ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.548

В.В. ВАСИН, Т.И. СЕРЁЖНИКОВА

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА–СТИЛЬТЬЕСА

1. Введение

Предметом рассмотрения статьи является интегральное уравнение Фредгольма–Стильтьеса первого рода

$$Ax \equiv \int_a^b K(t,s)dx(s) = y(t), \quad c \le t \le d, \tag{1.1}$$

в пространстве функций ограниченной вариации $\bigvee\limits_a^b$, где $y \in L_p[c,d]$, $K(t,s)$ — непрерывная функция по совокупности переменных.

Уравнения такого типа возникают в качестве математической модели некоторых проблем сейсмики [1], [2] и радиозондирования [3], [4]. Более общие постановки некорректных задач (в том числе нелинейных) на классах разрывных функций (в частности, на $\bigvee\limits_a^b$) исследовались в работах [5]–[9] с точки зрения обоснования вариационных методов регуляризации и конечномерной аппроксимации.

В данной статье исследуется метод Тихонова со стабилизатором $\Omega(x) = \|x - x^0\|_{\bigvee\limits_a^b}$ и приводится теорема сходимости в несколько более сильной формулировке, чем это следует из общих результатов [5]–[8], а для нахождения регуляризованного решения предлагается использовать субградиентный метод в более гладком пространстве W_2^1 и дается его обоснование. Это позволяет получить двухступенчатый алгоритм для устойчивой аппроксимации решения исходной задачи.

Уравнение (1.1) на паре пространств $A : \bigvee\limits_a^b \to L_p[c,d]$ относится к числу существенно некорректных задач, для которых нарушается каждое из трех условий корректности Адамара, поэтому для построения устойчивого приближенного решения необходимо привлечение идей регуляризации. В дальнейшем для простоты формулировок теорем сходимости будем предполагать единственность нормального решения с точностью до значений в обычных точках разрыва [7], [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 97-01-0520, 00-01-00325).

2. Метод регуляризации Тихонова

Рассмотрим вариационный метод Тихонова со стабилизирующим функционалом $\Omega(x) = \|x-x^0\|_{\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}}$, т. е.

$$\min\Big\{\|Ax-y_\delta\|^p_{L_p}+\alpha\|x-x^0\|_{\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}}\ :\ x\in\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}\Big\},\tag{2.1}$$

где x^0 — некоторое пробное решение, y_δ — приближенная правая часть, $\|y_\delta-y\|_{L_p}\le\delta$. Обозначим нормальное решение задачи (1.1) через $\widehat{x}$, а решение задачи (2.1) при $\alpha=\alpha(\delta)$ — через $x^{\alpha(\delta)}$.

Теорема 2.1. *Задача* (2.1) *разрешима, и при связи параметров* $\alpha(\delta)\to 0$, $\delta^p/\alpha(\delta)\to 0$, $\delta\to 0$ *последовательность экстремальных элементов* $x^{\alpha(\delta)}$ *обладает следующими свойствами*:

1) $x^{\alpha(\delta)}(t)\to\widehat{x}(t)$ $\forall t\in[a,b]$ *за исключением, быть может, точек разрыва функции* $\widehat{x}(t)$;

2) $\lim\limits_{\delta\to0}\|x^{\alpha(\delta)}-\widehat{x}\|_{L_P}=0$, $\lim\limits_{\delta\to0}\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}[x^{\alpha(\delta)}-x^0]=\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}[\widehat{x}-x^0]$.

Доказательство. Обозначим целевой функционал в (2.1) через $\Phi^\alpha(x)$, а нижнюю грань — через F^α. Пусть x_m — минимизирующая последовательность, т. е. $\Phi^\alpha(x_m)\to F^\alpha$. Тогда $\|x_m\|_{\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}}$ ограничена, а поскольку $|x(t)-x(a)|\le\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}[x]$, то $\sup\limits_{a\le b}|x_m(t)|\le c_1<\infty$, $\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}[x_m]\le c_2<\infty$.

По второй теореме Хелли ([10], с. 242) можно выделить сходящуюся в каждой точке отрезка $[a,b]$ подпоследовательность

$$x_{m_k}(t)\to\overline{x}(t)\quad\forall t\in[a,b].$$

По первой теореме Хелли ([10], с. 254)

$$\Psi_{m_k}(t)=\int_a^b K(t,s)dx_{m_k}(s)\to\Psi(t)=\int_a^b K(t,s)dx(s)\quad\forall t\in[a,b],$$
$$|\Psi_{m_k}(t)-y_\delta(t)|^p\to|\Psi(t)-\ y_\delta(t)|^p\quad\forall t\in[a,b].$$

Используя теорему Лебега о предельном переходе, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\|Ax_{m_k}-y_\delta\|^p_{L_p}=\lim_{k\to\infty}\int_c^d\left|\int_a^b K(t,s)dx_{m_k}(s)-y_\delta(t)\right|^p dt=$$
$$=\int_c^d\left|\int_a^b K(t,s)d\overline{x}(s)-y_\delta(t)\right|^p dt=\|A\overline{x}-y_\delta\|^p_{L_p}.$$

Из цепочки неравенств

$$\Phi^\alpha(\overline{x})\le\liminf_{k\to\infty}\Phi(x_{m_k})\le\lim_{k\to\infty}\|Ax_{m_k}-y_\delta\|^p+\liminf_{k\to\infty}\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}[x_{m_k}-x^0]=\|A\overline{x}-y_\delta\|^p+\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}[\overline{x}-x^0]=\Phi^\alpha(\overline{x})$$

заключаем, что $\overline{x}$ — решение задачи (2.1).

Переобозначим $\overline{x}$ через x^α. Из очевидных неравенств

$$\Phi^\alpha(x^\alpha)=\|Ax^\alpha-y_\delta\|^p+\alpha\|x^\alpha\|_{\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}}\le\Phi^\alpha(\widehat{x})\le$$
$$\le\{\|A\widehat{x}-y\|+\|y-y_\delta\|\}^p+\alpha\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}[\widehat{x}-x^0]\le\delta^p+\alpha\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}[\widehat{x}-x^0]$$

в силу условий теоремы на параметры получаем оценку

$$\|x^{\alpha} - x^{0}\|_{\bigvee_a^b} \le \delta^p/\alpha + \|\widehat{x} - x^0\|_{\bigvee_a^b} \le c_3 < \infty. \tag{2.2}$$

Снова, как и выше, на основе теорем Хелли можно выделить поточечно сходящуюся подпоследовательность

$$x^{\alpha(\delta_k)}(t) \to \widetilde{x}(t) \ \ \forall t \in [a,b], \tag{2.3}$$

для которой

$$\varphi^k(t) = \int_a^b K(t,s)dx^{\alpha(\delta_k)}(s) \to \varphi(t) = \int_a^b K(t,s)d\widetilde{x}(s).$$

Вместе с теоремой Лебега это позволяет получить следующие соотношения:

$$0 \le \|A\widetilde{x} - y\|_{L_p} = \lim_{k\to\infty} \left[\int_c^d |\varphi^k(t) - y_\delta(t)|^p dt \right]^{1/p} \le \limsup_{k\to\infty} \left\{ \|Ax^{\alpha(\delta_k)} - y_{\delta_k}\|_{L_p} + \|y_{\delta_k} - y\|_{L_p} \right\} \le$$

$$\le \limsup_{k\to\infty} \left\{ \left[\|Ax^{\alpha(\delta_k)} - y_\delta\|^p_{L_p} + \alpha(\delta_k) \bigvee_a^b [x^{\alpha(\delta_k)} - x^0] \right]^{1/p} + \delta_k \right\} \le$$

$$\le \limsup_{k\to\infty} \left\{ \left[\delta_k^p + \alpha(\delta_k) \bigvee_a^b [\widehat{x} - x^0] \right]^{1/p} + \delta_k \right\} = 0,$$

т. е. $\widetilde{x}$ — решение уравнения (1.1).

Объединяя (2.2) и (2.3), приходим к неравенствам

$$\|\widehat{x} - x^0\|_{\bigvee_a^b} \le \|\widetilde{x} - x^0\|_{\bigvee_a^b} \le \liminf_{k\to\infty} \|x^{\alpha}(\delta_k) - \ x^0\|_{\bigvee_a^b} \le \|\widehat{x} - x^0\|_{\bigvee_a^b}. \tag{2.4}$$

Это означает в силу единственности нормального решения, что $\widetilde{x} = \widehat{x}$.

Из теоремы Лебега о предельном переходе и соотношений (2.2)–(2.4) заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{\alpha(\delta_k)} - \widehat{x}\|_{L_p} = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \bigvee_a^b [x^{\alpha(\delta_k)} - x^0] = \bigvee_a^b [\widehat{x} - x^0].$$

Поскольку непосредственно из доказательства следует, что $\widehat{x}$ — единственная предельная точка последовательности $\{x^{\alpha(\delta)}\}$, то тем самым установлены свойства 1)–2) теоремы. $\square$

Более детальный учет гладкости искомого решения $\widehat{x}(t)$ позволяет усилить утверждение предыдущей теоремы и получить равномерную сходимость регуляризованного по Тихонову семейства приближенных решений. Для этого понадобится одна теорема из [7] (см. также [6], [8]).

Теорема 2.2 ([7]). *Пусть последовательность функций $x_n(t) \subset \bigvee_a^b$ сходится к функции $\overline{x}(t) \subset \bigvee_a^b$ в каждой точке t отрезка $[a,b]$, причем $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_{\bigvee_a^b} \le \|\overline{x}\|_{\bigvee_a^b}$. Тогда $x_n(t)$ сходится к $\overline{x}(t)$ равномерно на любом сегменте $[a^1, b^1] \subseteq [a,b]$, не содержащем точек разрыва функции $\overline{x}(t)$.*

Принимая во внимание соотношения (2.3), (2.4) и теорему 2.2, получаем

Следствие. Пусть в условиях теоремы 2.1 нормальное решение $\widehat{x}(t)$ — непрерывная функция на сегменте $[a^1, b^1] \subseteq [a,b]$. Тогда

$$\lim_{\delta\to 0} \{ \max_{a_1 \le t \le b_1} |x^{\alpha(\delta)}(t) - \widehat{x}(t)| \} = 0.$$

Замечание 2.1. Если в качестве стабилизатора в методе (2.1) взять функционал

$$\Omega(x) = \|x\|_{L_p}^p + \|x\|_{\bigvee_a^b}, \tag{2.5}$$

то в этом случае гарантируется единственность решения x^α, сходимость $x^\alpha \to \widehat{x}$ в L_p и выполнение соотношения

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega(x^{\alpha(\delta)} - x^0) = \Omega(\widehat{x} - x^0).$$

При использовании стабилизатора $\Omega(x) = \|x\|_{W_2^\beta}$, где $W_2^\beta[a,b]$ — пространство Соболева с дробным $0 < \beta < 1$, имеет место сходимость x^α в пространстве W_2^β и, следовательно, метод Тихонова обладает в этом случае большим регуляризующим эффектом, чем для $\Omega(x)$ вида (2.5).

Замечание 2.2. В работе [9] показано, что в общем случае при регуляризации со стабилизатором $\Omega(x) = \|x\|_{\bigvee_a^b}$ нельзя получить сходимость регуляризованных решений в пространстве $\bigvee_a^b$. Там же предложен подход, основанный на двухпараметрической регуляризации, который позволяет усилить регуляризующий эффект и одновременно сохранить аппроксимацию разрывных решений, в частности, решений с ограниченной вариацией. Работа содержит также обширный обзор результатов по регуляризации с недифференцируемыми стабилизирующими функционалами.

3. Субградиентный метод

Принимая во внимание, что экстремальная проблема (2.1) относится к числу выпуклых задач с негладким целевым функционалом (из-за наличия недифференцируемой стабилизирующей добавки $\Omega(x) = |x(a) - x^0(a)| + \bigvee_a^b[x - x^0]$), для ее приближенного решения при $\alpha > 0$ привлечем итерационный субградиентный метод в пространстве Соболева W_2^1. В качестве пространства правых частей возьмем $Y = L_2[c,d]$, т. е. $p = 2$. Это позволяет воспользоваться техникой гильбертова пространства и упростить вычисления субградиента для целевого функционала. Таким образом, регуляризованное решение $x^{\alpha(\delta)}$, как элемент пространства $\bigvee_a^b$, с помощью итерационного процесса аппроксимируется более гладкими функциями из $W_2^1[a,b]$.

Возможность такого подхода (т.е. построения итераций из элементов пространства W_2^1) основана на следующем свойстве функций ограниченной вариации.

Лемма 3.1. *Для любой функции $\varphi \in \bigvee_a^b$ существует последовательность кусочно-линейных функций φ_n таких, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{L_p} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \bigvee_a^b[\varphi_n] = \bigvee_a^b[\varphi].$$

Доказательство. Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением функции φ, непрерывной справа.

Случай 1. Функция $\varphi(t)$ имеет конечное число точек разрыва. Достаточно рассмотреть вариант с одной точкой разрыва t^0. Зададим последовательность сеток $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ на отрезке $[a,b]$, в каждой из которых a, $t^0 = t_{i_0}^n$, b являются узлами. Обозначим

$$h_i^n = t_i^n - t_{i-1}^n, \quad h^n = \max\{h_i^n : 1 \le i \le n\},$$

где $h^n \to 0$ при $n \to \infty$. Построим кусочно-линейную функцию $\varphi_n(t)$, которая на сегменте $[t_{i-1}^n, t_i^n]$ выражается отрезком, соединяющим точки $\{t_{i-1}^n, \varphi(t_{i-1}^n)\}$, $\{t_i^n, \varphi(t_i^n)\}$.

На основании известных свойств функции $\varphi \in \bigvee\limits_a^b$ [10] и непрерывности справа имеем

$$\lim_{n\to\infty} \bigvee_a^b [\varphi_n] = \lim_{n\to\infty} \bigvee_a^{t^0-h_{i_0}} [\varphi_n] + \lim_{n\to\infty} \bigvee_{t^0-h_{i_o}}^{t^o} [\varphi_n] + \lim_{n\to\infty} \bigvee_{t^0}^b [\varphi_n] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |\varphi(t_i^n) - \varphi(t_{i-1}^n)| + \lim_{n\to\infty} |\varphi(t^0) - \varphi(t^0 - h_{i_0})| +$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=i_0+1}^{n} |\varphi(t_i^n) - \varphi(t_{i-1}^n)| = \lim_{t\to t^0-0} \bigvee_a^t [\varphi] + |\varphi(t^0) - \varphi(t^0 - 0)| + \bigvee_{t^0}^b [\varphi] = \bigvee_a^b [\varphi].$$

Случай 2. Функция $\varphi(t)$ имеет счетное множество точек разрыва. Для определенности считаем, что это имеет место в окрестности точки $t = b$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что неравенство $|t - b| \le \delta$ влечет

$$\big||\varphi(b) - \varphi(b-t)| - |\varphi(b) - \varphi(b-0)|\big| \le \varepsilon/2.$$

На отрезке $[a, b-\delta]$ строим кусочно-линейную функцию, как в предыдущем случае. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n \ge N$

$$\left| \bigvee_a^{b-\delta} [\varphi_n] - \bigvee_a^{b-\delta} [\varphi] \right| \le \varepsilon/2.$$

На сегменте $[b-\delta, b]$ определим φ_n отрезком, соединяющим точки $\{b-\delta, \varphi(b-\delta)\}$, $\{b, \varphi(b)\}$.

Объединяя последние два неравенства, получаем оценку

$$\left| \bigvee_a^b [\varphi_n] - \bigvee_a^b [\varphi] \right| \le \varepsilon,$$

что доказывает второе соотношение леммы. □

Поскольку для непрерывной функции φ $\varphi_n \to \varphi$ в L_p, а множество непрерывных функций плотно в L_p, то верно и первое соотношение.

3.1. Сохраним прежнее обозначение $\Phi^\alpha(x)$ для целевого функционала в задаче (2.1), а F^α — для его оптимального значения и рассмотрим итерационный метод

$$x^{k+1} = x^k - \beta_k \bigtriangledown \Phi^\alpha(x^k)/\| \bigtriangledown \Phi^\alpha(x^k)\|, \tag{3.1}$$

где$\bigtriangledown \Phi^\alpha(x)$ — произвольный, но фиксированный субградиент функционала Φ в точке x, β_k — последовательность положительных чисел.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность параметров β_k в процессе* (3.1) *удовлетворяет условиям*

$$\beta_k > 0, \quad \beta_k \to 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty,$$

тогда

а) $\lim\limits_{k\to\infty} \{ \min\limits_{0\le i\le k} \Phi^\alpha(x^i)\} = \lim\limits_{k_i\to\infty} \Phi^\alpha(x^{k_i}) = F^\alpha, k_i : \min\limits_{0\le i\le k} \Phi^\alpha(x^i) = \Phi(x^{k_i})$;

б) *существуют предельные функции $\overline{x}(t)$ последовательности $\{x^{k_i}(t)\}$ относительно поточечной сходимости на отрезке $[a, b]$ и сходимости в $L_2[a, b]$, причем все эти функции $\overline{x}(t)$ являются решениями задачи* (2.1) *и* $\lim\limits_{m\to\infty} \bigvee\limits_a^b [x^{k_m} - x^0] = \bigvee\limits_a^b [\widehat{x} - x^0], \{k_m\} \subseteq \{k_i\}$.

Доказательство. Нетрудно установить, используя свойства интеграла Стильтьеса, что функционал $\Phi^\alpha(x)$ непрерывен на пространстве W_2^1.

Для доказательства того факта, что x^{k_i} — минимизирующая последовательность, используются стандартные рассуждения (напр., [11], [12]). А именно, показывается, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует индекс $k^* = k^*(\varepsilon)$ такой, что

$$x^{k^*} \in G_\varepsilon = \{x \in W_2^1 : \Phi^\alpha(x) < F^\alpha + \varepsilon\}.$$

Тогда $\Phi^\alpha(x^{k_i}) \le F^\alpha + \varepsilon$ при $k_i \ge k^*$, поскольку $\Phi^\alpha(x^{k_{i+1}}) \le \Phi^\alpha(x^{k_i})$. Это означает справедливость соотношения из п. а), т. е. итерации x^k образуют минимизирующую последовательность в задаче (2.1).

Как и при доказательстве разрешимости задачи в теореме 2.1, из минимизирующей последовательности $x^{k_i}(t)$ можно выделить поточечно сходящуюся подпоследовательность (теорема Хелли)

$$x^{k_m}(t) \to \overline{x}(t), \quad t \in [a, b],$$

где предельная функция $\overline{x} \in \bigvee_a^b$ и является решением экстремальной задачи (2.1). При этом справедливы оценки

$$\sup_{a \le t \le b} |x^{k_m}(t)| \le \overline{c}_1, \quad \bigvee_a^b [x^{k_m}(t)] \le \overline{c}_2,$$

которые позволяют получить (на основании теоремы Лебега) предельные соотношения

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \int_a^b K(t,s) dx^{k_m}(s) - y(t) \right\|_{L_2} = \left\| \int_a^b K(t,s) d\overline{x}(s) - y(t) \right\|_{L_2},$$

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b |x^{k_m}(s) - \overline{x}(s)|^2 ds = 0.$$

Вместе со свойством

$$\bigvee_a^b [\overline{x}] \le \liminf_{m \to \infty} \bigvee_a^b [x^{k_m}(t)]$$

и тем фактом, что x^{k_m} — минимизирующая последовательность, это позволяет сделать вывод о справедливости п. б) теоремы. Кстати заметим, что первую часть п. б) можно сформулировать в более простой, хотя и более слабой, форме:

$$\rho(x^{k_i}, X^\alpha) = inf\{\|x^{k_i} - z\|_{L_2} : z \in X^\alpha\},$$

где X^α — множество решений задачи (2.1). □

С учетом теоремы 2.2 получаем

Следствие. Если предельная функция $\overline{x}(t)$ последовательности $x^k(t)$ является непрерывной функцией на некотором подсегменте $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$, то для соответствующей подпоследовательности $x^{k_i}(t)$ имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{i \to \infty} \{ \max_{a_1 \le t \le b_1} |x^{k_i}(t) - \overline{x}(t)| \} = 0.$$

Замечание 3.1. Вариант субградиентного метода в форме (3.1) был взят в качестве иллюстрации предлагаемой методики. Теорема сохраняет силу, если вместо (3.1) использовать его различные модификации, например, релаксационные субградиентные методы, методы усреднения направлений ([11], [12]) и, возможно, другие более эффективные процессы при условии ограниченности отображения $\bigtriangledown\Phi^\alpha(x)$. В частности, при дополнительном требовании

$$\sum_{k=0}^{\infty} {\beta_k}^2 < \infty$$

имеет место сходимость всей последовательности x^k к некоторому решению x^α.

Замечание 3.2. Иной подход к решению регуляризованных по Тихонову задач для интегральных уравнений Фредгольма (в том числе двумерных) в пространствах функций с ограниченными вариациями изложен в [13]. Он основан на предварительном сглаживании (аппроксимации) недифференцируемого функционала семейством гладких функционалов и последующем использовании метода сопряженных градиентов.

3.2. В некоторых случаях наряду с базовым уравнением (1.1) известна дополнительная априорная информация о решении в виде системы выпуклых неравенств

$$Q = \Big\{ x \in \overset{b}{\underset{a}{\bigvee}} : h_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \Big\}.$$

Если ввести выпуклый (недифференцируемый) функционал $H(x) = \max\limits_{1 \le i \le m} h_i(x)$, то априорное множество можно записать в эквивалентной форме $Q = \{x \in \overset{b}{\underset{a}{\bigvee}} : H(x) \le 0\}$. Естественно теперь вместо (2.1) рассмотреть задачу на условный экстремум

$$\min\{\Phi^\alpha(x) : x \in Q\}. \tag{3.2}$$

Предположим, что функционал $H(x)$ полунепрерывен снизу относительно поточечной сходимости и непрерывен в пространстве $W_2^1[a, b]$. Пусть, кроме того, для системы выпуклых неравенств выполнено условие Слейтера. Тогда задача (3.2) разрешима, и для нее справедливо заключение теоремы 2.1.

Для приближенного решения задачи (3.2) модифицируем процесс (3.1), заменив в нем $\bigtriangledown\Phi^\alpha(x^k)$ на $g_k \in G(x^k)$, где

$$G(x) = \begin{cases} \bigtriangledown\Phi^\alpha(x), & \text{если } \ H(x) < 0; \\ \mathrm{conv}\{\bigtriangledown\Phi^\alpha(x) \bigcup \bigtriangledown H(x)\}, & \text{если } \ H(x) = 0; \\ \bigtriangledown H(x), & \text{если } \ H(x) > 0, \end{cases}$$

где, как и прежде, $\bigtriangledown$ — знак субградиента.

Теорема 3.2. *При принятых допущениях для модифицированного субградиентного метода справедлива теорема* 3.1 *и следствие из нее.*

4. Численный эксперимент

Для тестирования предложенного алгоритма решалось интегральное уравнение [4]

$$Ax \equiv \int_0^1 \ln \frac{s+t}{s+t+1} dx(s) = y(t), \quad 0 \le t \le 1,$$

с известным кусочно-непрерывным модельным решением

$$x_{\mathrm{mod}}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1/9; \\ 1.125t + 0.075, & 1/9 \le t \le 1/3; \\ 1.95t + 0.05, & 1/3 \le t \le 1. \end{cases}$$

При реализации итерационного процесса (3.1) субградиент регуляризованного функционала $\Phi^\alpha(x)$ в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1$ вычислялся по формуле

$$\bigtriangledown\Phi^\alpha(x) = 2\int_0^s \Big\{ \int_0^1 K(t,\xi) \Big[\int_0^1 K(t,s)dx(s) - y(t) \Big] \Big\} dt\, d\xi + \alpha \int_0^s \mathrm{sign}\, x'(\tau) d\tau$$

с выбором управляющих параметров

$$\alpha = 10^{-8}, \ \ \beta_0 = 1, \ \ \beta_{k+1} = \beta_k \times \Big(1 - \frac{1}{k+2}\Big), \ \ k = 0, 1, \dots$$

Для выполнения численных расчетов проводилась дискретная аппроксимация по формуле правых прямоугольников с числом узлов $N = 91$. В качестве начального приближения принималось $x^0(t) \equiv 0$. После 200 итераций относительная погрешность решения в L_2-норме составила 0.032, а невязка — 0.026. Для начального приближения $x^0(t)$ эти величины равны единице.

Вариант градиентного метода (3.1) при

$$\beta_k = [\Phi^\alpha(x^k) - F^*]/\| \bigtriangledown \Phi^\alpha(x^k)\| \quad (F^* = 0)$$

при тех же исходных данных дает решение на порядок лучше как по невязке, так и по функционалу.

Литература

1. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. *Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны* // Вычисл. сейсмология. – 1967. – Вып. 3. – С. 3–51.
2. Маркушевич В.М., Левшенко В.Т. *Об определении скорости по годографу в диспергирующей среде с известным законом дисперсии* // Вычисл. сейсмология. – 1980. – Вып. 13. – С. 84–90.
3. Бессонова Э.Н., Маркушевич В.Н., Савин И.В. и др. *Обратная задача радиозондирования ионосферы при наличии волноводов (долин). Единственность решения* // Вычисл. сейсмология. – 1995. – Вып. 29. – С. 81–99.
4. Агеев А.Л., Васин В.В., Бессонова Э.Н., Маркушевич В.М. *Радиозондирование ионосферы на двух частотах. Алгоритмический анализ интегрального уравнения Фредгольма–Стильтьеса* // Вычисл. сейсмология. – 1997. – Вып. 29. – С. 81–99.
5. Агеев А.Л. *Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1980. – Т. 20. – № 4. – С. 819–826.
6. Гончарский А.В., Степанов В.В. *О равномерном приближении решения с ограниченной вариацией некорректно поставленных задач* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 248. – № 1. – С. 20–22.
7. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. *Нелинейные некорректные задачи.* – М.: Наука, 1995. – 212 с.
8. Леонов А.С. *Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1982. – Т. 22. – № 3. – С. 516–531.
9. Nashed M.Z., Scherzer O. *Least squares and bounded variation regularization with nondifferentiable functionals* // Numer. Fund. Anal. and Optimiz. – 1998. – V. 19. – № 7, 8. – C. 873–901.
10. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.: ГИТТЛ, 1957. – 519 с.
11. Демьянов В.Ф., Васильев П.В. *Недифференцируемая оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 384 с.
12. Коннов И.В. *Методы недифференцируемой оптимизации.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1993. – 99 с.
13. Леонов А.С. *Применение функций нескольких переменных с ограниченными вариациями для численного решения двумерных некорректных задач* // Сиб. журн. вычисл. матем. – 1999. – Т. 2. – № 3. – С. 257–271.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
15.10.1999