) + (\varphi,\psi_j) = 0, \quad j = 1,\dots,\chi.$$

Пусть оператор Гильберта–Шмидта $Q : B\to B$ удовлетворяет равенству (8). Тогда

$$\|GQ - Q/\lambda + \lambda G\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{\chi}\psi_i(\cdot,\psi_i)\Big\|^2 = \operatorname{tr}(T^*T) = \chi = M(1/\overline{\lambda},G^*) = M(\lambda;A),$$

т. е. имеет место (5). $\square$

Перейдем к конечномерному случаю $B = \mathbb{C}^n$. Оператор A представи́м матрицей в фиксированном базисе пространства $\mathbb{C}^n$, тождественный оператор I — единичной матрицей E. В [3] показано, что если элементы матрицы A и все ее собственные значения лежат в числовом поле F (*условие* 1) и существует элемент поля F, не принадлежащий Ω (*условие* 2), то найдется такая матрица K ранга ν (см. формулу (4)) с элементами из поля F, что матрица $A-K$ не имеет в Ω собственных значений. Пусть $K = LS$ — скелетное разложение ([4], с. 46) этой матрицы. Так как ранги матриц K и S совпадают, то строки $b_1,\dots,b_\nu$ матрицы S с элементами из поля F образуют минимальную по числу $\mu=\nu$ систему ортогональных связей (2). В самом деле, при $\lambda\in\Omega$ всякое решение задачи (3) удовлетворяет равенству $\lambda\varphi = (A-LS)\varphi = (A-K)\varphi$ и, значит, равно нулю, т. к. матрица $A-K$ не имеет в Ω собственных значений.

Заметим, что второе условие $F\setminus\Omega\ne\emptyset$ достижимости равенства в (4) выполнено, т. к. Ω — ограниченное подмножество $\mathbb{C}$. Здесь будет показано, что равенство $\mu=\nu$ выполняется при менее жестком ограничении, чем первое условие принадлежности спектра $\sigma(A) = \{\lambda\in\mathbb{C} : \det(A-\lambda E) = 0\}$ матрицы A полю F. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть для заданной матрицы A с элементами из поля F и собственного подмножества Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$ выполнены условия*

а) *существует элемент ξ поля F, не принадлежащий Ω;*

б) *найдется аннулирующий многочлен матрицы A, разлагающийся в произведение таких двух многочленов $q_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)$ с коэффициентами из поля F, что нули первого многочлена лежат в Ω, а нули второго содержатся в дополнении $\mathbb{C} \setminus \Omega$.*

Тогда для минимального числа μ ортогональных связей (2) системы (1) имеет место равенство

$$\mu = \max_{\lambda \in \Omega} \dim \ker(A - \lambda E) = \max_{\lambda \in \Omega} \min_{Q} \|AQ - \lambda Q + E\|^2,$$

где $\|S\| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |s_{ij}|^2 \Big)^{1/2}$ — евклидова норма $n \times n$-матрицы S и минимум берется по всем $n \times n$-матрицам Q.

Кроме того, может быть эффективно построена матрица K ранга μ с элементами из поля F такая, что матрица $A - K$ не имеет собственных значений в области Ω. Строки $b_1, \ldots, b_\mu$ матрицы S скелетного разложения $K = LS$ образуют минимальную систему ортогональных связей (2).

Доказательство первой части теоремы 2 проводится по схеме доказательства теоремы 1 непосредственно для самой матрицы A вместо обратной матрицы G, существование которой здесь не предполагается. Это приводит к другой зависимости от λ выражения, стоящего под знаком евклидовой нормы матрицы, если взять $T = (A - \lambda E)Q + E$. Вторая часть теоремы 2 опирается на две леммы, которые принимаем без доказательства. Обозначим через $F_{n\times n}$ алгебру квадратных матриц порядка n с элементами из числового поля F.

Лемма 1. *Пусть существует аннулирующий многочлен $q(\lambda)$ матрицы $A \in F_{n\times n}$, разлагающийся в произведение двух многочленов $q_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)$ с коэффициентами из поля F таких, что $\operatorname{nul} q_1 \subset \Omega$, $\operatorname{nul} q_2 \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$. Тогда найдется такая невырожденная матрица $U \in F_{n\times n}$, что $\widetilde{A} = U^{-1}AU$ имеет квазидиагональный вид*

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $A_1 \in F_{m\times m}, A_2 \in F_{(n-m)\times(n-m)}$, причем

$$\sigma(A_1) \subset \Omega, \quad \sigma(A_2) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Лемма 2. *Пусть многочлен $r_j(\lambda)$ степени $\deg i_j(\lambda)$ с коэффициентами из поля F не совпадает с инвариантным многочленом $i_j(\lambda)$ ненулевой степени, $j = t+1, \ldots, m$. Тогда A_1 представима в виде суммы $A_1 = A_3 + A_4$ матрицы $A_3 \in F_{m\times m}$ с характеристическим многочленом $r(\lambda) = \prod\limits_{j=t+1}^{m} r_j(\lambda)$ и матрицы $A_4 \in F_{m\times m}$ ранга $\max\limits_{\lambda \in \sigma(A_1)} \dim \ker(A_1 - \lambda E)$.*

Перейдем к доказательству теоремы 2. Согласно рассуждениям, приведенным перед формулировкой теоремы, достаточно показать, что найдется такая матрица K ранга $\nu = \max\limits_{\lambda \in \Omega} \dim \ker(A - \lambda E)$ с элементами из числового поля F, что матрица $A - K$ не имеет в Ω собственных значений. Условие б) теоремы 2 совпадает с условием леммы 1. Условие а) теоремы 2 позволяет в лемме 2 взять $r_j(\lambda) = (\lambda - \xi)^{\deg i_j(\lambda)}$. Из разложения (9) леммы 1 и представления $A_1 = A_3 + A_4$ следует $\widetilde{A} = U^{-1}AU = \widetilde{V} + \widetilde{K}$, где

$$\widetilde{V} = \begin{pmatrix} A_3 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{K} = \begin{pmatrix} A_4 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Так как $\sigma(\widetilde{V}) = \{\xi\} \cup \sigma(A_2)$ и по условию $\xi \notin \Omega$, то в Ω нет собственных значений подобной матрицы $V = U\widetilde{V}U^{-1}$. Осталось заметить, что $V = A - K$, где $K = U\widetilde{K}U^{-1}$, причем $\operatorname{rang} K = \operatorname{rang} \widetilde{K} = \operatorname{rang} A_4 = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A_1)} \dim\ker(A_1 - \lambda E) = \max\limits_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(\widetilde{A} - \lambda E) = \max\limits_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(A - \lambda E)$. $\square$

Литература

1. Исламов Г.Г. *Экстремальные возмущения замкнутых операторов* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 1. – С. 35–41.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.
3. Исламов Г.Г. *Об управлении спектром динамической системы* // Дифференц. уравнения. – 1987. – № 8. – С. 1299–1302.
4. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления.* – М.: Наука, 1984. – 318 с.

Удмуртский государственный университет

Поступили
полный текст 04.10.1999
краткое сообщение 06.03.2002