Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, №10, с. 14–28 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Е.С. ЖУКОВСКИЙ

О ТОЧКАХ СОВПАДЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Аннотация. Для отображений, действующих в произведении метрических пространств, предложено понятие векторного накрывания, являющееся естественным расширением понятия накрывания отображений метрических пространств. Доказаны утверждения о разрешимости систем операторных уравнений, левая часть которых является значением векторного накрывающего отображения, а правая часть — векторного липшицева. В скалярном случае полученные утверждения совпадают с теоремами А.В. Арутюнова о точках совпадения двух отображений. В качестве приложения получено утверждение о существовании и оценках n-кратных точек совпадения, из которого следует признак существования n-кратных неподвижных точек, и в частности, при $n = 2$ известные теоремы о двойных неподвижных точках.

Ключевые слова: система операторных уравнений, векторное накрывающее отображение метрических пространств, точки совпадения отображений, кратные неподвижные точки.

УДК: 517.988 : 517.922

Введение

В статье предлагаются условия разрешимости систем операторных уравнений специального вида, возникающих в задачах о точках совпадения отображений метрических пространств. Исследование основано на предлагаемом в работе понятии векторно накрывающего отображения. Это понятие является естественным расширением понятия накрывания — эффективного современного инструмента нелинейного анализа, применяемого в исследованиях абстрактных операторных уравнений и включений [1]–[3], интегральных уравнений [4], неявных дифференциальных уравнений [5]–[7]. Приводимые здесь утверждения о векторных накрывающих отображениях расширяют границы применения известных результатов, открывают новые возможности исследования систем интегральных, дифференциальных, разностных уравнений, краевых задач, систем управления. Демонстрируется одно из приложений — признак существования n-кратных точек совпадения и его частный случай — утверждение о n-кратных неподвижных точках. Кратные неподвижные точки используются, например, в утверждениях об устойчивости дискретных систем. При $n = 2$ такие, называемые двойными, точки возникают при исследовании седловых точек в теории игр. Свойства множеств двойных неподвижных точек многозначных отображений подробно изучены в [8].

Поступила 16.03.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-10021).

Пусть заданы метрические пространства (X_i, ρ_{X_i}), (Y_j, ρ_{Y_j}), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$; $y_j \in Y_j$, $j = \overline{1,m}$, и определены отображения $\Psi_j, \Phi_j : \prod_{i=1}^{n} X_i \to Y_j$, $j = \overline{1,m}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\Psi_j(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

относительно неизвестного $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$. Положим $\overline{X} = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $\overline{Y} = \prod_{j=1}^{m} Y_j$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_m)$, $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ и запишем систему (1) в виде (векторного) уравнения

$$\Psi(x) = \Phi(x).$$

Система (1) при $n = m = 1$ превращается в (скалярное) уравнение, решение которого называют [1] точкой совпадения отображений Ψ, Φ. В предположении, что отображение Ψ является накрывающим, а отображение Φ — липшицевым, первые результаты о существовании точек совпадения и их свойствах получены А.В. Арутюновым [1]–[3], и затем эти исследования были продолжены в ряде работ (например, [8]–[10]).

Вначале приведем определение классического (скалярного) накрывания и объясним, почему для исследования систем (1) в статье предлагается его обобщение — понятие векторного накрывания.

Пусть заданы метрические пространства (X, ρ_X), (Y, ρ_Y). Обозначим через $\mathrm{B}_X(u, r)$ замкнутый шар $\{x \in X : \rho_X(x, u) \le r\}$ с центром в $u \in X$ радиуса $r \ge 0$ в пространстве X.

Определение 1 ([1]). Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *α-накрывающим*, а число α — *коэффициентом накрывания*, если для любых $r \ge 0$, $u \in X$ имеет место вложение

$$\mathrm{B}_Y(\Psi(u), \alpha r) \subset \Psi(\mathrm{B}_X(u, r)).$$

Говорят, что отображение $\Psi : X \to Y$ *накрывающее*, если существует такое $\alpha > 0$, что это отображение α-накрывающее.

Свойство α-накрывания равносильно соотношению

$$\forall u \in X, \ \ \forall y \in Y \ \ \exists x \in X \ \ \Psi(x) = y \ \& \ \rho_X(x, u) \le \alpha^{-1} \rho_Y(y, \Psi(u)). \tag{2}$$

Чтобы применить утверждения о накрывающих отображениях к исследованию системы (1), необходимо определить метрики в произведениях $\overline{X}, \overline{Y}$ метрических пространств. Если относительно выбранных метрик отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ окажется α-накрывающим, а отображение $\Phi : \overline{X} \to \overline{Y}$ — β-липшицевым, причем $\alpha > \beta$, то согласно теореме о точке совпадения [1] система (1) разрешима, и более того, в этом случае можно оценить расстояние от заданной точки до ближайшего к ней решения, исследовать ряд топологических свойств множества решений. Метризовать произведения $\overline{X}$, $\overline{Y}$ можно многими способами. Очевидно, свойства накрывания и липшицевости отображений сохраняются при переходе к любой эквивалентной метрике. Однако при изменении метрики у накрывающих отображений меняется коэффициент α, у липшицевых — константа Липшица β, причем величина $\alpha - \beta$ может менять знак. Данное обстоятельство чрезвычайно важно, поскольку в известных утверждениях о существовании и свойствах точек совпадения, об условиях разрешимости и корректности уравнений с накрывающими отображениями основным требованием, как уже отмечено, является неравенство $\alpha > \beta$ ([1]–[5], [8]–[10]).

Проиллюстрируем проблему определения метрики в произведении пространств, возникающую при исследовании системы (1), с помощью результатов о накрывающих отображениях и "скалярных" точках совпадения, в следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$2x_1 = x_1, \quad 4x_2 = 3x_2. \tag{3}$$

Здесь $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = \mathbb{R}$, а линейные отображения $\Psi, \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ заданы матрицами

$$\Psi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Так как матрица Ψ невырождена, то при любом определении норм в пространствах $\overline{X} = \mathbb{R}^2$, $\overline{Y} = \mathbb{R}^2$ соответствующее линейное отображение будет накрывающим. Положим $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Если нормы в $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ задать произвольным образом, но одинаково, то $\alpha \leq 2$ вследствие равенства $\Psi(e_1) = 2e_1$. Для отображения Φ в силу равенства $\Phi(e_2) = 3e_2$ константа Липшица $\beta \geq 3$. Итак, в данном случае очевидно $\beta > \alpha$, и любые результаты о точках совпадения к системе (3) применять нельзя.

Ниже покажем, что предлагаемые в данной работе результаты, не требующие метризации произведений $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, прямо применяются к системе (3). Вначале все же приведем "удачные" нормы в $\overline{X} = \mathbb{R}^2$ и $\overline{Y} = \mathbb{R}^2$, относительно которых достигается нужное соотношение между коэффициентами накрывания и липшицевости. Итак, для $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ положим

$$\|u\|_{\overline{X}} = \max\{|u_1|, |u_2|\}, \quad \|u\|_{\overline{Y}} = \max\{|u_1|, 3^{-1}|u_2|\}.$$

При таком определении норм получим

$$\|\Psi(x)\|_{\overline{Y}} = \max\{2|x_1|, 3^{-1}4|x_2|\} \geq 3^{-1}4\|x\|_{\overline{X}}, \quad \|\Phi(x)\|_{\overline{Y}} = \max\{|x_1|, 3^{-1}3|x_2|\} = \|x\|_{\overline{X}}.$$

Таким образом, $\alpha = 3^{-1}4 > 1 = \beta$ и, значит, предположения принципа точек совпадения [1] выполнены. В этой теореме утверждается, что для любого $(u_1^0, u_2^0) \in \mathbb{R}^2$ существует решение $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее оценке $\rho_{\overline{X}}(x, u^0) \leq (\alpha - \beta)^{-1} \rho_{\overline{Y}}\big(\Psi(u^0), \Phi(u^0)\big)$, которая в данном случае принимает вид

$$\max\{|\xi_1 - u_1|, |\xi_2 - u_2|\} \leq 4 \max\{|u_1|, 3^{-1}|u_2|\}. \tag{5}$$

Здесь вследствие простоты отображений Ψ, Φ удалось "удачно" метризовать $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. В общем случае, насколько известно автору, проблема метризации произведений метрических пространств, при которой достигается оптимальное соотношение между коэффициентами накрывания и липшицевости изначально заданных отображений, в литературе не рассматривалась. Результаты данной статьи позволяют утверждать, что эту проблему и не нужно решать для исследования системы (1). Предлагаемый подход не требует введения метрики в произведениях метрических пространств. Вместо метрик в $\overline{X}, \overline{Y}$ пользуемся векторными метриками

$$\overline{\rho}_{\overline{X}} \doteq (\rho_{X_1}, \ldots, \rho_{X_n}), \quad \overline{\rho}_{\overline{Y}} \doteq (\rho_{Y_1}, \ldots, \rho_{Y_m})$$

(пространства $(\overline{X}, \overline{\rho}_{\overline{X}})$, $(\overline{Y}, \overline{\rho}_{\overline{Y}})$ — частный случай пространств, которые разные авторы называют обобщенно метрическими, псевдометрическими, а также пространствами с векторнозначной метрикой; подробности о таких пространствах имеются, например, в ([11], пп. 6.3, 6.4; [12], п. 3.3)). В терминах этих векторов удается не только исследовать разрешимость системы (1), но и получить оценки отклонения каждой компоненты x_i решения x от соответствующей компоненты u_i^0 заданного вектора $u^0 \in \overline{X}$. Важно, что даже если бы удалось определить нужные метрики в $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, то утверждения о накрывающих отображениях дали бы оценку расстояния между векторами x и u^0 (неравенство (5) в примере 1), что, конечно, менее информативно, чем оценки расстояний между компонентами этих векторов.

Для подтверждения вернемся к рассмотренной выше системе (3), которая удовлетворяет предположениям основного утверждения данной работы (см. раздел 2, теорема): отображение Ψ является векторно накрывающим с матрицей накрывания $A = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 4^{-1} \end{pmatrix}$; отображение Φ — векторно липшицевым с матрицей $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; произведение $BA = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 4^{-1}3 \end{pmatrix}$ имеет спектральный радиус $\varrho(BA) = 4^{-1}3 < 1$. Это утверждение гарантирует для любого $(u_1^0, u_2^0) \in \mathbb{R}^2$ существование решения $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющего оценкам

$$|\xi_1 - u_1| \le |u_1|, \quad |\xi_2 - u_2| \le |u_2|.$$

Безусловно эта система покомпонентных оценок “лучше” оценки (5).

1. Основные обозначения и определения

Стандартно обозначим через $\mathbb{R}^m$ m-мерное вещественное пространство, через $\mathbb{R}^m_+$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^m$, через I_m — единичную $m \times m$ матрицу. Для произвольных векторов $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m$ положим $r^1 \ge r^2$, если $r^1 - r^2 \in \mathbb{R}^m_+$; обозначим через $\min\{r^1, r^2\}$ вектор $r = (r_1, \dots, r_m)$, компоненты которого определяются формулой $r_j = \min\{r^1_j, r^2_j\}$, $j = \overline{1, m}$. Напомним, что норму $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ в $\mathbb{R}^m$ называют монотонной, если для $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m_+$, удовлетворяющих неравенству $r^1 \ge r^2$, выполнено $|r^1|_{\mathbb{R}^m} \ge |r^2|_{\mathbb{R}^m}$.

Пусть заданы метрические пространства X_i, Y_j, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Определим

$$\overline{X} = \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \prod_{j=1}^{m} Y_j.$$

Для векторов $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $w = (w_1, \dots, w_m) \in \overline{Y}$ положим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(w, r) \doteq \{y \in \overline{Y} : \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, w) \le r\} = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{B}_{Y_j}(w_j, r_j).$$

Аналогично, для $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in \overline{X}$ обозначим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, d) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{X_i}(u_i, d_i).$$

Определение 2. Пусть задана $n \times m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно A-накрывающим*, если

$$\forall r \in \mathbb{R}^m_+, \quad \forall u \in \overline{X} \ \ \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \subset \Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)). \tag{6}$$

Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно накрывающим*, если существует матрица A с неотрицательными компонентами, для которой справедливо соотношение (6).

Очевидно, что в случае $n = m = 1$ определения 1, 2 равносильны: всякое векторно A-накрывающее отображение является α-накрывающим и любое α-накрывающее отображение является векторно A-накрывающим, где $A = (a_{11})$, $a_{11} = \alpha^{-1}$.

Покажем, что *отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно A-накрывающим тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \overline{X}, \quad \forall y \in \overline{Y} \ \ \exists x \in \overline{X} \ \ \Psi(x) = y \ \& \ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \le A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)). \tag{7}$$

Пусть сначала выполнено свойство (7). Для произвольных $r \in \mathbb{R}^m_+$, $u \in \overline{X}$, $y \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r)$ согласно (7) найдем x, отвечающий условиям $\Psi(x) = y$, $\overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \le Ar$. Таким образом, справедливо вложение (6). Обратно, пусть отображение Ψ является векторно A-накрывающим.

Для любых $u \in \overline{X}$, $y \in \overline{Y}$ определим $r \doteq \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u))$. Тогда $y \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \subset \Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar))$, т. е. существует $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)$, удовлетворяющий соотношениям $\Psi(x) = y$, $\overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \leq Ar = A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u))$.

Приведем примеры векторно накрывающих отображений.

Пример 2. Пусть каждое отображение $\psi_i : X_i \to Y_i$, $i = \overline{1, n}$, является α_i-накрывающим. Тогда определяемое формулой $H(x) = \big(\psi_1(x_1), \dots, \psi_n(x_n)\big)$ отображение $H : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно накрывающим с матрицей

$$A = \mathrm{diag}\{\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}\} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Такие отображения исследованы в [7].

Пример 3. Рассмотрим линейное обратимое отображение $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, матрицу которого будем обозначать тем же символом G. Для произвольных $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ определим векторы $(w_1, \dots, w_n) = G(u)$, $(x_1, \dots, x_n) = G^{-1}(y)$. Пусть $\widehat{g}_{ij}$ — элементы матрицы G^{-1}. Так как $x - u = G^{-1}(y - w)$, то получаем оценку

$$|x_i - u_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} \widehat{g}_{ij}(y_j - w_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\widehat{g}_{ij}||y_j - w_j|. \tag{8}$$

Таким образом, отображение G является векторно A-накрывающим, где компоненты матрицы A определены равенством $a_{ij} = \big|\widehat{g}_{ij}\big|$, $i, j = \overline{1, n}$.

Пример 4. Пусть заданы α_i-накрывающие отображения $\psi_i : X_i \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, и линейное обратимое отображение $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Определим отображение $H : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$ формулой $H(x) = \big(\psi_1(x_1), \dots, \psi_n(x_n)\big)$. Покажем, что композиция $GH : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$ обладает свойством векторного накрывания. Для произвольных $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ определим $z = G^{-1}(y)$, $w = GH(u)$, $v = H(u) = G^{-1}(w)$. Вследствие накрывания отображений ψ_j и оценки (8) существует $x \in \overline{X}$, удовлетворяющий соотношениям

$$H(x) = z, \quad \rho_{X_i}(x_i, u_i) \leq \frac{1}{\alpha_i}|v_i - z_i| \leq \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} \big|\widehat{g}_{ij}\big||y_j - w_j|.$$

Этот элемент удовлетворяет уравнению $GH(x) = y$, таким образом, отображение GH является A-векторным накрывающим, $a_{ij} = {\alpha_i}^{-1}\big|\widehat{g}_{ij}\big|$, $i, j = \overline{1, n}$.

В рассмотренных примерах имеет место равенство $n = m$ размерностей произведений $\overline{X}$, $\overline{Y}$ соответствующих пространств. Приведем примеры векторно накрывающих отображений в случае $m < n$.

Пример 5. Пусть при $m < n$ задано линейное отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ранга m. В соответствующую $m \times n$-матрицу можно добавить $n - m$ строк так, чтобы "расширенная" квадратная матрица G была невырожденной. Поэтому отображение F будет A-векторным накрывающим, $a_{ij} = \big|\widehat{g}_{ij}\big|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Естественно, расширение G матрицы F и $n \times m$-матрица A здесь являются неединственными.

Аналогично векторно A-накрывающим отображением будет $FH : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$ — композиция отображений $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $H : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$ из примера 4. Здесь элементы матрицы A определяются равенством $a_{ij} = {\alpha_i}^{-1}\big|\widehat{g}_{ij}\big|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Теперь приведем пример векторно накрывающего отображения в случае $m > n$, а именно, $m = 2$, $n = 1$.

Пример 6. Пусть X — линейное нормированное пространство, на котором определена линейно независимая система двух линейных ограниченных функционалов φ_1, φ_2. Покажем, что отображение $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ является векторно накрывающим. Вследствие линейности отображения φ можем выбрать $u = 0 \in X$. Для произвольных $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ рассмотрим систему

$$\varphi_1(x) = y_1, \quad \varphi_2(x) = y_2. \tag{9}$$

Стандартно обозначим $\ker \varphi_i = \{x \in X : \varphi_i(x) = 0\}$, $i = 1, 2$. В силу линейной независимости функционалов существуют элементы $e_1 \in \ker \varphi_1$, $e_2 \in \ker \varphi_2$, для которых $\varphi_2(e_1) = 1$, $\varphi_1(e_2) = 1$. Решение системы (9) можно определить равенством $x = y_2 e_1 + y_1 e_2$. Это решение удовлетворяет неравенству $\|x\|_X = \|y_2 e_1 + y_1 e_2\|_X \le |y_2|\,\|e_1\|_X + |y_1|\,\|e_2\|_X$. Таким образом, доказано, что φ — это векторно A-накрывающее отображение, где $A = (\|e_1\|_X, \|e_2\|_X)$.

Завершая рассмотрение примеров конкретных векторно накрывающих отображений, отметим, что композиция таких отображений также обладает свойством векторного накрывания. Точнее, имеет место следующее утверждение (доказательство которого прямо следует из определения 2).

Пусть отображения $\Psi_1 : \overline{X} \to \overline{Y}$ *и* $\Psi_2 : \overline{Y} \to \overline{Z}$ *являются соответственно векторно* A_1*- и* A_2*-накрывающими (здесь* $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ *— произведения метрических пространств); тогда композиция* $\Psi_2\Psi_1 : \overline{X} \to \overline{Z}$ *есть векторно* A_1A_2*-накрывающее отображение.*

Теперь установим связь между свойствами накрывания и векторного накрывания отображения $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$. Зададим произвольные монотонные нормы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и определим метрики в произведениях $\overline{X}$, $\overline{Y}$ равенствами

$$\begin{aligned} \rho_{\overline{X}}(x, u) &= \left|\overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u)\right|_{\mathbb{R}^n} = \left|\left(\rho_{X_1}(x_1, u_1), \dots, \rho_{X_n}(x_n, u_n)\right)\right|_{\mathbb{R}^n}, \\ \rho_{\overline{Y}}(y, w) &= \left|\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, w)\right|_{\mathbb{R}^m} = \left|\left(\rho_{Y_1}(y_1, w_1), \dots, \rho_{Y_m}(y_m, w_m)\right)\right|_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned} \tag{10}$$

Покажем справедливость следующих двух утверждений:

если отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ *является векторно накрывающим, то при любом определении норм в* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{R}^m$ *и соответствующем определении* (10) *метрик в* $\overline{X}$, $\overline{Y}$ *это отображение будет накрывающим*;

если относительно некоторых метрик (10) *отображение* $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ *является накрывающим, то это отображение будет векторно накрывающим.*

Первое утверждение прямо следует из соотношений (7):

$$\begin{aligned} \rho_{\overline{X}}(x, u) = \left|\overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u)\right|_{\mathbb{R}^n} \le \left|A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u))\right|_{\mathbb{R}^n} \le \|A\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n} \left|\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u))\right|_{\mathbb{R}^m} = \\ = \|A\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n} \rho_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)). \end{aligned}$$

В данном случае $\alpha = (\|A\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n})^{-1}$ (можно, конечно, выбрать и любое $\alpha < (\|A\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n})^{-1}$).

Для доказательства второго утверждения сначала заметим, что все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны и, следовательно, свойство накрывания инвариантно относительно норм пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, используемых для определения метрик формулами (10). Это позволяет выбрать, например, $|d|_{\mathbb{R}^n} = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |d_i|$, $|r|_{\mathbb{R}^m} = \sum\limits_{j=1}^{m} |r_j|$. Теперь из соотношений (2) получаем $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \rho_{X_i}(x_i, u_i) \le \alpha^{-1} \sum\limits_{j=1}^{m} \rho_{Y_j}(y_j, \Psi_j(u))$. Таким образом, компоненты матрицы A можно принять равными $a_{ij} = \alpha^{-1}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Хотя, как следует из доказанного утверждения, векторное накрывание и равносильно "классическому", но матрица A дает, очевидно, гораздо больше информации о накрывающих свойствах отображения $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$, чем число $\alpha = (\|A\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n})^{-1}$.

Требование накрывания во многих задачах является излишне жестким, многие результаты удается получить при менее ограничительных условиях локального накрывания [6],[10]. Определим векторный аналог такого понятия.

Итак, пусть заданы множества $W \subseteq \overline{Y}$, $\mathfrak{A} \subset \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+$ и $n \times m$-матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Определение 3. Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно A-накрывающим множество W на совокупности* $\mathfrak{A}$, если для любых $(u, r) \in \mathfrak{A}$ имеет место включение

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \bigcap W \subset \Psi\big(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)\big).$$

Заметим, что *отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно A-накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \overline{X}, \quad \forall\, y \in W \quad \big(u, \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u))\big) \in \mathfrak{A} \implies \exists x \in \overline{X} \quad \Psi(x) = y \;\&\; \overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \le A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)).$$

Доказательство этого утверждения повторяет приведенное выше доказательство равносильности определения 2 и соотношения (7).

В скалярном случае, т. е. при $n = m = 1$, $A = (a_{11})$, определение 3 равносильно предложенному в [6] определению отображения $\Psi : X \to Y$, α-накрывающего множество $W \subset Y$ на совокупности $\mathfrak{G} \subset X \times \mathbb{R}_+$, где $\alpha = {a_{11}}^{-1}$, $\mathfrak{G} = \{(x, r) : (x, \alpha^{-1} r) \in \mathfrak{A}\}$. Отметим, что (при соответствующем выборе множеств W, $\mathfrak{G}$) определению [6] удовлетворяют различные трактовки накрывания у многих авторов. Здесь в качестве $\mathfrak{A} \subset \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+$ будем выбирать множество, определяемое по заданным векторам $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$ равенством

$$\widehat{\mathfrak{A}}(u^0, R) = \{(x, r) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ : x \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R), \;\; Ar + \overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u^0) \le R\}. \tag{11}$$

Применительно к такому заданию совокупности $\mathfrak{A}$ определение 3 означает, что *отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно A-накрывающим множество W на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}(u^0, R)$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R), \quad \forall\, y \in W \quad A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)) + \overline{\rho}_{\overline{X}}(u, u^0) \le R \implies$$
$$\implies \exists x \in \overline{X} \quad \Psi(x) = y \;\&\; \overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \le A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)). \tag{12}$$

Напомним определения еще нескольких понятий, необходимых для формулировки утверждения о разрешимости уравнения (1).

Под сходимостью $x^k \to x$ при $k \to \infty$ в пространстве $\overline{X}$ понимаем сходимость последовательностей компонент данных векторов, т. е. $\rho_{X_i}\big(x_i^k, x_i\big) \to 0$, $i = \overline{1,n}$, что равносильно сходимости $\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k, x) \to 0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Аналогично понимаем сходимость в пространстве $\overline{Y}$. Естественным образом определяем замкнутость множеств в пространствах $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. Соответственно множество $V \subset \overline{X} \times \overline{Y}$ называем замкнутым, если для любой последовательности векторов $(x_1^k, \ldots, x_n^k, y_1^k, \ldots, y_m^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, из множества V, компоненты которых при $k \to \infty$ сходятся: $\rho_{X_i}(x_i^k, \xi_i) \to 0$, $i = \overline{1,n}$, $\rho_{Y_j}(y_j^k, w_j) \to 0$, $j = \overline{1,m}$, "предельный" вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n, w_1, \ldots, w_m)$ также принадлежит V.

Для отображения $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ стандартно определяем *график* — множество

$$\mathrm{gph}(\Psi) = \{(x, y) \in \overline{X} \times \overline{Y} : y = \Psi(x)\}.$$

Пусть задана $m \times n$-матрица B с неотрицательными компонентами $b_{j\,l}$, $j = \overline{1,m}$, $l = \overline{1,n}$. Отображение $\Phi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно B-липшицевым на множестве $U \subset \overline{X}$*, если для любых $u, x \in U$ выполнено

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x), \Phi(u)\big) \le B\overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u).$$

Это условие означает, что для любых $l = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ и $u, x \in U$ таких, что $u_i = x_i$ при всех $i \ne l$, выполнено

$$\rho_{Y_j}\big(\Phi_j(x), \Phi_j(u)\big) \le b_{j\,l}\rho_{X_l}(x_l, u_l).$$

Векторно B-липшицево на всем $\overline{X}$ отображение будем называть *векторно B-липшицевым.*

2. Признак существования точки совпадения векторных отображений

Сформулируем основное утверждение этого раздела — условия существования точки совпадения векторных отображений, т. е. условия разрешимости системы (1).

Теорема. *Пусть пространства X_i, $i = \overline{1,n}$, являются полными*; *заданы отображения $\Psi, \Phi : \overline{X} \to \overline{Y}$, векторы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^m_+$, $n \times m$-матрица A и $m \times n$-матрица B такие, что выполнены следующие условия*:

1. *отображение Ψ является векторно A-накрывающим множество $W \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u^0), d)$ на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}(u^0, R)$*;
2. *отображение Φ является векторно B-липшицевым на множестве $U \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$*;
3. *множество $(U \times W) \bigcap \mathrm{gph}(\Psi)$ замкнуто в пространстве $\overline{X} \times \overline{Y}$*;
4. *для спектрального радиуса ϱ квадратной матрицы BA выполнено $\varrho(BA) < 1$*;
5. *имеют место неравенства*[1]

$$r \doteq (I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Psi(u^0), \Phi(u^0)\big) \le d, \quad Ar \le R. \tag{13}$$

Тогда существует решение $x = \xi \in \overline{X}$ системы (1), *удовлетворяющее неравенству*

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}\big(\xi, u^0\big) \le Ar. \tag{14}$$

Доказательство. Вначале приведем необходимую оценку матрицы $(I_m - BA)^{-1}$. Эта матрица является суммой ряда $I_m + BA + (BA)^2 + \cdots$ (например, [13], с. 116). Из неотрицательности элементов матриц A, B следует, что при любом номере $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено

$$(I_m - BA)^{-1} \ge I_m + BA + \cdots + (BA)^k \tag{15}$$

(неравенство для матриц понимается, естественно, как неравенство для всех соответствующих элементов).

Покажем, что существует последовательность элементов $x^k \in \overline{X}$, отвечающая следующим требованиям:

$$\begin{gathered} x^0 = u^0; \quad \forall k = 1, 2, \ldots \quad x^k \in U, \quad \Psi(x^k) = \Phi(x^{k-1}) \in W, \\ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k, x^{k-1}) \le A(BA)^{k-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0), \Psi(u^0)\big). \end{gathered} \tag{16}$$

Проверим (16) при $k = 1$. Положим $x^0 = u^0$. Для $u = x^0$, $y = \Phi(x^0)$ выполнено условие импликации (12), так как, во-первых, в силу неравенства (15) имеем $\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u^0), \Phi(u^0)) \le (I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u^0), \Phi(u^0))$, т. е. $\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u^0), \Phi(u^0)) \le d$, $\Phi(u^0) \in W$, и, во-вторых,

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(u^0, u) + A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u), y) = A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u^0), \Phi(u^0)) \le A(I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u^0), \Phi(u^0)) \le R.$$

---

[1] Так как $\varrho(BA) < 1$, то $m \times m$-матрица $I_m - BA$ обратима, что позволяет использовать матрицу $(I_m - BA)^{-1}$ в этих неравенствах.

В силу предположения векторного накрывания отображением Ψ множества W на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}(u^0,R)$ и согласно (12) существует $x^1 \in \overline{X}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\Psi(x^1)=\Phi(x^0),\ \ \overline{\rho}_{\overline{Y}}(x^1,x_0)\le A\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^0),\Psi(x^0)\big)=A\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0),\Psi(u^0)\big).$$

Из этой оценки согласно (15) следует $\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^1,x^0)\le R$, т.е. $x^1\in U$.

Предполагая, что соотношения (16) имеют место при всех $k\le k_0$, докажем их справедливость при $k=k_0+1$. Проверим условие импликации (12) для $u=x^{k_0}$, $y=\Phi(x^{k_0})$. Во-первых, имеем

$$\begin{aligned}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Psi(u^0),\Phi(x^{k_0})\big)\le \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Psi(u^0),\Phi(x^0)\big)+\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^0),\Phi(x^1)\big)+\dots+\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^{k_0-1}),\Phi(x^{k_0})\big)\le\\ \le \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Psi(u^0),\Phi(u^0)\big)+B\big(\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^0,x^1)+\dots+\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})\big)\le\\ \le \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Psi(u^0),\Phi(u^0)\big)+B\big(A+A(BA)+\dots+A(BA)^{k_0-1}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u^0),\Phi(u^0))=\\ =\big(I_m+BA+\dots+(BA)^{k_0}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u^0),\Phi(u^0))\le(I_m-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u^0),\Phi(u^0))\le d,\end{aligned}$$

т.е. $y\in W$. Во-вторых, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\overline{\rho}_{\overline{X}}(u^0,u)+A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(u),y)=\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^0,x^1)+\dots+\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})+A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Psi(x^{k_0}),\Phi(x^{k_0}))=\\ =\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^0,x^1)+\dots+\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})+A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Phi(x^{k_0-1}),\Phi(x^{k_0}))\le\\ \le\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^0,x^1)+\dots+\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})+AB\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})\le\\ \le A(I_m+\dots+(BA)^{k_0-1}+(BA)^{k_0})\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Phi(u^0),\Psi(u^0))\le A(I_m-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Phi(u^0),\Psi(u^0))\le R.\end{aligned}$$

Таким образом, вследствие векторного накрывания отображением Ψ множества W на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}(u^0,R)$ существует $x^{k_0+1}\in\overline{X}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\Psi(x^{k_0+1})=\Phi(x^{k_0}),\ \ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0+1},x^{k_0})\le A\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^{k_0}),\Psi(x^{k_0})\big)=A\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^{k_0}),\Phi(x^{k_0-1})\big).$$

Для этого элемента, учитывая векторную липшицевость отображения Φ и предположения индукции, получаем оценку

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0+1},x^{k_0})\le AB\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0},x^{k_0-1})\le A(BA)^{k_0}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0),\Psi(u^0)\big).$$

Из данного неравенства следует

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0+1},x^0)\le A\big(I_m+\dots+(BA)^{k_0}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0),\Psi(u^0)\big)\le A(I_m-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0),\Psi(u^0)\big), \tag{17}$$

поэтому $\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0+1},x^0)\le R$, т.е. $x^{k_0+1}\in U$.

Итак, установлено существование последовательности $\{x^k\}\subset\overline{X}$, удовлетворяющей соотношениям (16). Компоненты этих векторов x_i^k при каждом $i=\overline{1,n}$ образуют в X_i фундаментальную последовательность. Действительно, из оценки $\varrho(BA)<1$ следует сходимость $\|(BA)^k\|_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m}\to 0$ при $k\to\infty$; таким образом,

$$\begin{aligned}\forall l=1,2,\dots\ \ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k+l},x^k)\le A(BA)^k\big(I_m+\dots+(BA)^{l-1}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0),\Psi(u^0)\big)\le\\ \le A(BA)^k(I_m-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0),\Psi(u^0)\big)\to 0\ \text{ при }\ k\to\infty.\end{aligned}$$

Доказано, что последовательность $\{x^k\}$ сходится, пусть $\xi\in\overline{X}$ — ее предел. Вследствие непрерывности на U векторно липшицева отображения Φ имеем соотношение $\Phi(x^k)\to\Phi(\xi)$. Согласно (16) пределы последовательностей $\{\Psi(x^k)\}$, $\{\Phi(x^k)\}$ совпадают и в силу замкнутости множества $(U\times W)\bigcap \mathrm{gph}(\Psi)$ получаем $\Psi(x^k)\to\Phi(\xi)=\Psi(\xi)$. Таким образом, элемент $x=\xi\in\overline{X}$ является решением системы (1).

Для доказательства теоремы остается заметить, что неравенство (14) прямо следует из оценки (17).

Замечание 1. В формулировке теоремы можно заменить матрицу BA матрицей AB. Действительно, ненулевые собственные значения, а следовательно, и спектральные радиусы этих матриц совпадают ([14], с. 196). Кроме того, так как $\rho(AB) = \rho(BA) < 1$, то

$$A(I_m - BA)^{-1} = A(I_m + BA + (BA)^2 + \dots) = A + ABA + ABABA + \dots =$$
$$= (I_n + AB + (AB)^2 + \dots)A = (I_n - AB)^{-1}A.$$

Замечание 2. В случае $W = \overline{Y}$ из условий теоремы можно удалить первое неравенство (13), а если $U = \overline{X}$, то лишним предположением становится второе неравенство (13). Таким образом, если отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно A-накрывающим, то для утверждения теоремы условие (13) не требуется.

3. Кратные точки совпадения и кратные неподвижные точки

Применим теорему к исследованию одной специальной системы n уравнений с n неизвестными — частного случая системы (1). Рассматриваемая система имеет приложения, например, в задаче о существовании седловых точек в игре с нулевой суммой ([15], гл. XVI, п. 5.3).

Обозначим символом $i(n)$ остаток от деления целого числа i на n.

Пусть при каждом $i = \overline{1,n}$ определены метрические пространства X_i, Y_i, первое из которых полное, и заданы отображения $\psi_i : X_{i(n)+1} \to Y_i$, $\varphi_i : X_i \to Y_i$. Рассмотрим систему

$$\psi_1(x_2) = \varphi_1(x_1),\ \dots,\ \psi_{n-1}(x_n) = \varphi_{n-1}(x_{n-1}),\quad \psi_n(x_1) = \varphi_n(x_n). \tag{18}$$

В случае, когда $Y_i = X_i$ и отображения $\varphi_i : X_i \to X_i$, $i = \overline{1,n}$, являются тождественными, решение системы (18) называют n-кратной неподвижной точкой. Аналогично, решение системы (18) общего вида, т. е. с произвольными отображениями φ_i, ψ_i, естественно назвать n-кратной точкой совпадения.

Сформулируем условия разрешимости системы (18).

Пусть заданы положительные числа α_i, R_i, d_i, неотрицательные числа β_i и элемент $u_i^0 \in X_i$, $i = \overline{1,n}$. Определим множества

$$U_i \doteq \mathrm{B}_{X_i}(u_i^0, R_i), \quad W_i \doteq B_{Y_i}(\psi_i(u^0_{i(n)+1}),\, d_i),$$
$$\widehat{\mathfrak{A}}_i \doteq \{(x,r) \in X_{i(n)+1} \times \mathbb{R} : x \in U_{i(n)+1},\ {\alpha_i}^{-1} r + \rho(x, u^0_{i(n)+1}) \le R_{i(n)+1}\}.$$

Предполагаем, что при каждом $i = \overline{1,n}$ отображение φ_i является β_i-липшицевым на множестве U_i, отображение ψ_i является α_i-накрывающим множество W_i на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}_i$, и множество $(U_{i(n)+1} \times W_i) \bigcap \mathrm{gph}(\psi_i)$ замкнуто в пространстве $X_{i(n)+1} \times Y_i$.

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & {\alpha_1}^{-1} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & {\alpha_{n-1}}^{-1} \\ {\alpha_n}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix},$$

$R \doteq (R_1, \dots, R_n)$, $d \doteq (d_1, \dots, d_n)$, $u^0 \doteq (u_1^0, \dots, u_n^0)$, $U \doteq \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$, $W \doteq \prod\limits_{i=1}^{n} W_i$, и определим отображения $\Phi, \Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ равенствами

$$\Phi(x) = \big(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)\big), \quad \Psi(x) = \big(\psi_1(x_2), \dots,\ \psi_{n-1}(x_n),\ \psi_n(x_1)\big).$$

В силу сделанных предположений отображение Φ является векторно B-липшицевым на множестве U, отображение Ψ — векторно A-накрывающим множество W на определенной соотношением (11) совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}\big(u^0, R\big)$.

Обозначим $c_i = {\beta_i}^{-1}\alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, и вычислим произведение матриц

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & {\alpha_1}^{-1}\beta_1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & {\alpha_{n-1}}^{-1}\beta_{n-1} \\ {\alpha_n}^{-1}\beta_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {c_1}^{-1} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & {c_{n-1}}^{-1} \\ {c_n}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическим многочленом найденной матрицы является $\lambda^n - \big(c_1 \dots c_{n-1}c_n\big)^{-1}$, следовательно, ее спектральный радиус равен $\rho(A) = \big(c_1 \dots c_{n-1}c_n\big)^{-1/n}$. Оценка $\rho(A) < 1$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n > \beta_1 \dots \beta_{n-1}\beta_n. \tag{19}$$

Для удобства обозначений условия разрешимости системы (18) сформулируем отдельно при $n = 2$ и $n \geq 3$. Начнем со случая $n \geq 3$.

Определим матрицы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n - BA = \begin{pmatrix} 1 & -{c_1}^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & -{c_{n-1}}^{-1} \\ -{c_n}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(I_n - BA)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} c_1c_2c_3\dots c_n & c_2c_3\dots c_n & c_3\dots c_n & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2c_3\dots c_nc_1 & c_3\dots c_nc_1 & \cdots & c_nc_1 \\ c_1c_2 & c_2 & c_3\dots c_nc_1c_2 & \cdots & c_nc_1c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1c_2c_3\dots c_{n-1} & c_2c_3\dots c_{n-1} & c_3\dots c_{n-1} & \cdots & c_nc_1c_2\dots c_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$A(I_n{-}BA)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} {\beta_1}^{-1} & {\beta_1}^{-1}c_2c_3\dots c_n & {\beta_1}^{-1}c_3\dots c_n & \cdots & {\beta_1}^{-1}c_n \\ {\beta_2}^{-1}c_1 & {\beta_2}^{-1} & {\beta_2}^{-1}c_3\dots c_nc_1 & \cdots & {\beta_2}^{-1}c_nc_1 \\ {\beta_3}^{-1}c_1c_2 & {\beta_3}^{-1}c_2 & {\beta_3}^{-1} & \cdots & {\beta_3}^{-1}c_nc_1c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ {\beta_n}^{-1}c_1c_2c_3\dots c_{n-1} & {\beta_n}^{-1}c_2c_3\dots c_{n-1} & {\beta_n}^{-1}c_3\dots c_{n-1} & \cdots & {\beta_n}^{-1} \end{pmatrix};$$

здесь $\Delta = c_1c_2\dots c_n - 1$.

Используя эти матрицы, из теоремы получаем

Следствие 1. Пусть выполнена оценка (19) и справедливы неравенства

$$\frac{1}{\Delta}\big(c_1c_2c_3\dots c_n\rho_{Y_1}(\varphi_1(u_1^0), \psi_1(u_2^0)) + c_2c_3\dots c_n\rho_{Y_2}(\varphi_2(u_2^0), \psi_2(u_3^0)) + \dots +$$
$$+ c_n\rho_{Y_n}(\varphi_n(u_n^0), \psi_n(u_1^0))\big) \leq \min\{\alpha_nR_n, d_1\},$$

$$\frac{1}{\Delta}\big(c_2c_3\dots c_nc_1\rho_{Y_2}(\varphi_2(u_2^0), \psi_2(u_3^0)) + c_3\dots c_nc_1\rho_{Y_3}(\varphi_3(u_3^0), \psi_3(u_{3(n)+1}^0)) + \dots +$$
$$+ c_1\rho_{Y_1}(\varphi_1(u_1^0), \psi_1(u_2^0))\big) \leq \min\{\alpha_1R_1,\, d_2\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{\Delta}\big(c_nc_1c_2\dots c_{n-1}\rho_{Y_n}(\varphi_n(u_n^0),\psi_n(u_1^0))+c_1c_2\dots c_{n-1}\rho_{Y_1}(\varphi_1(u_1^0),\psi_1(u_2^0))+\dots+ \\ +c_{n-1}\rho_{Y_{n-1}}(\varphi_{n-1}(u_{n-1}^0),\psi_{n-1}(u_n^0))\big)\le\min\{\alpha_{n-1}R_{n-1},d_n\}.$$

Тогда существует решение $x=(\xi_1,\dots\xi_n)\in\overline{X}$ системы (18), удовлетворяющее оценкам

$$\rho_{X_1}\big(\xi_1,u_1^0\big)\le\frac{1}{\beta_1\Delta}\big(\rho_{Y_1}(\varphi_1(u_1^0),\psi_1(u_2^0))+c_2c_3\dots c_n\rho_{Y_2}(\varphi_2(u_2^0),\psi_2(u_3^0))+\dots+ \\ +c_n\rho_{Y_n}(\varphi_n(u_n^0),\psi_n(u_1^0))\big),$$

$$\rho_{X_2}\big(\xi_2,u_2^0\big)\le\frac{1}{\beta_2\Delta}\big(\rho_{Y_2}(\varphi_2(u_2^0),\psi_2(u_3^0))+c_3\dots c_nc_1\rho_{Y_3}(\varphi_3(u_3^0),\psi_3(u_{3(n)+1}^0))+\dots+ \\ +c_1\rho_{Y_1}(\varphi_1(u_1^0),\psi_1(u_2^0))\big),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$\rho_{X_n}\big(\xi_n,u_n^0\big)\le\frac{1}{\beta_n\Delta}\big(\rho_{Y_n}(\varphi_n(u_n^0),\psi_n(u_1^0))+c_1c_2\dots c_{n-1}\rho_{Y_1}(\varphi_1(u_1^0),\psi_1(u_2^0))+\dots+ \\ +c_{n-1}\rho_{Y_{n-1}}(\varphi_{n-1}(u_{n-1}^0),\psi_{n-1}(u_n^0))\big).$$

В этой формулировке вместо двух неравенств (13) используется одно эквивалентное им в данном случае неравенство

$$(I_n-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Psi(u^0),\Phi(u^0)\big)\le\min\{A^{-1}R,d\}.$$

Теперь рассмотрим систему (18) в случае $n=2$:

$$\psi_1(x_2)=\varphi_1(x_1),\ \ \psi_2(x_1)=\varphi_2(x_2). \tag{20}$$

Решение этой системы называем двойной точкой совпадения.

Как и выше, предполагаем, что метрические пространства X_1, X_2 полные; отображение $\psi_1:X_2\to Y_1$ является α_1-накрывающим множество $W_1\doteq B_{Y_1}(\psi_1(u_2^0),d_1)$ на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}\big(u_2^0,R_2\big)$; отображение $\psi_2:X_1\to Y_2$ — α_2-накрывающим множество $W_2\doteq B_{Y_2}(\psi_2(u_1^0),d_2)$ на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}\big(u_1^0,R_1\big)$; отображение $\varphi_i:X_i\to Y_i$, $i=1,2$, является β_i-липшицевым на $U_i\doteq \mathrm{B}_{X_i}(u_i^0,R_i)$; множества $\mathrm{gph}(\psi_1)\bigcap(U_2\times W_1)$, $\mathrm{gph}(\psi_2)\bigcap(U_1\times W_2)$ замкнуты в соответствующих пространствах $X_2\times Y_1$ и $X_1\times Y_2$.

Рассмотренные выше матрицы в случае $n=2$ имеют вид

$$I_2-BA=\begin{pmatrix}1&-\beta_1{\alpha_1}^{-1}\\-\beta_2{\alpha_2}^{-1}&1\end{pmatrix},\ \ (I_2-BA)^{-1}=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2&\beta_1\alpha_2\\\beta_2\alpha_1&\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix},$$

$$A(I_2-BA)^{-1}=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}\begin{pmatrix}\beta_2&\alpha_2\\\alpha_1&\beta_1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем

Следствие 2. Пусть выполнена оценка $\alpha_1\alpha_2>\beta_1\beta_2$ и справедливы неравенства

$$\alpha_1\alpha_2\rho_{Y_1}\big(\varphi_1(u_1^0),\psi_1(u_2^0)\big)+\alpha_2\beta_1\rho_{Y_2}\big(\varphi_2(u_2^0),\psi_2(u_1^0)\big)\le(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\min\{\alpha_2R_2,d_1\},$$
$$\alpha_2\alpha_1\rho_{Y_2}\big(\varphi_2(u_2^0),\psi_2(u_1^0)\big)+\alpha_1\beta_2\rho_{Y_1}\big(\varphi_1(u_1^0),\psi_1(u_2^0)\big)\le(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\min\{\alpha_1R_1,d_2\}.$$

Тогда существует решение $x=(\xi_1,\xi_2)\in X_1\times X_2$ системы (20) с оценками

$$\rho_{X_1}\big(\xi_1,u_1^0\big)\le\frac{1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}\big(\beta_2\rho_{Y_1}(\varphi_1(u_1^0),\psi_1(u_2^0))+\alpha_2\rho_{Y_2}(\varphi_2(u_2^0),\psi_2(u_1^0))\big),$$
$$\rho_{X_2}\big(\xi_2,u_2^0\big)\le\frac{1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}\big(\beta_1\rho_{Y_2}(\varphi_2(u_2^0),\psi_2(u_1^0))+\alpha_1\rho_{Y_1}(\varphi(u_1^0),\psi_1(u_2^0))\big).$$

Теперь рассмотрим частный случай системы (18), когда $Y_i=X_i$, а отображения $\varphi_i:X_i\to X_i$, $i=\overline{1,n}$, являются тождественными. Как отмечено выше, решение такой системы называют n-кратной неподвижной точкой.

Итак, пусть для любого $i=\overline{1,n}$ задано полное метрическое пространство X_i и определено отображение $\psi_i:X_{i(n)+1}\to X_i$, являющееся α_i-накрывающим множество $W_i\doteq B_{X_i}(\psi_i(u^0_{i(n)+1}),d_i)$ на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}\big(u^0_{i(n)+1},R_{i(n)+1}\big)$ и имеющее график, подмножество которого $\mathrm{gph}(\psi_i)\bigcap(U_{i(n)+1}\times W_i)$ замкнуто в $X_{i(n)+1}\times Y_i$.

Рассмотрим систему

$$x_1=\psi_1(x_2),\ \ldots,\ x_{n-1}=\psi_{n-1}(x_n),\ \ x_n=\psi_n(x_1). \tag{21}$$

и ее частный случай при $n=2$:

$$x_1=\psi_1(x_2),\ x_2=\psi_2(x_1). \tag{22}$$

Учитывая, что тождественное отображение $\varphi_i:X_i\to X_i$, $\varphi_i(x_i)=x_i$, является 1-липшицевым на всем X_i, из следствий 1, 2 получаем два утверждения.

Следствие 3. Пусть $n\ge 3$, выполнена оценка $\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n>1$ и справедливы неравенства

$$\frac{1}{\Delta}\big(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\rho_{X_1}(u_1^0,\psi_1(u_2^0))+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\rho_{X_2}(u_2^0,\psi_2(u_3^0))+\cdots+\alpha_n\rho_{X_n}(u_n^0,\psi_n(u_1^0))\big)\le$$
$$\le\min\{\alpha_nR_n,d_1\},$$

$$\frac{1}{\Delta}\big(\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\alpha_1\rho_{X_2}(u_2^0,\psi_2(u_3^0))+\alpha_3\ldots\alpha_n\alpha_1\rho_{X_3}(u_3^0,\psi_3(u^0_{3(n)+1}))+\cdots+\alpha_1\rho_{X_1}(u_1^0,\psi_1(u_2^0))\big)\le$$
$$\le\min\{\alpha_1R_1,\ d_2\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{\Delta}\big(\alpha_n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\rho_{X_n}(u_n^0,\psi_n(u_1^0))+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\rho_{X_1}(u_1^0,\psi_1(u_2^0))+\cdots+$$
$$+\alpha_{n-1}\rho_{X_{n-1}}(u^0_{n-1},\psi_{n-1}(u_n^0))\big)\le\min\{\alpha_{n-1}R_{n-1},d_n\},$$

где $\Delta=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n-1$. Тогда существует решение $x=(\xi_1,\ldots\xi_n)\in\overline{X}$ системы (21) с оценками

$$\rho_{X_1}\big(\xi_1,u_1^0\big)\le\frac{1}{\Delta}\big(\rho_{X_1}(u_1^0,\psi_1(u_2^0))+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\rho_{X_2}(u_2^0,\psi_2(u_3^0))+\ldots+\alpha_n\rho_{X_n}(u_n^0,\psi_n(u_1^0))\big),$$
$$\rho_{X_2}\big(\xi_2,u_2^0\big)\le\frac{1}{\Delta}\big(\rho_{X_2}(u_2^0,\psi_2(u_3^0))+\alpha_3\ldots\alpha_n\alpha_1\rho_{X_3}(u_3^0,\psi_3(u^0_{3(n)+1}))+\ldots+\alpha_1\rho_{X_1}(u_1^0,\psi_1(u_2^0))\big),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\rho_{X_n}\big(\xi_n,u_n^0\big)\le\frac{1}{\Delta}\big(\rho_{X_n}(u_n^0,\psi_n(u_1^0))+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\rho_{X_1}(u_1^0,\psi_1(u_2^0))+\cdots+$$
$$+\alpha_{n-1}\rho_{X_{n-1}}(u^0_{n-1},\psi_{n-1}(u_n^0))\big).$$

Следствие 4. Пусть $n = 2$, выполнена оценка $\alpha_1\alpha_2 > 1$ и справедливы неравенства

$$\alpha_1\alpha_2\rho_{X_1}\big(u_1^0, \psi_1(u_2^0)\big) + \alpha_2\rho_{X_2}\big(u_2^0, \psi_2(u_1^0)\big) \le (\alpha_1\alpha_2 - 1)\min\{\alpha_2 R_2, d_1\},$$
$$\alpha_2\alpha_1\rho_{X_2}\big(u_2^0, \psi_2(u_1^0)\big) + \alpha_1\rho_{X_1}\big(u_1^0, \psi_1(u_2^0)\big) \le (\alpha_1\alpha_2 - 1)\min\{\alpha_1 R_1, d_2\}.$$

Тогда существует решение $x = (\xi_1, \xi_n) \in X_1 \times X_2$ системы (22) с оценками

$$\rho_{X_1}\big(\xi_1, u_1^0\big) \le \frac{1}{\alpha_1\alpha_2 - 1}\big(\rho_{X_1}(u_1^0, \psi_1(u_2^0)) + \alpha_2\rho_{X_2}(u_2^0, \psi_2(u_1^0))\big),$$
$$\rho_{X_2}\big(\xi_2, u_2^0\big) \le \frac{1}{\alpha_1\alpha_2 - 1}\big(\rho_{X_2}(u_2^0, \psi_2(u_2^0)) + \alpha_1\rho_{X_1}(u_1^0, \psi_1(u_2^0))\big).$$

Отметим, что условия существования двойных неподвижных точек для многозначных отображений, обладающих свойством “глобального” накрывания, получены в [8].

Благодарю профессора А.В. Арутюнова за обсуждение работы и полезные замечания.

Литература

[1] Арутюнов А.В. *Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки*, Докл. РАН **416** (2), 151–155 (2007).

[2] Арутюнов А.В. *Устойчивость точек совпадения и многозначные накрывающие отображения в метрических пространствах*, Докл. РАН **427** (5), 583–585 (2009).

[3] Арутюнов А.В. *Точки совпадения двух отображений*, Функц. анализ и его прилож. **48** (1), 89–93 (2014).

[4] Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S, Zhukovskii S.E. *Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations*, Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl. **75**, 1026–1044 (2012).

[5] Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. *Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной*, Дифференц. уравнения **45** (5), 613–634 (2009).

[6] Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. *О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной*, Дифференц. уравнения **47** (11), 1523–1537 (2011).

[7] Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. *Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной*, Дифференц. уравнения **49** (4), 439 (2013).

[8] Арутюнов А.В., Гельман Б.Д. *О структуре множества точек совпадения*, Матем. сборник **206** (3), 35–56 (2015).

[9] Арутюнов А.В. *Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений*, Матем. заметки **86** (2), 163–169 (2009).

[10] Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. *Locally covering maps in metric spaces and coincidence points*, J. Fixed Points Theory and Appl. **5** (1), 105–127 (2009).

[11] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений* (Наука, М., 1969).

[12] Коллатс Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика* (Мир, М., 1969).

[13] *Функциональный анализ.* Под общей редакцией С.Г. Крейна (СМБ. М., 1972).

[14] Прасолов В.В. *Задачи и теоремы линейной алгебры.* 2-е изд. (М., 2008).

[15] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1984).

Е.С. Жуковский

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина,
ул. Интернациональная, д. 33, г. Тамбов, 392000, Россия,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, г. Москва, 117198, Россия,

`e-mail:` zukovskys@mail.ru

E.S. Zhukovskiy

On coincidence points for vector mappings

Abstract. For mappings acting in the product of metric spaces we propose a concept of vector covering. This concept is a natural extension of the notion of covering for mappings in metric spaces. The statements on the solvability of systems of operator equations are proved for the case when the left-hand side of an equation is a value of a vector covering mapping and the right-hand side is Lipschitzian vector mapping. In the scalar case the obtained statements are equivalent to the coincide point theorems by A.V. Arutyunov. As an application, we prove a statement on the existence of n-fold coincidence points and obtain estimates of the points. The sufficient conditions for n-fold fixed points existence, including the well-known theorems on double fixed point, follow from the obtained results.

Keywords: system of operator equations, vector covering mappings of metric spaces, coincidence points, n-fold fixed points.

E.S. Zhukovskiy

Tambov State University,
33 Internatsional'naya str., Tambov, 392000 Russia,
Peoples' Friendship University of Russia,
6 Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198 Russia,

`e-mail:` zukovskys@mail.ru