УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 4
С. 453–468

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 539.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

И.Б. Бадриев[1], *М.В. Макаров*[1,2], *В.Н. Паймушин*[1,2]

[1]*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

[2]*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия*

Аннотация

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем в одномерной геометрически нелинейной постановке. Предполагаем, что в правом торцевом сечении края несущих слоев жестко защемлены и отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом, на левом торцевом сечении края несущих слоев пластины шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы, склеенной с торцевым сечением заполнителя, к срединной поверхности первого несущего слоя с левого торца приложена нагрузка. Исходя из обобщенного принципа Лагранжа, обобщенная постановка сформулирована в виде операторного уравнения в пространстве Соболева. Установлены свойства оператора – псевдомонотонность и коэрцитивность. Это дало возможность доказать теорему существования решения. Предложен двухслойный итерационный метод решения задачи. На основе дополнительных свойств оператора – квазипотенциальности и ограниченной липшиц-непрерывности – исследована сходимость метода. Установлены пределы изменения итерационного параметра, обеспечивающие сходимость. Разработан комплекс программ, с помощью которого для модельной задачи о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины проведены численные эксперименты. Проведено табулирование как по продольной, так и по поперечной нагрузкам. Полученные результаты показывают, что в плане весового совершенства при рассмотренном виде нагружения наиболее рациональной и равнонапряженной является трехслойная пластина несимметричного строения с неодинаковыми толщинами несущих слоев.

Ключевые слова: трехслойная пластина, трансверсально-мягкий заполнитель, обобщенная постановка, теорема разрешимости, итерационный метод, теорема сходимости, численный эксперимент

Введение

Разработка, внедрение и постоянное расширение сферы использования композитных материалов стимулируют развитие исследований по методам расчета конструкций из них. В последние десятилетия происходит рост производства искусственных композитов на основе высокопрочных волокон и различных полимерных матриц. Согласно прогнозам такая тенденция сохранится и далее. Интерес к композитным материалам вызван высоким уровнем их конструктивных свойств: прочности, жесткости и т. п. Для того чтобы облегчить конструкцию, не уменьшив при этом ее несущую способность, используются тонкостенные элементы в виде оболочек. Такие оболочки широко распространены в инженерных сооружениях,

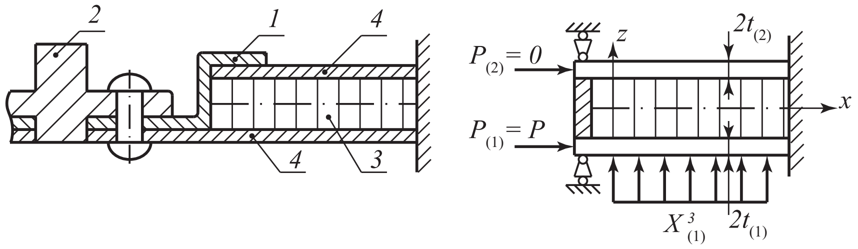


Рис. 1. Трехслойная пластина с трансверсально-мягким заполнителем: 1 – подкрепляющая несущие слои диафрагма; 2 – жесткий опорный элемент; 3 – заполнитель; 4 – внешние несущие слои

машиностроении [1–3], судостроении [4, 5], авиационной промышленности и ракетной технике [6–8].

В настоящей работе изучается в одномерной постановке геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения нелинейной модели Кирхгофа – Лява, в заполнителе – уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям в поперечном направлении. Схема нагружения и закрепления пластины представлена на рис. 1.

Обобщенная постановка сформулирована в виде операторного уравнения в пространстве Соболева, которое возникает при вычислении стационарных точек обобщенного функционала Лагранжа, построенного в [9, 10] для описания напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Исследована корректность обобщенной постановки на основе установленных свойств псевдомонотонности [11, 12] и коэрцитивности [12, 13] оператора. Для решения задачи используется предложенный в [14] двухслойный итерационный процесс. Исследована сходимость метода. Для модельной задачи проведены численные эксперименты и осуществлен анализ их результатов.

Случай жесткого закрепления трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем рассмотрен в работах [15–18], в которых изучались как вопросы корректности задач, так и численного моделирования. Геометрически линейные, но физически нелинейные задачи при ограничении, соответствующем идеальной упруго-пластической модели для заполнителя, изучены в [19–22].

Отметим, что в [24–27] исследованы обобщенные постановки задач теории мягких сетчатых оболочек при наличии ограничений, а также методы их численного решения.

1. Постановка задачи

Пусть a – ширина пластины, $2t$, $2t_{(k)}$ – толщины заполнителя и k-го слоя соответственно (здесь и далее предполагаем, что $k = 1, 2$), $X^1_{(k)}$, $X^3_{(k)}$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k-го слоя, $M^1_{(k)}$ – поверхностные моменты внешних сил, приведенные к срединной поверхности k-го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k-го слоя соответственно, $T^{11}_{(k)}$, $M^{11}_{(k)}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k-м слое соответственно, $H_{(k)} = h + h_{(k)}$, q^1 – контактные реактивные усилия взаимодействия (касательные напряжения) в заполнителе, постоянные по его толщине.

Предполагаем, что в правом торцевом сечении края несущих слоев жестко защемлены и отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом, на левом торцевом сечении края несущих слоев пластины шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы, склеенные с торцевым сечением заполнителя, к срединной поверхности первого несущего слоя сЁлевого торца приложена нагрузка P, так что для уравнений уточненной теории трехслойных пластин и оболочек, предложенных в [9, 10], выполнены граничные условия

$$T^{11}_{(0)} = P, \quad w^k(0) = d^2 w^k(0)/dx^2 = 0, \quad k = 1, 2, \quad dq^1(0)/dx = 0,$$

$$w^k(a) = dw^k(a)/dx = 0, \quad u^k(a) = 0, \quad k = 1, 2, \quad q^1(a) = 0.$$

Рассматривается геометрически нелинейная постановка, то есть предполагаем, что

$$T^{11}_{(k)} = B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + 0.5 \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right), \quad M^{11}_{(k)} = D_{(k)} \, \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2}, \quad k = 1, 2,$$

где $B_{(k)} = 2t_{(k)} E^{(k)}/(1 - \nu^{(k)}_{12} \nu^{(k)}_{21})$ – жесткость k-го слоя на растяжение-сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu^{(k)}_{12}$, $\nu^{(k)}_{21}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k-го несущего слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} t^2_{(k)}/3$ – изгибная жесткость k-го слоя.

Обозначим через $U = \big(w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}\big)$ вектор перемещений точек срединной поверхности k-го несущего слоя. Следуя [9, 10, 28], рассмотрим функционал $L(U, q^1) = \Pi(U, q^1) - A_e(U, q^1) - A_q(U, q^1)$, где

$$\Pi(U, q^1) = \frac{1}{2} \int\limits_0^a \left\{ \sum_{k=1}^{2} \left[B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right)^2 + D_{(k)} \left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \right)^2 \right] + \right.$$
$$\left. + c_1 (q^1)^2 + c_2 \left(\frac{dq^1}{dx} \right)^2 + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \right\} dx$$

есть потенциальная энергия деформации, $c_1 = 2t/G_{13}$, $c_2 = t^3/(3E_3)$, $c_3 = E_3/(2t)$, G_{13} и E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя,

$$A_e(U, q^1) = \int\limits_0^a \sum_{k=1}^{2} \left[X^1_{(k)} u^{(k)} + X^3_{(k)} w^{(k)} + M^1_{(k)} \, \frac{dw^{(k)}}{dx} \right] dx + P u^{(1)}(0)$$

есть работа внешних сил и моментов,

$$A_q(U, q^1) = \int\limits_0^a \left[(u^{(1)} - u^{(2)}) - \sum_{k=1}^{2} H_{(k)} \, \frac{dw^{(k)}}{dx} + c_1 \, q^1 - c_2 \frac{d^2 q^1}{dx^2} \right] q^1 \, dx$$

есть работа неизвестных контактных касательных напряжений на соответствующих перемещениях. В [29] установлено, что среди перемещений точек срединной поверхности U и касательных напряжений в заполнителе q^1 в состоянии равновесия реализуются только те, для которых функционал Лагранжа имеет стационарные значения.

2. Обобщенная постановка задачи

Введем в рассмотрение пространства Соболева [30] $V_1 = \{\eta \in W^{(1)}_2(0, a) : \eta(a) = 0\}$, $V_2 = \{z \in W^{(2)}_2(0, a) \, : \, z(0) = 0, \, z(a) = 0, dz(a)/dx = 0\}$ со скалярными произведениями

$$(u,v)_k = \int\limits_0^a \frac{d^k u(x)}{dx^k}\,\frac{d^k v(x)}{dx^k}\,dx, \quad k=1,2,$$

обозначим $V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$. Для определения стационарных значений L приравняем нулю его производные Гато [31]. При этом обобщенная постановка задачи формулируется в виде интегрального тождества относительно функций из пространства Соболева $W = V \times V_1$, то есть стационарные точки (U,q^1) функционала L являются решением вариационного уравнения

$$b((U,q^1),(Z,y)) = f(Z) \quad \forall (Z,y)\in W, \tag{1}$$

где форма $b(\cdot,\cdot)$, заданная на $W\times W$, и функционал f, заданный на V, определяются по формулам

$$b((U,q^1),(Z,y)) = \int\limits_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)}\Big[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2}\Big(\frac{dw^{(k)}}{dx}\Big)^2\Big]\frac{d\eta^{(k)}}{dx}\,dx +$$

$$+\int\limits_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)}\Big[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2}\Big(\frac{dw^{(k)}}{dx}\Big)^2\Big]\frac{dw^{(k)}}{dx}\,\frac{dz^{(k)}}{dx}dx + \int\limits_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)}\frac{d^2w^{(k)}}{dx^2}\,\frac{d^2z^{(k)}}{dx^2}\,dx +$$

$$+\,c_3\int\limits_0^a (w^{(2)}-w^{(1)})(z^{(2)}-z^{(1)})\,dx + \int\limits_0^a \Big\{\sum_{k=1}^2 H_{(k)}\,\frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)}-\eta^{(1)})\Big\}q^1\,dx +$$

$$+\int\limits_0^a \Big\{\Big[\sum_{k=1}^2 H_{(k)}\,\frac{dw^{(k)}}{dx} + (u^{(2)}-u^{(1)}) + c_1\,q^1\Big]y + c_2\,\frac{dq^1}{dx}\,\frac{dy}{dx}\Big\}dx$$

$$\forall\, Z = (z^{(1)},z^{(2)},\eta^{(1)},\eta^{(2)})\in V \quad \forall\, y\in V_1, \tag{2}$$

$$f(Z) = \int\limits_0^a \sum_{k=1}^2 \Big[X^1_{(k)}\,\eta^{(k)} + M^1_{(k)}\,\frac{dz^{(k)}}{dx} + X^3_{(k)}\,z^{(k)}\Big]\,dx + P\eta^{(1)}(0) \quad \forall\, Z\in V. \tag{3}$$

Форма $b(\cdot,\cdot)$, задаваемая (2), очевидно, линейна по второму аргументу. Пользуясь теоремами вложения Соболева [30], нетрудно проверить что она по второму аргументу непрерывна. Поэтому в силу теоремы Рисса–Фишера форма $b(\cdot,\cdot)$ порождает оператор $A: W\to W$, определяемый формулой

$$b((U,q^1),(Z,y)) = (A(U,q^1),(Z,y))_W \quad \forall\,(Z,y)\in W, \tag{4}$$

где $(\cdot,\cdot)_W$ – скалярное произведение в W. Функционал f, задаваемый формулой (3), порождает элемент $F\in V$ по формуле $(F,Z)_V = f(Z)$, $Z\in V$.

Таким образом, задача (1) может быть записана в виде операторного уравнения

$$A(U,q^1) = (F,0). \tag{5}$$

Напомним, что оператор $A: Y\to Y$ называется псевдомонотонным [11, 12], если он ограничен и для любой последовательности $\{U_n\}_{n=1}^{+\infty}$, сходящейся слабо в Y к элементу U_*, из неравенства $\limsup\limits_{n\to+\infty}(AU_n, U_n-U_*)_Y \le 0$ вытекает, что $\liminf\limits_{n\to+\infty}(AU_n,U_n-Z)_Y \ge (AU_*,U_*-Z)_Y$ для любого $Z\in Y$. Оператор A называется коэрцитивным [12, 13], если $(AU,U)_Y\to+\infty$ при $\|U\|_Y\to+\infty$.

Справедлива

Лемма 1. *Оператор* $A: W \to W$, *определяемый формулами* (2), (4), *является ограниченным.*

Доказательство. Используя теоремы вложения Соболева [30], обобщенное неравенство Гельдера [32], получаем, что для любых (U, q^1), (Z, y) из W

$$|(A(U,q^1),(Z,y))_W| \le \alpha_1 \|(U,q^1)\|_W \left(1 + \|(U,q^1)\|_W + \|(U,q^1)\|_W^2\right) \|(Z,y)\|_W$$

(α_1 – положительная постоянная, зависящая от a, G_{13}, E_3, $H_{(k)}$, $E_{(k)}$, $k = 1, 2$, и констант в неравенствах вложения), откуда и вытекает ограниченность оператора A. □

Лемма 2. *Оператор* $A: W \to W$, *определяемый формулами* (2), (4), *является пседомонотонным.*

Доказательство. Ограниченность оператора A установлена в лемме 1. Имеем

$$(A(U,q^1),(U,q^1))_W = \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx}\right)^2 dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \left(\frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2}\right)^2 dx +$$
$$+ c_2 \int_0^a \left(\frac{dq^1}{dx}\right)^2 dx + \frac{3}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \frac{du^{(k)}}{dx} dx \left(\frac{dw^{(k)}}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx}\right)^4 dx +$$
$$+ c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})^2 dx + \frac{3}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} q^1 dx + 2 \int_0^a (u^{(2)} - u^{(1)}) q^1\, dx +$$
$$+ c_1 \int_0^a (q^1)^2 dx = \sum_{j=1}^9 I_j(U, q^1).$$

Пусть $(U_n, q_n^1) \rightharpoonup (U_*, q_*^1)$ в W при $n \to +\infty$. В силу слабой полунепрерывности снизу нормы (см., например, [33, 34]) имеем, что

$$\liminf_{n\to+\infty} (I_j(U_n, q_n^1) \ge I_j(U_*, q_*^1), \quad j = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Применяя теорему Реллиха–Кондрашова [30, 35], получаем

$$\begin{gathered} \lim_{n\to+\infty} (I_j(U_n, q_n^1) = I_j(U_*, q_*^1), \quad j = 4, 5, \ldots, 9, \\ \lim_{n\to+\infty} (A(U_n, q_n^1)), (Z, y))_W = (A(U_*, q_*^1)), (Z, y))_W \quad \forall\, (Z, y) \in W. \end{gathered} \tag{7}$$

Принимая теперь во внимание свойста нижних пределов (см., например, [36]) и соотношения (6), (7), окончательно имеем

$$\liminf_{n\to+\infty} (A(U_n, q_n^1), (U_n, q_n^1) - (Z, y))_W \ge (A(U_*, q_*^1), (U_*, q_*^1) - (Z, y))_W \quad \forall\, (Z, y) \in W,$$

то есть оператор A является псевдомонотонным. □

Лемма 3. *Оператор* $A: W \to W$, *определяемый формулами* (2), (4), *является коэрцитивным.*

Доказательство. Справедливость утверждения леммы устанавливается по аналогии с [37, 38]. $\square$

Из лемм 1–3 и общих результатов теории монотонных операторов (см., например, [12, 13, 35] вытекает, что справедлива

Теорема 1. *Задача* (5) *имеет по крайней мере одно решение* $(U, q^1) \in W$.

3. Итерационный метод и численные эксперименты

Будем говорить, что оператор $A : Y \to Y$ удовлетворяет условию типа ограниченной липшиц-непрерывности (сравни с [35, 39]), если для любых $U,\, Z \in Y$ справедливо неравенство

$$\|AU - AZ\|_Y \le \mu(R)\Phi(\|U - Z\|_Y), \tag{8}$$

где $R = \max\{\|U\|_Y, \|Z\|_Y\}$, μ – неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, $\Phi : [0, +\infty) \to \to [0, +\infty)$ – непрерывная возрастающая функция, удовлетворяющая условиям $\Phi(0) = 0$, $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \Phi(\xi) = +\infty$.

Напомним, что оператор $A : Y \to Y$ называется квазипотенциальным [40, 41], если

$$\int\limits_0^1 \Big[(A(t(U+Z)), U+Z)_Y - (A(tU), U)_Y\Big] dt = \int\limits_0^1 (A(U+tZ), Z)_Y \, dt \quad \forall\, U, Z \in Y. \tag{9}$$

Справедлива

Лемма 4. *Оператор* $A : W \to W$, *определяемый формулами* (2), (4), *удовлетворяет условию* (8).

Доказательство. Снова, как и при доказательстве леммы 1, используя теоремы вложения Соболева и обобщенное неравенство Гельдера, по аналогии с [42] получаем, что для любых (U, q^1), (Z, y), (U_*, q^1_*) из W

$$|(A(U, q^1) - A(Z, y), (U_*, q^1_*))_W| \le \alpha_2(1 + R + R^2)\|(U_*, q^1)_*\|_W \|(U, q^1) - (Z, y)\|_W$$

(α_2 – положительная постоянная, зависящая от a, G_{13}, E_3, $H_{(k)}$, $E_{(k)}$, $k = 1, 2$, и констант в неравенствах вложения, $R = \max\{\|U\|_Y, \|Z\|_Y\}$), откуда и вытекает, что оператор A удовлетворяет условию ограниченной липшиц-непрерывности (8) с функциями $\mu(\xi) = \alpha_2(1 + \xi + \xi^2)$, $\Phi(\xi) = \xi$. $\square$

Лемма 5. *Оператор* $A : W \to W$, *определяемый формулами* (2), (4), *является квазипотенциальным.*

Доказательство. Справедливость соотношения (9) для оператора A, порождаемого соотношениями (2), (4), устанавливается по аналогии с [24]. $\square$

Для решения задачи (5) будем использовать следующий двухслойный процесс [43–46]. Пусть $(U_0, q^1_0) \in W$ – заданное начальное приближение. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ найдем (U_{n+1}, q^1_{n+1}) как решение задачи

$$J((U_{n+1}, q^1_{n+1}) - (U_n, q^1_n)) = \tau((F, 0) - A(U_n, q^1_n)), \tag{10}$$

где $J : W \to W$ – оператор двойственности [12], порождаемый калибровочной функцией Φ из условия (8), $\tau > 0$ – итерационный параметр.

Обозначим

$$\Psi(Z,y)=\int_0^1 (A(\xi(Z,y)),(Z,y))_W d\xi-(F,Z)_V,$$

$$K_0=\sup\{(Z,y)\in W:\Psi(Z,y)\le\Psi(U_0,q_0^1)\},$$

$$R_0=\sup_{(Z,y)\in K_0}\{\|(Z,y)\|_W\},\quad R_1=\sup_{(Z,y)\in K_0}\{\|A(Z,y)-(F,0)\|_W\}.$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $0<\tau<\min\{1,\mu_0\}$, *где* $\mu_0=\mu(R_0+R_1)$, μ *– функция из условия (8). Тогда итерационная последовательность* $\left\{(U_n,q_n^1)\right\}_{n=1}^{+\infty}$, *построенная согласно* (10), *ограничена в* W *и любая ее слабо предельная точка является решением задачи* (5).

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы доказывается по аналогии с [39, 44] (см. также [35, 42]).

□

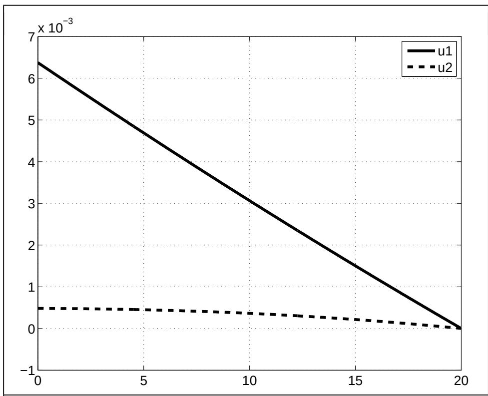
Замечание 1. Для рассматриваемой задачи оператор двойственности J имеет вид

$$J=\begin{pmatrix}\triangle^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \triangle^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\triangle & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\triangle & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \triangle\end{pmatrix}.$$

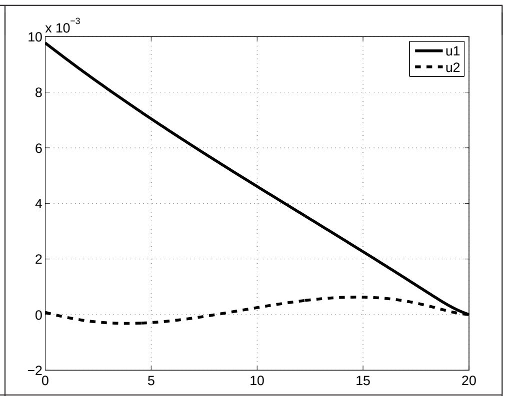
Однако, поскольку величины a, G_{13}, E_3, $H_{(k)}$, $E_{(k)}$, $k=1,2$, положительны и ограничены, то в качестве оператора J можно взять линейную часть оператора A.

Предложенный метод (10) был реализован численно. Предварительно построены конечно-разностные аппроксимации [47] задачи и метода. Был разработан комплекс программ в среде Matlab, проведены расчеты для модельных. Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи: $a=20$ см, $2t=2$ см, $2t_{(k)}=0.05$ см, $E^{(k)}=133\cdot10^3$ МПа, $X^1_{(k)}=0$, $\nu_{12}^{(k)}=\nu_{21}^{(k)}=0.3$, $k=1,2$, $X^3_{(2)}=$ $=0$, $G_{13}=25$ МПа, $E_3=50$ МПа, итерационный параметр τ, оптимальный по числу итераций, требуемых для достижения заданной точности зависит от табулируемой характеристики; число точек сетки $N=128$, начальное приближение U_0 задавалось нулевым. Результаты расчетов приведены На рис. 1 и 2.

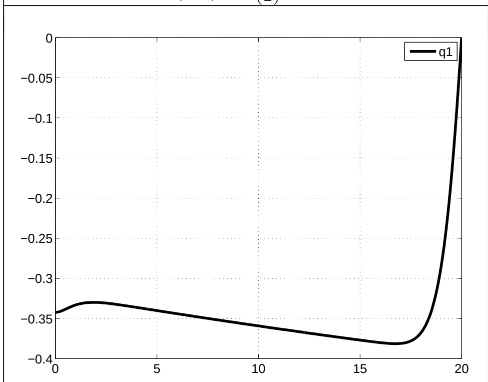
Из рисунков видно, что при заданном уровне осевой сжимающей силы P по мере увеличения поперечной нагрузки $X^3_{(1)}$ наблюдается незначительное изменение осевого перемещения $u^{(2)}$, причем $\max|u^{(2)}|\gg\max|u^{(1)}|$, а при $X^3_{(1)}=0$ незначительным является также и включение второго несущего слоя в восприятие внешней нагрузки P. Формирование в заполнителе поперечных касательных напряжений q^1 главным образом обусловлено действием поперечной нагрузки $X^3_{(1)}$, а мембранных усилий в несущих слоях – действием как усилия P, так и $X^3_{(1)}$. При рассмотренном виде комбинированного нагружения пластины наиболее напряженным является первый несущий слой, в котором формируется переменное по длине сжимающее мембранное усилие $T^{11}_{(1)}$ с максимальным значением в окрестности середины пластины. Именно этот слой может терять устойчивость по смешанной изгибной форме [48] с максимальным амплитудным значением прогиба $w^{(2)}$ в сечении $x=x_*$, в котором достигает максимума сжимающее внутреннее усилие $T^{11}_{(1)}$.



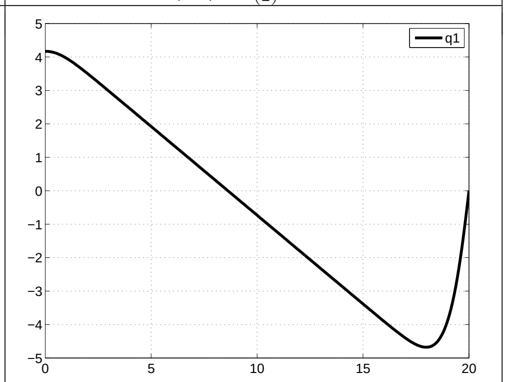
а) Осевые перемещения в несущих слоях (см), $X^3_{(2)} = 0$ МПа



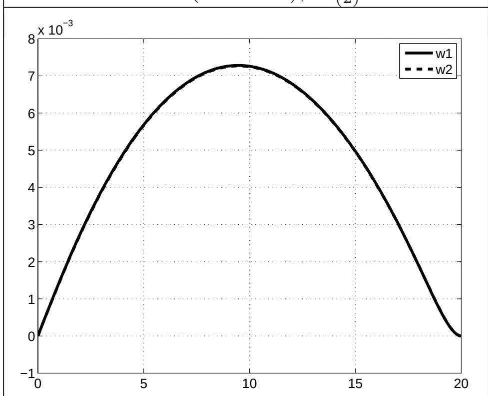
б) Осевые перемещения в несущих слоях (см), $X^3_{(2)} = 0.1$ МПа



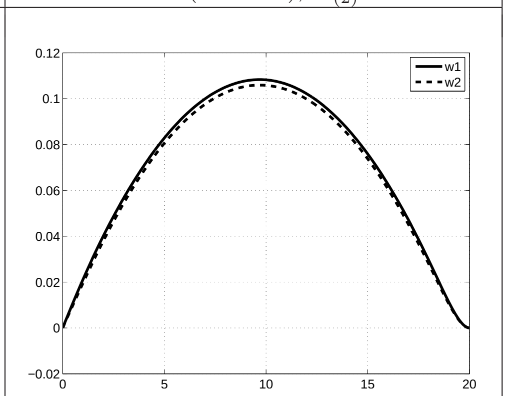
в) Касательные напряжения в заполнителе (0.1 MPa), $X^3_{(2)} = 0$ МПа



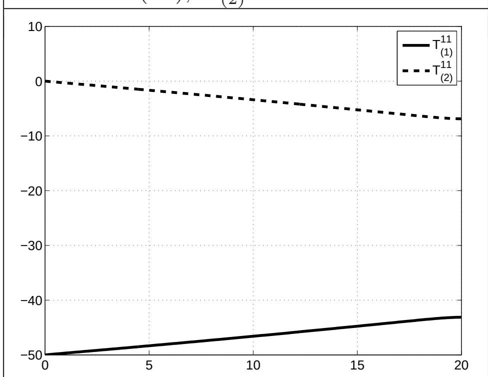
г) Касательные напряжения в заполнителе (0.1 MPa), $X^3_{(2)} = 0.1$ МПа



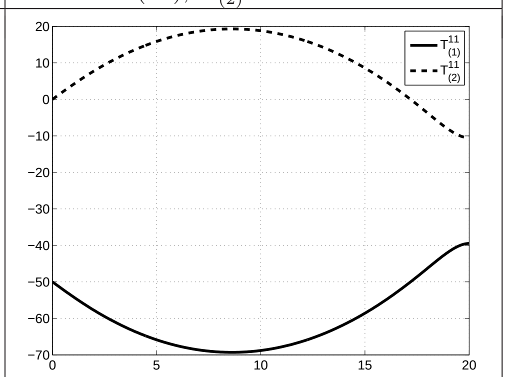
д) Прогибы в несущих слоях (см), $X^3_{(2)} = 0$ МПа



е) Прогибы в несущих слоях (см), $X^3_{(2)} = 0.1$ МПа

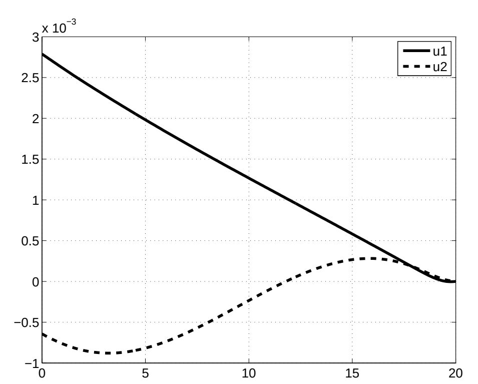


ж) Мембранные усилия в несущих слоях (КН/м), $X^3_{(2)} = 0$ МПа

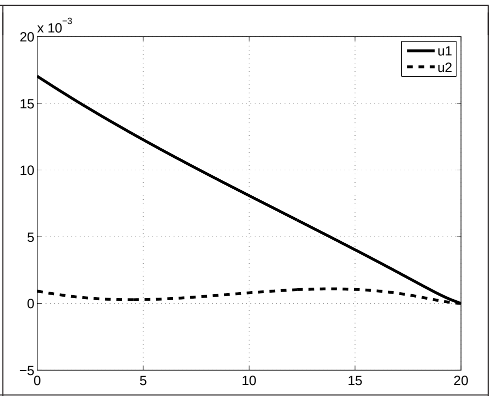


з) Мембранные усилия в несущих слоях (КН/м), $X^3_{(2)} = 0.1$ МПа

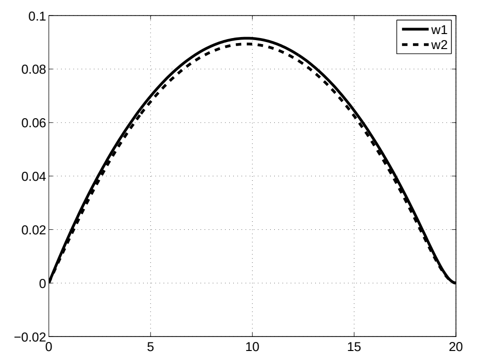
Рис. 2. Табулирование по поперечной нагрузке $P = 50$ кН/м



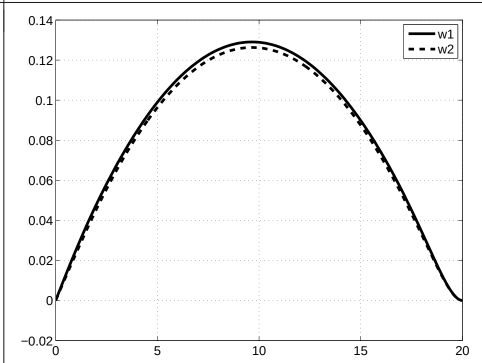
а) Осевые перемещения в несущих слоях (см), $P = 0$ кН/м



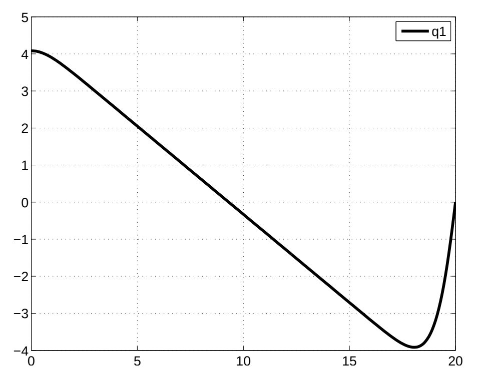
б) Осевые перемещения в несущих слоях (см), $P = 100$ кН/м



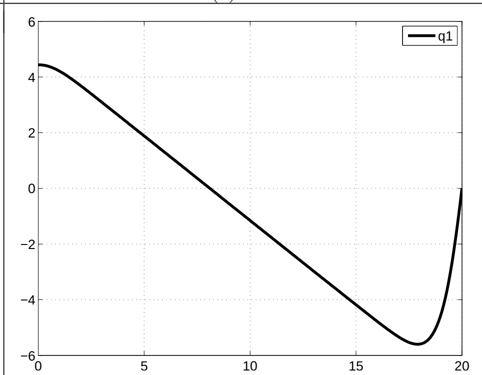
а) Прогибы в несущих слоях (см), $X^3_{(2)} = 0$ МПа



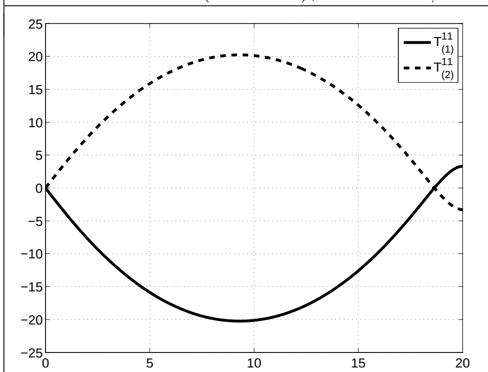
г) Прогибы в несущих слоях (см), $X^3_{(2)} = 0.1$ МПа



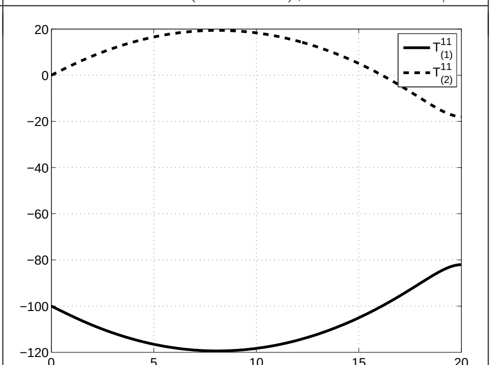
д) Касательные напряжения в заполнителе (0.1 МРа), $P = 0$ кН/м



е) Касательные напряжения в заполнителе (0.1 МРа), $P = 100$ кН/м



ж) Мембранные усилия в несущих слоях (кН/м), $P = 0$ кН/м



з) Мембранные усилия в несущих слоях (кН/м), $P = 100$ кН/м

Рис. 3. Табулирование по продольной торцовой нагрузке $X^3_{(2)} = 0.1$ МПа

Полученные результаты показывают, что в плане весового совершенства при рассмотренном виде нагружения наиболее рациональной и равнонапряженной является трехслойная пластина несимметричного строения с неодинаковыми толщинами несущих слоев, причем во всех случаях нагружения пластины должно выполняться неравенство $t_{(2)} > t_{(1)}$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-38-00788, 16-08-00316, 16-01-00301).

Литература

1. *Кобелев В.Н.* Расчет трехслойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 303 с.
2. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* On the interaction of composite plate having a vibration-absorbing covering with incident acoustic wave // Russ. Math. – 2015. – V. 59, No 3. – P. 66–71. – doi: 10.3103/S1066369X1503007X.
3. *Frostig Y.* Elastica of sandwich panels with a transversely flexible core – A high-order theory approach // Int. J. Solids Struct. – 2009. – V. 46. – P. 2043-2059. – doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.007.
4. *Дятченко С.В., Иванов А.П.* Технология изготовления корпусов судов из полимерных композиционных материалов. – Калининград : Изд-во Калинингр. гос. техн. ун-та, 2007. – 156 с.
5. *Прохоров Б.Ф., Кобелев В.Н.* Трехслойные конструкции в судостроении. – Л.: Судостроение, 1972. – 344 с.
6. *Васильев В.В., Добряков А.А., Дудченко А. А.* Основы проектирования и изготовления конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов. – М.: МАИ, 1985. – 218 с.
7. *Крысин В.Н.* Слоистые клееные конструкции в самолётостроении. – М.: Машиностроение, 1980. – 232 с.
8. *Павлов Н.А.* Конструкция ракет и космических аппаратов. – М: Машиностроение, 1993. – 148 с.
9. *Иванов В.А., Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи) // Изв. вузов. Матем. – 1995. – № 3. – С. 15–24.
10. *Paimushin V.N., Bobrov S.N.* Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mech. Compos. Mater. – 2000. – V. 36, No 1. – P. 59–66.
11. *Brezis H.* Équations et inéquations non-linéaires dans les espaces vectoriels en dualité // Annales de l'institut Fourier (Grenoble). – 1968. – V. 18. – P. 115–175.
12. *Lions J.-L.* Quelque problèmes méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires. – Paris: Dunod, 1969. – 554 p.
13. *Ekeland I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems. – Amsterdam: North-Holland, 1976. – 402 p.
14. *Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate // Appl. Math. Sci. – 2015. – V. 9, No 78. – P. 3887–3895. – doi: http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.54354.
15. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // Russ. Math. – 2015. – V. 59, No 10. – P. 57–60. – doi: 10.3103/S1066369X15100072.

16. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test // Procedia Eng. – 2016. – V. 150. – P. 1056–1062. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.214.

17. *Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paymushin V.N.* Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // Res. J. Appl. Sci. – 2015. – V. 10, No 8. – P. 428–435. – doi: 10.3923/rjasci.2015.428.435.

18. *Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Решение нелинейных задач теории многослойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы Десятой Междунар. конф. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – С. 103–107.

19. *Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R.* On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory // Appl. Math. Sci. – 2015. – V. 9, No 81–84. – P. 4095–4102. – doi: 10.12988/ams.2015.54358.

20. *Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В.* О разрешимости нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1034–1037.

21. *Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F.* Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36, No 4. – P. 474–481. – doi: 10.1134/S1995080215040216.

22. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending // Procedia Eng. – 2016. – V. 150. – P. 1050–1055. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.

23. *Badriev I.B., Banderov V.V.* Numerical method for solving variation problems in mathematical physics // Appl. Mech. Mater. – 2014. – V. 668–669. – P. 1094–1097.

24. *Badriev I.B., Banderov V.V.* Iterative Methods for Solving Variational Inequalities of the Theory of Soft Shells // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35, No 4. – P. 354–365. – doi: 10.1134/S1995080214040015.

25. *Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A.* On the equilibrium problem of a soft network shell in the presence of several point loads // Appl. Mech. Mater. – 2013. – V. 392. – P. 188–190. – doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.188.

26. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 1. – С. 25–30.

27. *Бадриев И.Б., Бандеров В.В.* Численное решение задач о равновесии осесимметричных мягких оболочек // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 29–35.

28. *Паймушин В.Н.* К вариационным методам решения пространственных задач сопряжения деформируемых тел // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.

29. *Паймушин В.Н.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171–180.

30. *Adams R.A.* Sobolev Spaces. – New York, San Francisco, London: Acad. Press, 1975. – 286 p.

31. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М: Наука, 1972. – 416 с.

32. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G.* Inequalities. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1934. – 314 p.

33. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Итерационные методы решения вариационных неравенств в гильбертовых пространствах. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2007. – 152 с.

34. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

35. *Gajewskii H., Gröger K., Zacharias K.* Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. – Berlin: Akademie-Verlag, 1974. – 281 p.

36. *Теляковский С.А.* Курс лекций по математическому анализу. Семестр I. – М.: МИАН, 2009. – 212 с.

37. *Karchevskii M.M.* Solvability of variational problems in the nonlinear theory of shallow shells // Differ. Equations. – 1991. – V. 27, No 7. – P. 841–847.

38. *Karchevskii M.M., Paimushin V.N.* Variational problems in the theory of three-layer shallow shells // Differ. Equations. – 1994. – V. 30, No 7. – P. 1126–1130.

39. *Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M.* Convergence Analysis of Iterative Methods for Some Variational Inequalities with Pseudomonotone Operators // Differ. Equations. – 2001. – V. 37, No 7. – P. 934–942. – doi: 10.1023/A:1011901503460.

40. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.

41. *Вайнберг М.М., Лаврентьев И.М.* Нелинейные квазипотенциальные операторы // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 205, № 5. – С. 1022–1024.

42. *Badriev I.B., Karchevskii M.M.* Convergence of an iterative process in a Banach space // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71, No 6. – P. 2727–2735. – doi: 10.1007/bf02110578.

43. *Badriev I.B.* On the solving of variational inequalities of stationary problems of twophase flow in porous media // Appl. Mech. Mater. – 2013. – V. 392. – P. 183–187. – doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.183.

44. *Badriev I.B., Zadvornov O.A., Lyashko A.D.* A study of variable step iterative methods for variational inequalities of the second kind // Differ. Equations. – 2004. – V. 40, No 7. – P. 971–983. – doi: 10.1023/B:DIEQ.0000047028.07714.df.

45. *Бадриев И.Б.* Математическое моделирование стационарных задач подземной фильтрации с многозначным законом // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2013. – Т. 18, № 5–2. – С. 2444–2446.

46. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 1. – С. 20–28.

47. *Samarskii A.A.* The theory of difference schemes. – New York – Basel: Marcel Dekker, Inc, 2001. – 761 p.

48. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (Этапы развития, современное состояние и направление дальнейших исследований) // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 2. – С. 148–162.

Поступила в редакцию
30.09.16

Бадриев Ильдар Бурханович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Ildar.Badriev1@mail.ru*

Макаров Максим Викторович, младший научный сотрудник; аспирант кафедры прочности конструкций

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *makarovmaksim@mail.ru*

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник; профессор кафедры прочности конструкций

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *vpajmushin@mail.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2016, vol. 158, no. 4, pp. 453–468

Geometrically Nonlinear Problem of Longitudinal and Transverse Bending of a Sandwich Plate with Transversally Soft Core

I.B. Badriev[a*], *M.V. Makarov*[a,b**], *V.N. Paimushin*[a,b***]

[a]*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*
[b]*A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, 420111 Russia*
E-mail: **Ildar.Badriev1@mail.ru*, ***makarovmaksim@mail.ru*, ****vpajmushin@mail.ru*

Received September 30, 2016

Abstract

The problem of determining the stress-strain state a sandwich plate with a transversally soft core in one-dimensional geometrically nonlinear formulation has been considered. It has been assumed that in the right end section the edges of the carrier layers are rigidly clamped and there is no adhesive bond between the core and the support element, and in the left end section the edges of the carrier layers of the plate are hinged on an absolutely stiff in the transverse direction diaphragm glued to the end section of the core, the load is applied in the middle surface of the first carrier layer from the left side. On the basis of the generalized Lagrange principle, a general formulation has been created in the form of an operator equation in the Sobolev space. The properties of the operator have been established, i.e., its pseudomonotonicity and coercivity.Thus, a theorem on the existence of a solution has been established.

A two-layer iterative method has been suggested for solving the problem. Considering additional properties of the operator, i.e., its quasipotentiality and bounded Lipschitz continuity, convergence of the method has been investigated. The variation limits of the iteration parameter ensuring the method convergence have been established. A software package has been developed, with the help of which subsequent numerical experiments for the model problem of longitudinal-transverse bending of a sandwich plate have been carried out. Tabulation of both longitudinal and transverse loads has been carried out. The obtained results show that, in terms of weight perfection, the sandwich plate of an asymmetric structure with unequal thicknesses of the carrier layers is the most rational and equally stressed one under the considered loading.

Keywords: sandwich plate, transversely soft core, generalized statement, solvability theorem, iterative method, convergence theorem, numerical experiment

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 16-38-00788, 16-08-00316, and 16-01-00301).

Figure Captions

Fig. 1. A sandwich plate with a transversely soft core: 1 is a diaphragm supporting the carrier layers; 2 is a rigid supporting element; 3 is filler; 4 is outer carrying layers.

Fig. 2. Tabulation of the transverse load $P = 50$ kN/m.

Fig. 3. Tabulation of the longitudinal load $X^3_{(2)} = 0.1$ MPa.

References

1. Kobelev V.N. Calculation of Sandwich Structures: Handbook. Moscow, Mashinostroenie, 1984. 303 p. (In Russian)
2. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. On the interaction of composite plate having a vibration-absorbing covering with incident acoustic wave. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 3, pp. 66–71. doi: 10.3103/S1066369X1503007X.
3. Frostig Y. Elastica of sandwich panels with a transversely flexible core – A high-order theory approach. *Int. J. Solids Struct.*, 2009, vol. 46, pp. 2043–2059. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.007.
4. Dyatchenko S.V., Ivanov A.P. A Technology for Manufacturing Ship Hulls out of Polymer Composites. Kaliningrad, Izd. Kaliningr. Tekh. Univ., 2007. 156 p. (In Russian)
5. Prokhorov B.F., Kobelev V.N. Three-Layer Constructions in Shipbuilding. Leningrad, Sudostroenie, 1972. 344 p. (In Russian)
6. Vasil'ev V.V., Dobryakov A.A., Dudchenko A.A. Fundamentals of the Planning and Production of Aircraft Structures Made of Composite Materials. Moscow, MAI, 1985. 218 p. (In Russian)
7. Krysin V.N. Layered Laminated Constructions in Aircraft Engineering. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 232 p. (In Russian)
8. Pavlov N.A. Constructions of Rockets and Space Vehicles. Moscow, Mashinostroenie, 1993. 149 p. (In Russian)
9. Ivanov V.A., Paimushin V.N., Polyakova T.V., Refined theory of the stability of three-layer structures (linearized equations of neutral equilibrium and elementary one-dimensional problems). *Russ. Math.*, 1995, vol. 39, no. 3, pp. 13–22.
10. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms. *Mech. Compos. Mater.*, 2000, vol. 36, no. 1, pp. 59–66.
11. Brezis H. 'Equations et inéquations non-linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. *Ann. de l'inst. Fourier* (Grenoble), 1968, vol. 18, pp. 115–175.
12. Lions J.-L. Quelque problèmes méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires. Paris, Dunod, 1969. 554 p.
13. Ekeland I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam, North-Holland, 1976. 402 p.
14. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, no. 78, pp. 3887–3895. doi: 10.12988/ams.2015.54354.

15. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 10, pp. 57–60. doi: 10.3103/S1066369X15100072.

16. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test. *Procedia Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1056–1062. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.214.

17. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paymushin V.N. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler. *Res. J. Appl. Sci.*, 2015, vol. 10, no. 8, pp. 428–435. doi: 10.3923/rjasci.2015.428.435.

18. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N., On the solvability of a nonlinear equilibrium problem for sandwich plates. *Setochnye metody dlya kraevykh zadach i prilozheniya: Materialy Desyatoi Mezhdunar. konf.* [Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications: Proc. 10th Int. Conference]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2014, pp. 103–107. (In Russian)

19. Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R. On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, nos. 81–84, pp. 4095–4102. doi: 10.12988/ams.2015.54358.

20. Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V. On solvability of the nonlinear problem of sandwich plate equilibrium. *Vestn. Tambov. Univ., Ser. Est. Tekh. Nauki*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1034–1037.

21. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core. *Lobachevskii J. Math.*, 2015, vol. 36, no. 4, pp. 474–481. doi: 10.1134/S1995080215040216.

22. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending. *Procedia Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1050–1055. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.

23. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical method for solving variation problems in mathematical physics. *Appl. Mech. Mater.*, 2014, vol. 668–669, pp. 1094–1097.

24. Badriev I.B., Banderov V.V. Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells. *Lobachevskii J. Math.*, 2014, vol. 35, no. 4, pp. 354–365. doi: 10.1134/S1995080214040015.

25. Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. On the equilibrium problem of a soft network shell in the presence of several point loads. *Appl. Mech. Mater.*, 2013, vol. 392, pp. 188–190. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.188.

26. Badriev I.B., Zadvornov O.A. Investigation of the solvability of an axisymmetric problem of determining the equilibrium position of a soft shell of revolution. *Russ. Math.*, 2005, vol. 49, no. 1, pp. 21–26.

27. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical solution of the equilibrium of axisymmetric soft shells. *Vestn. Tambov. Gos. Tekh. Univ.*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 29–35.

28. Paimushin V.N. On variational methods for solving nonlinear three-dimensional problems of conjugation of deformable bodies. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 273, no. 5, pp. 1083–1086. (In Russian)

29. Paimushin V.N. Generalized Reissner variational principle in nonlinear mechanics of three-dimensional composite solids, with applications to the theory of multilayer shells. *Mech. Solids*, 1987, vol. 22, no. 2, pp. 166–174.

30. Adams R.A. Sobolev Spaces. New York, San Francisco, London, Acad. Press, 1975. 286 p.

31. Vainberg M.M. A Variational Method and Monotonous Operators Method. Moscow, Nauka, 1972. 416 p. (In Russian)

32. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. Inequalities. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1934. 314 p.

33. Badriev I.B., Zadvornov O.A. Iteration of Methods for Solving Variational Inequalities in Hilbert Spaces. Kazan, Kazan. Univ., 2007. 152 p. (In Russian)

34. Vasil'ev F.P. Methods for Solving Extremal Problems. Moscow, Nauka, 1981, 400 p. (In Russian)

35. Gajewskii H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1974, 281 p.

36. Telyakovskii S.A. Lectures on Mathematical Analysis. Semester I. Moscow, MIAN, 2009. 212 p. (In Russian)

37. Karchevskii M.M. Solvability of variational problems in the nonlinear theory of shallow shells.*Differ. Equations*, 1991, vol. 27, no. 7, pp. 841–847.

38. Karchevskii M.M., Paimushin V.N. Variational problems in the theory of three-layer shallow shells. *Differ. Equations*, 1994, vol. 30, no. 7, pp. 1126–1130.

39. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M. Convergence analysis of iterative methods for some variational inequalities with pseudomonotone operators. *Differ. Equations*, 2001, vol. 37, no. 7, pp. 934–942. doi: 10.1023/A:1011901503460.

40. Vainberg M.M. Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators. Moscow, Gostekhizdat, 1956. 344 p. (In Russian)

41. Vainberg M.M., Lavrent'ev I.M. Nonlinear quasi-potential operators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, vol. 205, no. 5, pp. 1022–1024. (In Russian)

42. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of an iterative process in a Banach space. *J. Math. Sci.*, 1994, vol. 71, no. 6, pp. 2727–2735. doi: 10.1007/bf02110578.

43. Badriev I.B. On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media. *Appl. Mech. Mater.*, 2013, vol. 392, pp. 183–187. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.183.

44. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Lyashko A.D. A study of variable step iterative methods for variational inequalities of the second kind. *Differ. Equations*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 971–983. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000047028.07714.df.

45. Badriev I.B. Mathematical simulation of stationary seepage problem with multivalued law. *Vestn. Tambov. Univ., Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2013, vol. 18, nos. 5–2, pp. 2444–2446. (In Russian)

46. Badriev I.B., Zadvornov O.A. Iterative methods for solving variational inequalities of the second kind with inversely strongly monotone operators. *Russ. Math.*, 2003, vol. 47, no. 1, pp. 18–26.

47. Samarskii A.A. The theory of Difference Schemes. New York – Basel, Marcel Dekker Inc., 2001. 761 p.

48. Paimushin V.N. A stability theory of sandwich plates and shells (stages of development, current state, and lines of further investigations). *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2001, no. 2, pp. 148–162.(In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 453–468. ⟩

⟨ ***For citation*:** Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 4, pp. 453–468. (In Russian) ⟩