ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.929 : 517.925

Ж. С. П. МУНЕМБЕ

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1. Постановка задачи

Будем предполагать в задаче Коши для системы функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) - P(t)x[h(t)] = f(t), \quad t \in [0,\infty), \quad x(\xi) = \varphi(\xi), \text{ если } \xi < 0, \tag{1}$$
$$x(0) = \alpha, \tag{2}$$

что столбцы $n\times n$-матрицы $P : [0,\infty)\to\mathbf{R}^{n\times n}$ и функция $f : [0,\infty)\to\mathbf{R}^n$ периодические с периодом $T > 0$ и суммируемы на периоде; запаздывание $h : [0,\infty)\to R$ имеет вид $h(t) = t-\Delta(t)$, $0\le\Delta(t)\le T$, где функция $\Delta : [0,\infty)\to[0,T]$ измерима и периодична с периодом T; начальная функция $\varphi : [-T,0]\to\mathbf{R}^n$ такова, что функция $\varphi^h : [0,\infty)\to\mathbf{R}^n$, определенная равенством

$$\varphi^h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } h(t)\ge 0;\\ \varphi[h(t)], & \text{если } h(t) < 0,\end{cases}$$

измерима и ограничена в существенном на $[0,\infty)$.

Всюду ниже через $\mathbf{L} = \mathbf{L}[0,b]$ будем обозначать пространство суммируемых функций $f : [0,b] \to \mathbf{R}^n$, а через $\mathbf{C} = \mathbf{C}[0,b]$ — пространство непрерывных функций $x : [0,b] \to \mathbf{R}^n$, $\|x\|_{\mathbf{C}} = \max\limits_{t\in[0,b]} \|x(t)\|_{\mathbf{R}^n}$.

Используя стандартное обозначение [1]

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если } h(t)\ge 0;\\ 0, & \text{если } h(t) < 0,\end{cases}$$

запишем систему (1) в виде

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - P(t)x_h(t) = f(t) + P(t)\varphi^h(t), \quad t \in [0,\infty). \tag{3}$$

Как известно ([1], [2]), решение $x(t,\alpha)$ задачи (1), (2) ((3), (2)) представимо в виде

$$x(t) = C(t,0)\alpha + \int_0^t C(t,s)P(s)\varphi^h(s)ds + \int_0^t C(t,s)f(s)ds, \quad t \in [0,\infty),$$

где $C(t,s)$ — матрица Коши оператора $\mathcal{L}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Capacity Building Project (Credit 2436, Eduardo Mondlane University — Mozambique).

Определение. Будем говорить, что решение $x(t,\alpha)$ задачи (1), (2) стабилизируется к периодической функции $y:[0,\infty)\to\mathbf{R}^n$ периода T, если

$$\lim_{\nu\to\infty}\max_{t\in[(\nu-1)T,\nu T]}\|x(t,\alpha)-y(t)\|_{\mathbf{R}^n}=0.$$

В предлагаемой статье будут установлены условия стабилизируемости решения задачи (1), (2) к периодической функции и даны оценки скорости стабилизируемости. Для случая $h:[0,T]\to[0,T]$ такие условия можно найти в [3].

2. Свойства матрицы Коши

Утверждение. *Матрица Коши операции $\mathcal{L}$ обладает свойством периодичности*

$$C(t+T,s+T)=C(t,s),\quad 0\le s\le t<\infty.$$

Доказательство. Функция h обладает свойством $h(t+T)=h(t)+T$. Обозначим через $\chi_h(t,s)$ характеристическую функцию множества $\{(t,s)\in[0,\infty)\times[0,\infty):0\le s\le h(t)<\infty\}$. Так как справедливо равенство $x_h(t)=\chi_h(t,0)x(0)+\int\limits_0^t\chi_h(t,s)\dot{x}(s)ds$, то, подставив правую часть этого представления в (3), получим

$$\dot{x}(t)-\int\limits_0^t P(t)\chi_h(t,s)\dot{x}(s)ds-P(t)\chi_h(t,0)x(0)=f(t)+P(t)\varphi^h(t).$$

Обозначим $K(t,s)\stackrel{\text{def}}{=}P(t)\chi_h(t,s)$, $f_1(t)\stackrel{\text{def}}{=}f(t)+P(t)\varphi^h(t)+P(t)\chi_h(t,0)x(0)$ и $z(t)=\dot{x}(t)$. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$z(t)-\int\limits_0^t K(t,s)z(s)ds=f_1(t),\quad t\in[0,\infty).$$

Равенство

$$K(t+T,s+T)=K(t,s),\quad 0\le s\le t<\infty,$$

проверяется непосредственно.

Обозначим через K оператор, действующий из $\mathbf{L}[0,b]$ в $\mathbf{L}[0,b]$ по правилу

$$(Kz)(t)=\int\limits_0^t K(t,s)z(s)ds.$$

Определим итерированные ядра. Считая $K_1(t,s)\equiv K(t,s)$, для m-й степени K имеем $(K^m y)(t)=\int\limits_0^t K_m(t,s)y(s)ds$, где $K_m(t,s)$ — m-е итерированное ядро: $K_m(t,s)=\int\limits_s^t K_{m-1}(t,\tau)K(\tau,s)d\tau$, $m=2,3,\ldots$ Покажем, что каждое итерированное ядро периодично по совокупности переменных.

Действительно, пусть $m=2$. Тогда

$$K_2(t,s)=\int\limits_s^t K(t,\tau)K(\tau,s)d\tau$$

и

$$K_2(t+T,s+T)=\int\limits_{s+T}^{t+T}P(t+T)\chi_h(t+T,\tau)P(\tau)\chi_h(\tau,s+T)d\tau=$$

$$=\int\limits_s^t P(t)\chi_h(t+T,\tau+T)P(\tau+T)\chi_h(\tau+T,s+T)d\tau=\int\limits_s^t P(t)\chi_h(t,\tau)P(\tau)\chi_h(\tau,s)d\tau=K_2(t,s).$$

Далее, по индукции легко проверить, что для любого $m > 2$ имеет место равенство

$$K_m(t+T, s+T) = K_m(t,s), \quad 0 \le s \le t < \infty.$$

В ряде

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,s), \quad 0 \le s \le t < \infty, \tag{4}$$

итерированные ядра K_m будем считать элементами пространства $\mathbf{L}_{1,\infty}^b$ измеримых функций $K : [0,b]\times[0,b] \to \mathbf{R}^{n\times n}$ таких, что

$$\|K(\cdot,\cdot)\|_{\mathbf{L}_{1,\infty}^b} \overset{\text{def}}{=} \|K(\cdot,\cdot)\|_{1,\infty}^b \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,b]} \int\limits_s^b \|K(t,s)\| dt < \infty,$$

где $\|\cdot\|$ — норма матрицы, согласованная с $\|\cdot\|_{\mathbf{R}^n}$.

Обозначим через $p(t)$ такую T-периодическую суммируемую на периоде функцию, что $p(t) \ge \|P(t)\|$, $t \in [0,T]$.

Построим для этого ряда мажоранту. Тогда

$$\|K_m(t,s)\| \le p(t)\frac{\left[\int\limits_0^b p(\tau)d\tau\right]^{m-1}}{(m-1)!}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\|K_m(\cdot,\cdot)\|_{1,\infty}^b \le \frac{\left[\int\limits_0^b p(\tau)d\tau\right]^{m}}{(m-1)!},$$

что гарантирует сходимость ряда (4) в пространстве $\mathbf{L}_{1,\infty}^b$.

Обозначая через $R(t,s)$ сумму ряда (4), имеем в силу произвольности b

$$R(t,s) = R(t+T, s+T), \quad 0 \le s \le t < \infty.$$

Как известно, $R(t,s)$ является резольвентой ядра $K(t,s)$: при любой правой части f решение уравнения $z - Kz = f$ представимо в виде $z = f + Rf$, где R — оператор, действующий из $\mathbf{L}[0,b]$ в $\mathbf{L}[0,b]$ по правилу

$$(Rf)(t) = \int\limits_0^t R(t,s)f(s)ds.$$

Далее, из известных [4] соотношений

$$R(t,s) = C_t'(t,s), \quad 0 \le s \le t < \infty,$$

$$C(t,s) = E + \int\limits_s^t C_\tau'(\tau,s)d\tau, \quad 0 \le s \le t < \infty,$$

выражающих связь между резольвентным ядром $R(t,s)$ для ядра $K(t,s)$ и матрицей Коши $C(t,s)$, имеем

$$R(t+T, s+T) = C_t'(t+T, s+T).$$

Отсюда следует

$$C(t+T, s+T) = E + \int\limits_{s+T}^{t+T} C_\tau'(\tau, s+T)d\tau = E + \int\limits_s^t C_\tau'(\tau+T, s+T)d\tau = E + \int\limits_s^t C_\tau'(\tau,s)d\tau = C(t,s). \ \square$$

3. Построение вспомогательной задачи

Для нахождения условий стабилизируемости построим некоторую вспомогательную задачу. Сначала рассмотрим последовательное построение решения задачи (3), (2) ((1), (2)).

Разобьем интервал $[0,\infty)$ точками $0 < T < \cdots < \nu T < (\nu+1)T < \cdots$ Обозначим через $C_\nu(t,s) = \{C_{ij}^\nu(t,s)\}_{i,j=1}^n$, $\nu = 1,2,\ldots$, сужение матрицы Коши $C(t,s)$ на множество

$$\mathcal{D}_\nu = \{(t,s) : t \in [(\nu-1)T, \nu T],\ s \in [0,t]\},$$

а через $x_\nu(t)$ — сужение решения задачи (1), (2), определенное на промежутке $[(\nu-1)T, \nu T]$, $\nu = 1,2,\ldots$ Через $\chi_\nu(t)$ обозначим характеристическую функцию отрезка $[(\nu-1)T,\nu T]$, $\nu = 1,2,\ \ldots$ В этих обозначениях решение задачи (1), (2) может быть представлено в виде

$$x(t,\alpha) = \sum_{\nu=1}^{(N+1)T} x_\nu(t)\chi_\nu(t), \quad N = 1,2,\ \ldots$$

Функция $x_\nu(t)$, $t \in [(\nu-1)T,\nu T]$, $\nu = 1,2,\ldots$, является решением задачи Коши

$$(\mathcal{L}_\nu x_\nu)(t) \equiv \dot{x}_\nu(t) - P(t)[(\Upsilon_{\nu-1}^h x_\nu) + (\Gamma_{\nu-1}^h x_{\nu-1})](t) = f(t), \quad t \in [(\nu-1)T, \nu T], \qquad (5_\nu)$$

$$x_\nu((\nu-1)T) = \alpha_\nu. \qquad (6_\nu)$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_\nu = x_{\nu-1}((\nu-1)T)$, $\nu = 2,3,\ldots$, $x_0(t) \equiv \varphi(t)$, $(\Gamma_0^h x_0)(t) = \varphi^h(t)$,

$$(\Upsilon_{\nu-1}^h x_\nu)(t) = \begin{cases} x_\nu[h(t)], & \text{если } h(t) \in [(\nu-1)T, \nu T]; \\ 0, & \text{если } h(t) \in [(\nu-2)T, (\nu-1)T], \end{cases} \quad t \in [(\nu-1)T, \nu T],$$

и

$$(\Gamma_{\nu-1}^h x_{\nu-1})(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } h(t) \in [(\nu-1)T, \nu T]; \\ x_{\nu-1}[h(t)], & \text{если } h(t) \in [(\nu-2)T, (\nu-1)T], \end{cases} \quad t \in [(\nu-1)T, \nu T].$$

Сужение $x_1(t)$ решения задачи (3), (2) имеет вид

$$x_1(t) = C_1(t,0)x_1(0) + \int_0^t C_1(t,s)P(s)\varphi^h(s)ds + \int_0^t C_1(t,s)f(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

В силу известной формулы Коши ([5], с. 92–95) на втором промежутке $[T,2T]$ сужение решения задачи (3), (2) представимо в виде

$$x_2(t) = C_2(t,T)x_1(T) + \int_T^t C_2(t,s)P(s)(\Gamma_1^h x_1)(s)ds + \int_T^t C_2(t,s)f(s)ds, \quad t \in [T,2T].$$

Аналогично для сужения $x_\nu(t)$ решения задачи (3), (2) получаем представление

$$x_\nu(t) = C_\nu(t,(\nu-1)T)x_{\nu-1}((\nu-1)T) + \int_{(\nu-1)T}^t C_\nu(t,s)P(s)(\Gamma_{\nu-1}^h x_{\nu-1})(s)ds +$$

$$+ \int_{(\nu-1)T}^t C_\nu(t,s)f(s)ds, \quad t \in [(\nu-1)T, \nu T].$$

Упомянутая выше вспомогательная задача строится на основе последовательности задач (5_ν)–(6_ν) следующим образом.

Построим на отрезке $[0,T]$ последовательность функций

$$\begin{aligned}
&\overline{x}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_1(t), && t\in[0,T],\\
&\overline{x}_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_2(t+T), && t\in[0,T],\\
&\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\\
&\overline{x}_\nu(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_\nu(t+(\nu-1)T), && t\in[0,T],
\end{aligned}$$

где $x_\nu(\cdot)$ — решение задачи (5_ν)–(6_ν). Определим оператор $\Gamma^{h+T}:\mathbf{C}[0,T]\to\mathbf{L}[0,T]$ равенством

$$(\Gamma^{h+T}z)(t)=\begin{cases}0, & \text{если } h(t)+T\notin[0,T];\\ z[h(t)+T], & \text{если } h(t)+T\in[0,T],\end{cases}\quad t\in[0,T].$$

Покажем, что

$$\overline{x}_1(t)=C(t,0)\alpha+\int\limits_0^t C(t,s)P(s)\varphi^h(s)ds+\int\limits_0^t C(t,s)f(s)ds, \tag{7}$$

$$\overline{x}_\nu(t)=C(t,0)\overline{x}_{\nu-1}(T)+\int\limits_0^t C(t,s)P(s)(\Gamma^{h+T}\overline{x}_{\nu-1})(s)ds+\int\limits_0^t C(t,s)f(s)ds,\quad \nu=2,3,\ldots \tag{8_ν}$$

При $\nu=2$ равенство (8_ν) справедливо, т. к. в силу периодичности матрицы Коши имеем

$$C_\nu(t,s)=C_{\nu-1}(t+T,s+T)=C(t,s),\quad \nu=1,2,\ldots,\quad C_0(t,s)\stackrel{\text{def}}{=}C(t,s),\qquad (t,s)\in\mathcal{D}_\nu,$$

$$\overline{x}_2(t)\stackrel{\text{def}}{=}x_2(t+T)=C_2(t+T,T)x_2(T)+\int\limits_T^{t+T} C_2(t+T,s)P(s)(\Gamma_1^h x_1)(s)ds+\int\limits_T^{t+T} C_2(t+T,s)f(s)ds=$$

$$=C(t,0)\overline{x}_1(T)+\int\limits_0^t C_2(t+T,s+T)P(s+T)(\Gamma_1^h x_1)(s+T)ds+\int\limits_0^t C_2(t+T,s+T)f(s+T)ds=$$

$$=C(t,0)\overline{x}_1(T)+\int\limits_0^t C(t,s)P(s)(\Gamma^{h+T}\overline{x}_1)(s)ds+\int\limits_0^t C(t,s)f(s)ds.$$

Пусть (8_ν) выполнено при некотором ν. Убедимся, что имеет место $(8_{\nu+1})$. Действительно,

$$\overline{x}_{\nu+1}(t)\stackrel{\text{def}}{=}x_{\nu+1}(t+\nu T)=$$

$$=C_{\nu+1}(t+\nu T,\nu T)x_\nu(\nu T)+\int\limits_{\nu T}^{t+\nu T} C_{\nu+1}(t+\nu T,s)P(s)(\Gamma_\nu^h x_\nu)(s)ds+\int\limits_{\nu T}^{t+\nu T} C_{\nu+1}(t+\nu T,s)f(s)ds=$$

$$=C(t,0)\overline{x}_\nu(T)+\int\limits_0^t C_{\nu+1}(t+\nu T,s+\nu T)P(s+\nu T)(\Gamma_\nu^h x_\nu)(s+\nu T)ds+$$

$$+\int\limits_0^t C_{\nu+1}(t+\nu T,s+\nu T)f(s+\nu T)ds=$$

$$=C(t,0)\overline{x}_\nu(T)+\int\limits_0^t C(t,s)P(s)(\Gamma^{h+T}\overline{x}_\nu)(s)ds+\int\limits_0^t C(t,s)f(s)ds.$$

Обозначив

$$g(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)ds,$$

запишем равенство (8_ν) в виде

$$\overline{x}_\nu(t) = C(t,0)\overline{x}_{\nu-1}(T) + \int_0^t C(t,s)P(s)(\Gamma^{h+T}\overline{x}_{\nu-1})(s)ds + g(t), \quad \nu = 2,3,\ldots \tag{9}$$

Здесь функция $\overline{x}_1(t) = x(t,\alpha)$, $t \in [0,T]$, определена соотношением (7).

Соотношение (9) определяет процесс построения простых итераций для уравнения

$$z(t) = C(t,0)z(T) + \int_0^t C(t,s)P(s)(\Gamma^{h+T}z)(s)ds + g(t), \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Заметим, что уравнение (10) относится к так называемым нагруженным интегральным уравнениям с отклоняющимся аргументом. Заметим также, что любое решение уравнения (10) удовлетворяет периодическому условию $z(0) = z(T)$.

Задача о стабилизируемости решения задачи (3), (2) к периодической функции сводится к задаче о сходимости итерационного процесса для вспомогательного уравнения (10) (см. п.5). В случае $h : [0,T] \to [0,T]$ уравнение (10) принимает вид

$$z(t) = C(t,0)z(T) + g(t)$$

и, как легко видеть, итерационный процесс (9) сходится, если спектральный радиус оператора монодромии $C(T,0) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ меньше единицы.

4. Условие сходимости итераций для вспомогательного уравнения

Для формулировки условий сходимости итерационого процесса (9) запишем (10) в виде

$$z = (A+B)z + g, \tag{11}$$

где линейные операторы $A, B : \mathbf{C}[0,T] \to \mathbf{C}[0,T]$ определяются равенствами

$$(Az)(t) = C(t,0)z(T),$$

$$(Bz)(t) = \int_0^t C(t,s)P(s)(\Gamma^{h+T}z)(s)ds.$$

Обозначим через $\rho = \rho(A+B)$ спектральный радиус оператора

$$(A+B) : \mathbf{C}[0,T] \to \mathbf{C}[0,T].$$

Как известно, при выполнении условия

$$\rho < 1 \tag{12}$$

уравнение (10) имеет единственное решение $z^* \in \mathbf{C}[0,T]$ и итерационный процесс (9) сходится в смысле нормы пространства $\mathbf{C}[0,T]$ к z^*, т. е. $\|\overline{x}_\nu - z^*\|_{\mathbf{C}[0,T]} \to 0$.

Явную оценку скорости такой сходимости дает

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (12). *Тогда для каждого* $\epsilon > 0$ *такого, что* $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \rho + \epsilon < 1$, *найдется такое натуральное* $k_0 \stackrel{\text{def}}{=} k_0(\delta)$, *что имеет место оценка*

$$\|\overline{x}_\nu - z^*\|_{\mathbf{C}[0,T]} \le \frac{\delta^{\nu-1}}{1-\delta}\frac{M}{m}\|\overline{x}_1 - (A+B)\overline{x}_1 - g\|_{\mathbf{C}[0,T]},$$

где $m \stackrel{\text{def}}{=} \delta^{k_0-1}$, $M \stackrel{\text{def}}{=} \delta^{k_0-1} + \delta^{k_0-2}\|A+B\| + \cdots + \|(A+B)^{k_0-1}\|$.

Доказательство. Пусть $\rho = \rho(A+B) = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|(A+B)^k\|}$ и $\rho < 1$. Задаем $\epsilon > 0$ такое, что $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \rho + \epsilon < 1$. Используя конструкцию, описанную в ([6], с. 15), введем в пространство $\mathbf{C}[0,T]$ такую эквивалентную норму $\|\cdot\|_*$, при которой норма линейного оператора $A+B$ будет отличаться от спектрального радиуса не более чем на ϵ. А именно, в силу определения спектрального радиуса найдется такое $k_0 = k_0(\delta)$, что

$$\sqrt[k_0]{\|(A+B)^{k_0}\|} \le \delta.$$

В этом доказательстве для простоты записи будем опускать индекс $\mathbf{C}[0,T]$ у нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{C}[0,T]}$.

Положим

$$\|\overline{x}\|_* = \delta^{k_0-1}\|\overline{x}\| + \delta^{k_0-2}\|(A+B)\overline{x}\| + \ \ldots \ + \|(A+B)^{k_0-1}\overline{x}\|.$$

Очевидно

$$m\|\overline{x}\| \le \|\overline{x}\|_* \le M\|\overline{x}\|,$$

т. е. нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ эквивалентны. Покажем, что $\|A+B\|^* \le \delta$ в новой норме (здесь $\|A+B\|^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{\|x\|_*\le 1} \|(A+B)x\|_*$). Действительно,

$$\begin{gathered}
\|(A+B)\overline{x}\|_* = \delta^{k_0-1}\|(A+B)\overline{x}\| + \delta^{k_0-2}\|(A+B)^2\overline{x}\| + \cdots + \|(A+B)^{k_0}\overline{x}\| \le \\
\le \delta^{k_0-1}\|(A+B)\overline{x}\| + \delta^{k_0-2}\|(A+B)^2\overline{x}\| + \cdots + \delta\|(A+B)^{k_0-1}\overline{x}\| + \|(A+B)^{k_0}\|\|\overline{x}\| \le \\
\le \delta^{k_0-1}\|(A+B)\overline{x}\| + \delta^{k_0-2}\|(A+B)^2\overline{x}\| + \cdots + \delta\|(A+B)^{k_0-1}\overline{x}\| + \delta^{k_0}\|\overline{x}\| = \\
= \delta[\delta^{k_0-1}\|\overline{x}\| + \delta^{k_0-2}\|(A+B)\overline{x}\| + \cdots + \|(A+B)^{k_0-1}\overline{x}\|] = \delta\|\overline{x}\|_*,
\end{gathered}$$

т. е.

$$\|A+B\|_* \le \delta.$$

Таким образом, оператор $A+B$ является оператором сжатия. В таком случае при любом начальном элементе $\overline{x}_1(\cdot,\alpha)$ последовательные приближения (9) сходятся к элементу $z^* \in \mathbf{C}[0,T]$, при этом

$$\|\overline{x}_\nu - z^*\|_* \le \delta^{\nu-1}\|\overline{x}_1 - z^*\|_* \tag{13}$$

и

$$\|\overline{x}_1 - z^*\|_* \le \frac{1}{1-\delta}\|\overline{x}_1 - (A+B)\overline{x}_1 - g\|_*. \tag{14}$$

В силу (13) и (14) имеем

$$\|\overline{x}_\nu - z^*\|_* \le \frac{\delta^{\nu-1}}{1-\delta}\|\overline{x}_1 - (A+B)\overline{x}_1 - g\|_*.$$

Используя эквивалентность норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$, получаем

$$\begin{gathered}
\|\overline{x}_\nu - z^*\| \le \frac{1}{m}\|\overline{x}_\nu - z^*\|_* \le \frac{1}{m}\frac{\delta^{\nu-1}}{1-\delta}\|\overline{x}_1 - (A+B)\overline{x}_1 - g\|_* = \\
= \frac{\delta^{\nu-1}}{1-\delta}\frac{1}{m}(\delta^{k_0-1}\|\overline{x}_1 - (A+B)\overline{x}_1 - g\| + \delta^{k_0-2}\|(A+B)(\overline{x}_1 - (A+B)\overline{x}_1 - g)\| + \cdots + \\
+ \|(A+B)^{k_0-1}(\overline{x}_1 - (A+B)\overline{x}_1 - g)\|) \le \\
\le \frac{\delta^{\nu-1}}{1-\delta}\frac{1}{m}(\delta^{k_0-1} + \delta^{k_0-2}\|A+B\| + \cdots + \|(A+B)^{k_0-1}\|)\|\overline{x}_1 - (A+B)\overline{x}_1 - g\| = \\
= \frac{\delta^{\nu-1}}{1-\delta}\frac{M}{m}\|\overline{x}_1 - (A+B)\overline{x}_1 - g\|. \qquad \square
\end{gathered}$$

5. Условие и оценка скорости стабилизируемости

Теорема 2. *Пусть спектральный радиус* ρ *оператора* $A+B$ *меньше единицы и* $y:[0,\infty)\to \mathbf{R}^n$ — T*-периодическое продолжение решения* $z^*\in \mathbf{C}[0,T]$ *уравнения* (11). *Тогда для любого такого* $\varepsilon>0$*, что* $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \rho(A+B)+\varepsilon<1$*, найдется натуральное* $k_0=k_0(\delta)$*, при котором имеет место оценка*

$$\max_{t\in[(\nu-1)T,\nu T]}\|x(t,\alpha)-y(t)\|_{\mathbf{R}^n}\le \frac{\delta^{\nu-1}}{1-\delta}\frac{M}{m}\|x(\cdot,\alpha)-(A+B)x(\cdot,\alpha)-g\|_{\mathbf{C}[0,T]}. \tag{15}$$

Доказательство. Действительно,

$$\max_{t\in[(\nu-1)T,\nu T]}\|x(t,\alpha)-y(t)\|_{\mathbf{R}^n}=\max_{t\in[(\nu-1)T,\nu T]}\|x_\nu(t)-z^*(t)\|_{\mathbf{R}^n}=$$
$$=\max_{t\in[0,T]}\|x_\nu(t+(\nu-1)T)-z^*(t)\|_{\mathbf{R}^n}=\max_{t\in[0,T]}\|\overline{x}_\nu(t)-z^*(t)\|_{\mathbf{R}^n}.$$

Отсюда в силу теоремы 1 имеем

$$\max_{t\in[0,T]}\|\overline{x}_\nu(t)-z^*(t)\|_{\mathbf{R}^n}\le \frac{\delta^{\nu-1}}{1-\delta}\frac{M}{m}\|x(\cdot,\alpha)-(A+B)x(\cdot,\alpha)-g\|_{\mathbf{C}[0,T]},$$

следовательно, выполняется (15). □

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of linear functional differential equations.* – Atlanta: World Federation Publ., 1996. – 176 p.
3. Башкиров А.И. *Устойчивость решений периодических систем с последействием*: Дис.… канд. физ.-матем. наук. – Пермь, 1986. – 102 с.
4. Максимов В.П. *О формуле Коши для функционально-дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т.13. – № 4. – С. 601–606.
5. Максимов В.П. *Линейное функционально-дифференциальное уравнение*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1974. – 119 с.
6. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.

Пермский государственный университет

Поступила
24.05.1999