Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №10, с. 51–59 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0092*

Р.К. РОМАНОВСКИЙ, Л.В. БЕЛЬГАРТ

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Прямым методом Ляпунова доказан достаточный признак экспоненциальной дихотомии с ослабленным по сравнению со случаем любых коэффициентов условием на разностную производную функции Ляпунова вдоль траектории системы. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: экспоненциальная дихотомия, индефинитная эрмитова форма, оболочка почти периодической матрицы.

УДК: 517.9

Abstract. By the direct Lyapunov method we prove a sufficient condition for the exponential dichotomy with weakened (in comparison with a case of arbitrary coefficients) requirements to the difference derivative of the Lyapunov function along the system trajectory. We give an illustrating example.

Keywords: exponential dichotomy, indefinite Hermitian form, shell of an almost periodical matrix.

1. Введение. Формулировка основного результата

1.1. Для автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, известен результат Е.А. Барбашина [1], усиливающий теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости: для асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$ достаточно существования положительно определенной функции $v(x)$ такой, что производная вдоль траекторий системы $\dot{v}(x) \le 0$ и при этом поверхности уровня $v = \mathrm{const} > 0$ не содержат целых траекторий. В работах [2], [3] показано, что этот результат распространяется на неавтономные системы $\dot{x} = f(x, t)$ при условии, что правая часть системы и функция Ляпунова $v(x, t)$ почти периодичны по t (в случае линейных систем речь идет об экспоненциальной устойчивости). В [4] получен разностный аналог результата работы [2]. Рассматривается разностная система

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad x_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^N, \tag{1}$$

где A_n — почти периодическая матрица с отделенным от нуля определителем

$$|\det A_n| \ge \mathrm{const} > 0. \tag{2}$$

Поступила 21.01.2009

Почти периодичность означает выполнение критерия компактности С. Бохнера [5]: семейство сдвигов A_{n+k}, $k \in \mathbb{Z}$, — предкомпакт в банаховом пространстве $\mathfrak{M}$ ограниченных функций $\mathbb{Z} \to \mathrm{Mat}\,(N, \mathbb{C})$ с равномерной нормой. Установлен признак экспоненциальной устойчивости в терминах эрмитовой формы

$$v(x, n) = \langle G_n x, x \rangle \tag{3}$$

с положительно определенной почти периодической матрицей G_n с ослабленным условием на разностную производную формы (3) вдоль траекторий системы (1)

$$\dot{v}(x, n) = \langle F_n x, x \rangle, \quad F_n = A_n^* G_{n+1} A_n - G_n. \tag{4}$$

Для экспоненциальной устойчивости решения $x_n = 0$ достаточно лишь, чтобы форма (4) была неположительна и отлична от тождественного нуля на каждом решении $x_n \neq 0$ системы (1). Для обоснования [5] необходимы свойства некоторых функций на компакте $K = H \times S$, где H — оболочка почти периодической матрицы A_n, S — единичная сфера в $\mathbb{C}^N$.

Позднее в [6] был получен аналог этого результата для подкласса линейных стохастических систем. В [7]–[12] результаты работ [2]–[4] распространены на другие классы почти периодических уравнений: нелинейных разностных, дифференциально-разностных, функционально-дифференциальных.

В данной работе приемы, аналогичные развитым в [2]–[4], применены к анализу более сложного типа поведения решений системы (1) — экспоненциальной дихотомии.

1.2. Обозначим через U_n матрицу Коши системы (1): $x_n = U_n x_0$ для решений (1). В силу условия (2) матрица Коши определена при всех $n \in \mathbb{Z}$, и имеет место формула

$$U_n = \begin{cases} A_{n-1}A_{n-2} \cdot \ldots \cdot A_0, & n \geq 1; \\ (A_{-1}A_{-2} \cdot \ldots \cdot A_{-n})^{-1}, & n \leq -1; \\ I, & n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Следуя [13], будем называть *взаимным наклоном подпространств* E_1, E_2 пространства $E = \mathbb{C}^N$ число

$$\mathrm{Sn}\,(E_1, E_2) = \inf |z_1 + z_2| \quad (z_k \in E_k, \quad |z_k| = 1). \tag{6}$$

Здесь и далее $|\cdot|$ — эрмитова норма в E, так же обозначается согласованная с ней матричная норма. В частном случае, когда E_1, E_2 — вещественные прямые, $\mathrm{Sn}\,(E_1, E_2) = 2\sin(\alpha/2)$, где α — наименьший угол между прямыми.

Будем говорить, что *для системы* (1) *имеет место свойство экспоненциальной дихотомии* (*э-дихотомии*), если фазовое пространство E распадается в прямую сумму подпространств E_1, E_2 так, что

1) при некоторых μ_1, ν_1, μ_2, $\nu_2 > 0$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} x \in E_1 \Rightarrow |U_n x| \leq \mu_1 e^{-\nu_1(n-m)} |U_m x| \quad (n \geq m), \\ x \in E_2 \Rightarrow |U_n x| \leq \mu_2 e^{-\nu_2(m-n)} |U_m x| \quad (n \leq m), \end{aligned} \tag{7}$$

2) взаимный наклон движущихся подпространств $E_k(n) = U_n E_k$ отделен от нуля:

$$\mathrm{Sn}\,(E_1(n), E_2(n)) \geq \mathrm{const} > 0.$$

При $A_n = A = \mathrm{const}$ это свойство равносильно распаду спектра матрицы A на два подмножества, лежащие соответственно внутри и вне окружности $|\lambda| = 1$. В случае любой ограниченной A_n для выполнения свойства э-дихотомии необходимо и достаточно существования эрмитовой индефинитной невырожденной ограниченной матрицы G_n такой, что при некотором $m > 0$ выполняется неравенство $F_n \le -mI$ (обоснование проводится повторением с очевидными видоизменениями доказательства известного критерия э-дихотомии для систем $\dot{x} = A(t)x$ с непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$ ([14]; [13], с. 280)). В классе почти периодических систем (1) имеет место усиление этого результата в сторону достаточности.

1.3. Обозначим через $\mathcal{J}$ класс матриц $G_n : \mathbb{Z} \to \mathrm{Mat}\,(N, \mathbb{C})$ со свойствами

$$\begin{cases} G_n^* = G_n, \quad |\det G_n| \ge \mathrm{const} > 0, \\ G_n \ \text{ почти периодична,} \\ \text{эрмитова форма (3) индефинитна.} \end{cases} \tag{8}$$

Теорема. *Если для системы* (1) *с почти периодической матрицей* A_n *существует матрица* $G_n \in \mathcal{J}$ *такая, что*

1) $F_n \le 0$ $(n \in \mathbb{Z})$,

2) *форма* (4) *отлична от тождественного нуля на каждом решении* $x_n \ne 0$ *системы* (1): $\dot{v}(x_n, n) \not\equiv 0$,

то система (1) *э-дихотомична.*

Доказательство теоремы опирается на четыре леммы.

2. Подготовительные леммы

Далее $\|\cdot\|$ — норма в $\mathfrak{M}$, например, $\|A_n\| = \sup |A_n|$. Обозначим через $H[A]$ оболочку почти периодической матрицы A_n: замыкание в $\mathfrak{M}$ семейства сдвигов A_{n+k}, $k \in \mathbb{Z}$. Из данного выше определения почти периодичности следует, что $H[A]$ — компакт в $\mathfrak{M}$. Аналогично оболочка $H[A, G]$ прямоугольной матрицы (A_n, G_n) — компакт в $\mathfrak{M}^2$. Если $\mathcal{A}_n \in H[A]$, то $A_n \in H[\mathcal{A}]$.

Поставим в соответствие каждой паре матриц $(\mathcal{A}, \mathcal{G}) \in H[A, G]$ систему $x_{n+1} = \mathcal{A}_n x_n$ и эрмитовы формы

$$w(x, n) = \langle \mathcal{G}_n x, x \rangle, \quad \dot{w}(x, n) = \langle \mathcal{F}_n x, x \rangle, \quad \mathcal{F}_n = \mathcal{A}_n^* \mathcal{G}_{n+1} \mathcal{A}_n - \mathcal{G}_n. \tag{9}$$

Лемма 1. *Если пара* (A_n, G_n) *удовлетворяет условиям теоремы, то каждая пара* $(\mathcal{A}_n, \mathcal{G}_n) \in H[A, G]$ *удовлетворяет таким же условиям*:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_n \ \textit{ почти периодична,} \quad \mathcal{G}_n \in \mathcal{J}, \quad \mathcal{F}_n \le 0, \\ &\dot{w}(x_n, n) \not\equiv 0 \ \textit{ на каждом решении } x_n \ne 0 \textit{ системы } x_{n+1} = \mathcal{A}_n x_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Доказательство. В проверке нуждается индефинитность матрицы $\mathcal{G}_n$ и неравенство (10) для $\dot{w}$.

1. Из (8), в частности, следует существование таких постоянных $m_1, m_2 > 0$, что спектр G_n при каждом $n \in \mathbb{Z}$ лежит внутри отрезков

$$\Delta_+ = [m_1, m_2], \quad \Delta_- = [-m_2, -m_1], \tag{11}$$

при этом обе части спектра не пусты. Отсюда следует такое же утверждение для всех $\mathcal{G}_n \in H[G]$.

2. Пусть для некоторой пары $(\mathcal{A}_n, \mathcal{G}_n) \in H[A, G]$ не выполняется неравенство (10) для $\dot{w}$: существует такой вектор $x_0 \in E$, $x_0 \ne 0$, что на решении $x_n = V_n x_0$ системы $x_{n+1} = \mathcal{A}_n x_n$ с матрицей Коши V_n выполняется равенство

$$\dot{w}(x_n, n) = \langle V_n^* \mathcal{F}_n V_n x_0, x_0 \rangle \equiv 0, \tag{12}$$

где $\mathcal{F}_n$ — матрица (9). Поскольку $(A_n, G_n) \in H[\mathcal{A}, \mathcal{G}]$, то существует последовательность сдвигов $(\mathcal{A}_n^m, \mathcal{G}_n^m) = (A_{n+k_m}, G_{n+k_m})$ такая, что

$$(\mathcal{A}_n^m, \mathcal{G}_n^m) \to (A_n, G_n) \ \text{ в } \ \mathfrak{M}^2. \tag{13}$$

Обозначим через V_n^m матрицу Коши системы $x_{n+1} = \mathcal{A}_n^m x_n$:

$$V_n^m = V_{n+k_m} V_{k_m}^{-1}.$$

Из формулы (5) для матрицы Коши разностной системы легко получить, что в ситуации (13) при каждом $n \in \mathbb{Z}$ имеет место сходимость $V_n^m \to U_n$ $(m \to \infty)$, где U_n — матрица Коши системы (1). Построим последовательность векторов

$$f_m = \frac{V_{k_m} x_0}{|V_{k_m} x_0|}, \quad |f_m| = 1.$$

Выделив сходящуюся подпоследовательность и сохранив для нее те же обозначения, будем иметь $f_m \to f_0$ $(m \to \infty)$, $|f_0| = 1$. Подставив в (12) $n \sim n + k_m$ и разделив обе части равенства на $|V_{k_m} x_0|$, с учетом формулы для V_n^m получим равенство

$$\langle (V_n^m)^* \mathcal{F}_n^m V_n^m f_0, f_0 \rangle \equiv 0,$$

где $\mathcal{F}_n^m = (\mathcal{A}_n^m)^* \mathcal{G}_{n+1}^m \mathcal{A}_n^m - \mathcal{G}_n^m$. Переход к пределу при $m \to \infty$ дает

$$\langle U_n^* F_n U_n f_0, f_0 \rangle \equiv 0$$

или, что то же, $\dot{v}(x_n^0, n) \equiv 0$, где $x_n^0 = U_n f_0$ — ненулевое решение системы (1), что противоречит условию леммы. □

Построим в условиях теоремы компакт

$$K = H[A, G] \times S,$$

где S — единичная сфера в E. Поставим в соответствие каждому $n \in \mathbb{Z}$ и каждой точке $y = (\mathcal{A}_n, \mathcal{G}_n, z_0) \in K$ числа

$$\begin{aligned} w(n, y) &= \langle \mathcal{G}_n z_n(\mathcal{A}_n, z_0), z_n(\mathcal{A}_n, z_0) \rangle, \\ \dot{w}(n, y) &= \langle \mathcal{F}_n z_n(\mathcal{A}_n, z_0), z_n(\mathcal{A}_n, z_0) \rangle, \end{aligned} \tag{14}$$

где $z_n(\mathcal{A}_n, z_0)$ — решение задачи Коши

$$z_{n+1} = \mathcal{A}_n z_n, \quad z|_{n=0} = z_0,$$

$\mathcal{F}_n$ — матрица из (9). Ввиду непрерывной зависимости решений этой задачи от коэффициентов и начальных данных функции (14) непрерывны по y в K при каждом $n \in \mathbb{Z}$. В силу леммы 1 $\dot{w}(n, y) \not\equiv 0$ при каждой точке $y \in K$.

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы существует интервал $\Delta_0 \subset \mathbb{Z}$ такой, что при каждой точке $y \in K$ функция $\dot{w}(t, y) \neq 0$ хотя бы при одном $n \in \Delta_0$.*

Доказательство. Функция $\varphi : K \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\varphi(y) = \inf\{n \in \mathbb{Z} : \dot{w}(n, y) \neq 0\},$$

полунепрерывна сверху, поэтому ограничена сверху:

$$\beta = \sup \varphi(y) < \infty.$$

Далее, функция

$$\psi(y) = \sup\{n \le \beta : \dot{w}(n, y) \neq 0\}$$

полунепрерывна снизу, поэтому ограничена снизу:

$$\alpha = \inf \psi(y) > -\infty.$$

В качестве искомого интервала Δ_0 можно выбрать любой интервал, содержащий целые точки отрезка $[\alpha, \beta]$. □

Далее будем без ограничения общности считать

$$\Delta_0 = (0, l) \subset \mathbb{Z}.$$

Лемма 3. *При выполнении условий теоремы для каждой точки $y \in K$ существует точка $n(y) \in \Delta_0$ такая, что*

$$\dot{w}(n(y), y) \leq -\gamma; \quad \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{15}$$

Доказательство. Функция

$$f(y) = \min_{n \in \Delta_0} \dot{w}(n, y)$$

непрерывна на K и с учетом лемм 1, 2 $f(y) < 0$ на K, поэтому $\max f(y) < 0$. Обозначая $\max f(y) = -\gamma$, через $n(y)$ — значение $n \in \Delta_0$, на котором реализуется $\min \dot{w}(n, y)$, получим (15). □

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы, x_n — ненулевое решение системы (1). Тогда для каждого $k \in \mathbb{Z}$ существует такое число $m_k \in (kl, (k+1)l) \subset \mathbb{Z}$, что выполняется неравенство

$$\dot{v}(x_{m_k}, m_k) \leq -\gamma |x_{kl}|^2,$$

где $\dot{v}(x, n)$ — форма (4), γ — постоянная из (15).

Действительно, $y_k = \left(A_{n+kl}, G_{n+kl}, \frac{x_{kl}}{|x_{kl}|}\right) \in K$. Из (14) следует

$$\dot{w}(n, y_k) = \dot{v}\big(x_{n+kl}/|x_{kl}|, n + kl\big).$$

Обозначим $m_k = n(y_k) + kl$. Подставляя в последнее равенство $n = n(y_k)$ и учитывая, что $\dot{w}(n(y_k), y_k) \leq -\gamma$, получаем требуемое.

Лемма 4. *При выполнении условий теоремы требование* 2) *в определении э-дихотомии является следствием требования* 1).

Доказательство. Зафиксируем $n_0 \in \mathbb{Z}$ и обозначим через $x(n, z)$ решение x_n системы (1) с начальным условием $x_{n_0} = z$, $z \in E$. Ввиду почти периодичности матрицы A_n получим $a = \|A_n\| < \infty$, поэтому имеет место оценка

$$|x(n_0 + m, z)| \leq a^m |z| \quad (m \geq 0). \tag{16}$$

Пусть $z_k \in E_k(n_0)$, $|z_k| = 1$ $(k = 1, 2)$. Из оценок (7) следует

$$\begin{aligned} |x(n_0 + m, z_1)| &\leq \mu_1 e^{-\nu_1 m} |z_1| = \mu_1 e^{-\nu_1 m}, \\ |x(n_0 + m, z_2)| &\geq \mu_2^{-1} e^{\nu_2 m} |z_2| = \mu_2^{-1} e^{\nu_2 m} \quad (m \geq 0). \end{aligned} \tag{17}$$

Из (16), (17) при $m \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| \geq a^{-m} |x(n_0 + m, z_1 + z_2)| = a^{-m} |x(n_0 + m, z_1) + x(n_0 + m, z_2)| \geq \\ \geq a^{-m} (|x(n_0 + m, z_2)| - |x(n_0 + m, z_1)|) \geq b_m, \end{aligned}$$

где $b_m = a^{-m}(\mu_2^{-1} e^{\nu_2 m} - \mu_1 e^{-\nu_1 m})$. Отсюда с учетом определения (6) получаем

$$\mathrm{Sn}\,(E_1(n_0), E_2(n_0)) \geq b_m.$$

Так как $b_m > 0$ при достаточно большом m, утверждение леммы доказано. □

3. Доказательство теоремы

В условиях теоремы через P_n^+, P_n^- обозначим спектральные проекторы, отвечающие положительной и отрицательной частям спектра G_n:

$$P_n^{\pm} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\pm} (\lambda I - G_n)^{-1}\, d\lambda,$$

где γ_+, γ_- — проходимые в положительном направлении окружности в полуплоскостях $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$, окружающие отрезки Δ_+, Δ_- из (11). Построим последовательности подпространств

$$E_n^+ = U_n^{-1} P_n^+ E, \quad E_n^- = U_n^{-1} P_n^- E, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Выбрав в $E_n^{\pm}$ ортонормированные базисы

$$(e_{1n}^+, \dots, e_{N_1 n}^+), \quad (e_{1n}^-, \dots, e_{N_2 n}^-), \quad N_1 + N_2 = N,$$

и выделив сходящиеся подпоследовательности, построим предельные ортонормированные цепочки

$$(e_{1n_i}^+, \dots, e_{N_1 n_i}^+) \to (e_1^+, \dots, e_{N_1}^+) \quad (n_i \to +\infty),$$
$$(e_{1n_j}^-, \dots, e_{N_2 n_j}^-) \to (e_1^-, \dots, e_{N_2}^-) \quad (n_j \to -\infty).$$

Обозначим через E_1, E_2 линейные оболочки предельных цепочек $\{e_i^+\}$, $\{e_i^-\}$. Покажем, что E_1, E_2 удовлетворяют требованиям в определении э-дихотомии. В силу леммы 4 достаточно проверить выполнение оценок (7).

3.1. Пусть $x_0 \in E_1$, $x_0 \neq 0$, $x_n = U_n x_0$. Обозначим через v_n, $\dot v_n$ формы (3), (4) на решении x_n:

$$v_n = \langle G_n U_n x_0, U_n x_0\rangle, \quad \dot v_n = v_{n+1} - v_n = \langle F_n U_n x_0, U_n x_0\rangle.$$

Ввиду условия 1) теоремы функция v_n не возрастает. Из определения подпространства E_1 следует $x_0 = \lim f_i$ при некоторых $f_i \in E_{n_i}^+$,

$$f_i = U_{n_i}^{-1} g_i, \quad g_i \in P_{n_i}^+ E, \quad g_i \neq 0.$$

При $n \le n_i$ с учетом 1) имеем

$$\langle G_n U_n f_i, U_n f_i\rangle \ge \langle G_{n_i} U_{n_i} f_i, U_{n_i} f_i\rangle = \langle G_{n_i} g_i, g_i\rangle \ge m_1 |g_i|^2,$$

где m_1 — постоянная из (11), поэтому при любом $n \in \mathbb{Z}$

$$v_n = \lim_{n_i \to +\infty} \langle G_n U_n f_i, U_n f_i\rangle \ge 0.$$

3.2. В силу следствия из леммы 3 при каждом $k \in \mathbb{Z}$ существует целое число $m_k \in (kl, (k+1)l)$ такое, что

$$\dot v_{m_k} = v_{m_k+1} - v_{m_k} \le -\gamma |x_{kl}|^2 \quad (\gamma = \text{const} > 0), \tag{18}$$

откуда с учетом монотонности v_n следует

$$v_{kl} \ge v_{(k+2)l} + \gamma |x_{kl}|^2, \tag{19}$$

поэтому тем более

$$v_{kl} \ge \lim_{n \to +\infty} v_n + \gamma |x_{kl}|^2.$$

Покажем, что предел в правой части равен нулю. Применив к $v_{(k+2)l}$ в (19) это неравенство с заменой k на $k+2$ и продолжив этот процесс, получим в пределе неравенство

$$v_{kl} \geq \lim_{n\to+\infty} v_n + \gamma \sum_{m=0}^{\infty} |x_{(k+2m)l}|^2,$$

которое возможно, если ряд в правой части сходится, в частности, $|x_{(k+2m)l}|^2 \to 0$ при $m \to +\infty$. Поэтому

$$v_{(k+2m)l} = \langle G_{k+2m} x_{k+2m}, x_{k+2m}\rangle \leq \|G_n\| |x_{k+2m}|^2 \to 0 \quad (m \to +\infty),$$

откуда следует требуемое. Получим

$$v_{kl} \geq \gamma |x_{kl}|^2 \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{20}$$

Из (20), в частности, следует $v_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

3.3. При любых целых p, q, $p < q$, имеет место неравенство

$$v_{ql} \leq e^{-r(q-p)} v_{pl}, \quad r = \gamma \|G\|^{-1}. \tag{21}$$

В самом деле, с учетом $m_k, m_k+1 \in [kl, (k+1)l]$, $\dot v_n \leq 0$, $\ln x \leq x-1$ имеем

$$\ln\frac{v_{ql}}{v_{pl}} = \sum_{k=p}^{q-1} \ln\frac{v_{(k+1)l}}{v_{kl}} \leq \sum_{k=p}^{q-1} \ln\frac{v_{m_k+1}}{v_{m_k}} \leq \sum_{k=p}^{q-1}\left(\frac{v_{m_k+1}}{v_{m_k}} - 1\right) = \sum_{k=p}^{q-1} \frac{\dot v_{m_k}}{v_{m_k}} \leq \sum_{k=p}^{q-1} \frac{\dot v_{m_k}}{v_{kl}},$$

откуда ввиду (18) и оценки $v_{kl} \leq \|G\| |x_{kl}|^2$ вытекает (21).

3.4. Ввиду ограниченности матрицы A_n и условия (2) имеем $\|A_n^{-1}\| < \infty$. Обозначим $b = \max\{\|A_n^{-1}\|, 1\}$. Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$. Выберем целые p, q, $q > p$ так, чтобы выполнялись условия

$$[m,n] \subset [pl, ql], \quad m - pl \leq l, \quad ql - n \leq l.$$

Учитывая оценки $|x_{pl}| \leq b^l |x_m|$, $|x_n| \leq b^l |x_{ql}|$ и (20), (21) получим цепочку неравенств

$$|x_n|^2 \leq b^{2l}|x_{ql}|^2 \leq \gamma^{-1} b^{2l} v_{ql} \leq \gamma^{-1} b^{2l} e^{-r(p-q)} v_{pl} \leq \gamma^{-1}\|G_n\| b^{2l} e^{-r(p-q)} |x_{pl}|^2 \leq r^{-1} b^{4l} e^{-r(p-q)} |x_m|,$$

откуда ввиду $q - p \geq (n-m)/l$ следует

$$|x_n| \leq \mu_1 e^{-\nu_1(n-m)} |x_m|, \quad \mu_1 = \frac{b^{2l}}{\sqrt{r}}, \quad \nu_1 = \frac{r}{2l}. \tag{22}$$

Первая оценка (7) доказана.

3.5. Выполняя в (1) замены x_n на u_{-n} и $-n$ на $n+1$, получим $u_{n+1} = B_n u_n$, $B_n = A_{-n-1}^{-1}$. Ввиду условия (2) матрица B_n почти периодична. Повторяя проведенные в пп. 3.1–3.4 рассуждения с заменой A_n на B_n, G_n на $\Gamma_n = G_{-n-1}$, E_1 на E_2, для $|u_n|$ получим оценку вида (22), равносильную оценке (7).

Из (7), в частности, следует $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, поэтому с учетом $\dim E_1 + \dim E_2 = N$ имеет место прямое разложение $E = E_1 \oplus E_2$.

Теорема доказана.

Пример. Пусть в (1) $x_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$,

$$A_n = \begin{bmatrix} \sqrt{1+a_n} & \sqrt{a_n^{-1}} \\ 1 & \sqrt{1+a_n^{-1}} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon \leq a_n < 1 \quad (\varepsilon > 0), \tag{23}$$

a_n — почти периодическая функция $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Покажем, что система $x_{n+1} = A_n x_n$ э-дихотомична.

Ввиду $a_n \geq \varepsilon$ матрица A_n почти периодична, $\det A_n = \sqrt{a_n} \geq \sqrt{\varepsilon}$. Положим $G = \operatorname{diag}(1; -1)$. Тогда

$$F_n = A_n^* G A_n - G = \operatorname{diag}(a_n - 1; 0) \leq 0.$$

Нетрудно убедиться: если $x_n = (\xi_n, \eta_n)$ – ненулевое решение системы $x_{n+1} = A_n x_n$, то $\xi_n \not\equiv 0$, поэтому

$$\dot{v}(x_n, n) = x_n^* F_n x_n = (a_n - 1)\xi_n^2 \not\equiv 0.$$

Итак, выполнены все условия теоремы, тем самым утверждение доказано. Отметим, что здесь не выполняется условие $F_n \leq -mI$ $(m > 0)$, гарантирующее выполнение свойства э-дихотомии при любой a_n со свойством (23).

Основной результат работы анонсирован в [15].

Литература

[1] Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова* (Наука, М., 1970).

[2] Добровольский С.М., Котюргина А.С., Романовский Р.К. *Об устойчивости решений линейных систем с почти периодической матрицей*, Матем. заметки **52** (6), 10–14 (1992).

[3] Добровольский С.М., Романовский Р.К. *Метод функций Ляпунова для почти периодических систем*, Матем. заметки **62** (1), 151–153 (1997).

[4] Кириченова О.В., Котюргина А.С., Романовский Р.К. *Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами*, Сиб. матем. журн. **37** (1), 170–174 (1996).

[5] Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения* (Изд-во Моск. ун-та, М., 1978).

[6] Стругова Т.М. *Об устойчивости линейных стохастических разностных систем с почти периодическими коэффициентами*, Матем. заметки **78** (3), 472–475 (2005).

[7] Кириченова О.В. *Об устойчивости решений нелинейных почти периодических систем разностных уравнений*, Сиб. матем. журн. **39** (1), 45–48 (1998).

[8] Алексенко Н.В. *Устойчивость решений почти перидических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа*, Изв. вузов. Математика, №2, 3–6 (2000).

[9] Алексенко Н.В., Романовский Р.К. *Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами*, Дифференц. уравнения **37** (2), 147–153 (2001).

[10] Романовский Р.К., Троценко Г.А. *Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами*, Сиб. матем. журн. **44** (2), 444–453 (2003).

[11] Троценко Г.А. *Об устойчивости решений почти периодической системы функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа*, Изв. вузов. Математика, №6, 77–81 (2003).

[12] Добровольский С.М., Рогозин А.В. *Прямой метод Ляпунова для почти периодической разностной системы на компакте*, Сиб. матем. журн. **46** (1), 98–105 (2005).

[13] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* (Наука, М., 1970).

[14] Майзель А.Д. *Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений*, Тр. УрПИ. Сер. матем. **51**, 20–50 (1954).

[15] Романовский Р.К., Бельгарт Л.В. *Об экспоненциальной дихотомии линейных разностных систем с почти периодической матрицей*, Матем. заметки **84** (4), 638–640 (2008).

Р.К. Романовский

профессор, кафедра основ теории механики и автоматического управления,
Омский государственный технический университет,
просп. Мира, д. 11, г. Омск, 644050,

Л.В. Бельгарт

старший преподаватель, кафедра высшей математики,
Омский государственный технический университет,
просп. Мира, д. 11, г. Омск, 644050,

e-mail: Belgart@rambler.ru

R.K. Romanovskii

Professor, Chair of Fundamentals of the Theory of Mechanics and Automatic Control,
Omsk State Technical University,
11 Mira Ave., Omsk, 644050 Russia

L.V. Belgart

Senior Lecturer, Chair of Higher Mathematics,
Omsk State Technical University,
11 Mira Ave., Omsk, 644050 Russia,

e-mail: Belgart@rambler.ru