И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 517.518

А.А. ЩЕГЛОВА

ОБ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Введение

За последние 15–20 лет теория алгебро-дифференциальных систем уравнений (АДС)

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad t \in [t_0, t_1] \tag{1}$$

($(n \times n)$-матрица $A(t)$ вырождена для любого $t \in [t_0, t_1]$), называемых в литературе также дифференциально-алгебраическими (DAEs), неразрешенными относительно производных, сингулярными (singular, descriptor) или неявными (implicit), превратилась в быстро развивающуюся область современной математики. В настоящее время растет интерес и к АДС с отклоняющимся аргументом

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + D(t)x(t-\sigma) = f(t), \quad t \in T = [t_0, +\infty), \tag{2}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [t_0 - \sigma, t_0), \tag{3}$$

$\det A(t) \equiv 0$ на T, $\sigma = \mathrm{const} > 0$. Некоторые из приложений таких систем указаны в [1].

При изучении проблемы существования и единственности решения задачи (2), (3) естественным образом возникает вопрос о возможности преобразования уравнений (2), (3) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, для которой уже имеются теоремы существования

$$x^{(r)}(t) + \sum_{j=0}^{r-1} A_j(t)x^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{s} D_j(t)x^{(j)}(t-\sigma) = \widetilde{f}(t), \quad t \in T; \tag{4}$$

при $t < t_0$ $x(t)$ определяется условием (3). Сравнительно простым в этом смысле является случай, когда в системе (2) матрицы $A(t)$ и $B(t)$ таковы, что существует линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ такой, что

$$\mathcal{L}\,[A(t)x'(t) + B(t)x(t)] = x'(t) + \widetilde{B}(t)x(t), \quad t \in T. \tag{5}$$

Основная начальная задача для систем такого типа рассматривалась в [2], [3]. Ситуация сильно осложняется, если оператор $\mathcal{L}$ не существует (см., напр., работу [4], посвященную системам с постоянными коэффициентами). В этом случае возникает ряд особенностей, вызванных тем, что в процессе преобразования (2), (3) в (4), (3) существенную роль начинает играть структура матрицы $D(t)$. А именно:

1) уравнение (4) может оказаться порядка выше первого ($r \geq 1$);
2) в общем случае система (4), (3) будет нейтрального или опережающего типа ($s \geq r$);
3) решение системы (2), (3) в каждой точке $\bar{t} \in T$ может зависеть не только от значений коэффициентов и правой части в предшествующих точках, но и от значений этих функций в точках $t > \bar{t}$;

4) для существования решения задачи (2), (3) может оказаться необходимым, чтобы начальная функция $\psi(t)$ удовлетворяла ограничениям вида

$$\sum_{j=0}^{k} G_j(t)\psi^{(j)}(t) = g(t), \quad t \in [t_0 - \sigma, t_0).$$

Цель данной работы — найти условия, при которых возможно преобразование АДС с отклоняющимся аргументом (2), (3) к виду (4), (3) в случае, когда оператор (5) не существует.

Возникновением особенности 3) диктуется необходимость задания системы (2) не на конечном промежутке, а на полупрямой, что в совокупности с 2) объясняет, почему в дальнейших рассуждениях будем требовать, чтобы входные данные были бесконечно дифференцируемыми функциями.

Используемый в статье подход вытекает из основных идей теории левых регуляризирующих операторов, развитой для АДС вида (1) [5].

1. Обозначения

Пусть функция $\phi(t)$ определена на $[t_0 - \sigma, +\infty)$. Обозначим

$$\phi_{(i)}(t) = \phi(t + (i-1)\sigma), \quad i = \overline{0,\infty}; \quad t \in J = [t_0, t_0 + \sigma). \tag{6}$$

Определим операторы сдвига ω и ω^{-1}: $\omega[\phi(t)] = \phi(t-\sigma)$, $\omega^{-1}[\phi(t)] = \phi(t+\sigma)$, или в обозначениях (6)

$$\omega^m[\phi_{(i)}(t)] = \phi_{(i-m)}(t), \quad \left(\omega^{-1}\right)^k[\phi_{(i)}(t)] = \phi_{(i+k)}(t), \quad i, m, k \in \mathcal{N}, \quad m \le i;$$
$$\omega^0[\phi_{(i)}(t)] = \left(\omega^{-1}\right)^0[\phi_{(i)}(t)] = \phi_{(i)}(t), \quad t \in J,$$

где $\mathcal{N}$ — множество натуральных чисел.

Поставим в соответствие набору квадратных порядка n матриц $R_1(t), R_2(t), \dots, R_k(t) \in \mathcal{C}^p(J)$ матрицу $\Delta_p[R_1(t); R_2(t); \dots; R_k(t)]$ размера $[(p+1)n] \times [(p+k)n]$. Первая блочная строка такой матрицы имеет вид $(R_1(t) \quad R_2(t) \quad \dots \quad R_k(t) \quad O_n \quad \dots \quad O_n)$. Если

$$(G_{m,1}(t) \quad G_{m,2}(t) \quad \dots \quad G_{m,m+k-1}(t) \quad O_n \quad \dots \quad O_n)$$

— m-ая блочная строка матрицы Δ_p, то $(n \times n)$-блоки $(m+1)$-ой блочной строки вычисляются по формулам

$$G_{m+1,1}(t) = G'_{m,1}(t), \quad G_{m+1,l}(t) = G_{m,l-1}(t) + G'_{m,l}(t), \quad l = \overline{2, m+k},$$

остальные элементы этой строки нулевые.

В частности,

$$\Delta_p[R_1(t); R_2(t)] =$$
$$= \begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) & O_n & \dots & O_n \\ R'_1(t) & R'_2(t) + R_1(t) & R_2(t) & \dots & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1^{(p)}(t) & C_p^0 R_2^{(p)}(t) + C_p^1 R_1^{(p-1)}(t) & C_p^1 R_2^{(p-1)}(t) + C_p^2 R_1^{(p-2)}(t) & \dots & R_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\Delta_p[R_1(t)] = \begin{pmatrix} R_1(t) & O_n & \dots & O_n \\ R'_1(t) & R_1(t) & \dots & O_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1^{(p)}(t) & C_p^1 R_1^{(p-1)}(t) & \dots & R_1(t) \end{pmatrix},$$

где C_i^j — биномиальные коэффициенты. Для произвольной прямоугольной матрицы $R(t)$, определенной на некотором интервале T, введем величину $\dim R(t)$, равную числу строк в этой матрице. Тогда запись

$$\dim R(t) = \max_{t\in T} \operatorname{rank} R(t)$$

означает, что матрица $R(t)$ не имеет на T линейно зависимых строк.

Замечание 1. Пусть $J = [t_0, t_1)$, $t_1 < +\infty$, $\mathcal{C}^A(J)$ — пространство функций, аналитических на J. Если $R(t) \in \mathcal{C}^A(J)$ и $\max\limits_{t\in J} \operatorname{rank} R(t) = \dim R(t)$, то матрица $R(t)$ будет иметь полный ранг на J за исключением, быть может, конечного числа точек. Если $t_1 = +\infty$, то число этих точек будет не более чем счетно.

2. Определение решения

Определение 1. *Решением* задачи (2), (3) будем называть n-мерную вектор-функцию $x(t)$, определенную и непрерывную на $[t_0 - \sigma, +\infty)$, r раз ($r \geq 1$) непрерывно дифференцируемую на каждом из промежутков $[t_0 + (i-1)\sigma, t_0 + i\sigma)$ ($i = \overline{0,\infty}$), которая удовлетворяет для $t \in [t_0 - \sigma, t_0)$ начальному условию (3), а для $t \in T$ — уравнению (2).

Под производными функции $x(t)$ в точках $t = t_0 + (i-1)\sigma$ ($i = \overline{0,\infty}$) будем понимать правые производные.

Запишем систему уравнений (2), (3) в обозначениях (6)

$$A_{(i)}(t)x'_{(i)}(t) + B_{(i)}(t)x_{(i)}(t) + D_{(i)}(t)x_{(i-1)}(t) = f_{(i)}(t), \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{7}$$

$$x_{(0)}(t) = f_{(0)}(t), \quad t \in J = [t_0, t_0 + \sigma), \tag{8}$$

где $f_{(0)}(t) = \psi(t - \sigma)$, $t \in J$.

Под решением АДС (7), (8) будем понимать систему r раз ($r \geq 1$) непрерывно дифференцируемых на J n-мерных вектор-функций $x_{(i)}(t)$, $i = \overline{0,\infty}$, обращающих при подстановке уравнения (7), (8) в тождества на J.

Очевидно, если на $[t_0 - \sigma, +\infty)$ существует решение $x(t)$ задачи (2), (3), то на J существует решение $x_{(i)}(t)$ системы (7), (8)

$$x_{(i)}(t) = x(t + (i-1)\sigma), \quad i = \overline{0,\infty}, \quad t \in J,$$

причем последнее в силу непрерывности $x(t)$ на $[t_0 - \sigma, +\infty)$ будет удовлетворять краевым условиям

$$x_{(i)}(t_0) = x_{(i-1)}(t_0 + \sigma), \quad i = \overline{1,\infty}. \tag{9}$$

И наоборот, решение краевой задачи (7)–(9) порождает непрерывное решение начальной задачи (2), (3) [3]

$$x(t) = x_{(i)}(t - (i-1)\sigma), \quad t \in [t_0 + (i-1)\sigma, t_0 + i\sigma), \quad i = \overline{0,\infty}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что в (2), (3) $A(t), B(t), D(t) \in \mathcal{C}^A(T)$, $f(t) \in \mathcal{C}^\infty(T)$ ($\mathcal{C}^\infty(T)$ — пространство функций, бесконечно дифференцируемых на T), $\psi(t) \in \mathcal{C}^\infty([t_0 - \sigma, t_0))$. Следовательно, в (7), (8) $A_{(i)}(t), B_{(i)}(t), D_{(i)}(t) \in \mathcal{C}^A(J)$, $i = \overline{1,\infty}$; $f_{(i)}(t) \in \mathcal{C}^\infty(J)$, $i = \overline{0,\infty}$.

Будем искать линейные операторы $\mathcal{W}_{(i)}$, $i = \overline{1,\infty}$, с аналитическими на J коэффициентами (вид этих операторов уточним позже), действие которых преобразует уравнения (7) к виду

$$x^{(r)}_{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{r-1} A_{j(i)}(t)x^{(j)}_{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{s} D_{j(i)}(t)x^{(j)}_{(i-1)}(t) = \widetilde{f}_{(i)}(t), \quad t \in J, \tag{10}$$

где $A_{j(i)}(t), D_{j(i)}(t) \in \mathcal{C}^A(J)$, $\widetilde{f}_{(i)}(t) = \mathcal{W}_{(i)}[f_{(i)}(t)] \in \mathcal{C}^\infty(J)$.

Если существует решение задачи (7)–(9), то оно единственно и совпадает с решением краевой задачи (8)–(10).

Системе (10), (8) можно поставить в соответствие систему вида (4), (3) с аналитическими на $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[t_0+(i-1)\sigma, t_0+i\sigma)$ коэффициентами и бесконечно дифференцируемыми на том же множестве правыми частями. При этом задача (4), (3) имеет на $[t_0-\sigma,+\infty)$ единственное решение в смысле определения 1, и его можно найти методом шагов. Причем если решение задачи (2), (3) существует, то оно единственно и совпадает с решением задачи (4), (3).

Таким образом, в указанном выше смысле, существование операторов $\mathcal{W}_{(i)}$ эквивалентно тому, что система (2), (3) приводима к виду (4), (3).

Определение 2. Будем говорить, что система

$$\sum_{j=0}^{p} A_{j(i)}(t)x_{(i)}^{(j)}(t)+\sum_{j=0}^{q} D_{j(i)}(t)x_{(i-1)}^{(j)}(t)=f_{(i)}(t), \quad i=\overline{1,\infty}, \quad t\in J, \tag{11}$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами имеет на J *общее решение*, если она разрешима в классе $\mathcal{C}^{\infty}(J)$ для любой системы функций $f_{(i)}(t)\in\mathcal{C}^{\infty}(J)$, $i=\overline{1,\infty}$. И кроме того, существуют наборы $(n\times n)$-матриц $\{\Omega_{j(i)}(t)\in\mathcal{C}^{\infty}(J)$, $i=\overline{1,\infty}$, $j=\overline{1,r}$, $r\geq p\}$ и $\{\Upsilon_k(t)\in\mathcal{C}^{\infty}(J)$, $k=\overline{1,s}$, $s\geq 1\}$, а также n-мерные вектор-функции $\phi_{(i)}(t)\in\mathcal{C}^{\infty}(J)$, $i=\overline{0,\infty}$, такие, что

1)

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Omega_{1(i)}(t) & \dots & \Omega_{r(i)}(t)\\ \Omega'_{1(i)}(t) & \dots & \Omega'_{r(i)}(t)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \Omega_{1(i)}^{(r-1)}(t) & \dots & \Omega_{r(i)}^{(r-1)}(t)\end{pmatrix}=d=\mathrm{const} \quad \forall t\in J, \quad \forall i\in\mathcal{N}; \tag{12}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Upsilon_1(t) & \dots & \Upsilon_s(t)\\ \Upsilon'_1(t) & \dots & \Upsilon'_s(t)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \Upsilon_1^{(s-1)}(t) & \dots & \Upsilon_s^{(s-1)}(t)\end{pmatrix}=\mathrm{const} \qquad \forall t\in J; \tag{13}$$

2) каждая из функций $\phi_{(i)}(t)$ $(i=\overline{0,\infty})$ однозначно определяется через векторы $f_{(j)}(t)$ $(j=\overline{i,\eta}$, $\eta\geq i)$ и $x_{(i-1)}(t)$, а также их производные до некоторого порядка v $(v\geq q)$ включительно ($x_{(-1)}(t)$ — произвольная n-мерная вектор-функция из $\mathcal{C}^{\infty}(J)$);
3) любые линейные комбинации

$$x_{(i)}(t,c_{1i},\dots,c_{ri})=\sum_{j=1}^{r}\Omega_{j(i)}(t)c_{ji}+\phi_{(i)}(t), \quad i=\overline{1,\infty}, \quad c_{ji}\in\mathcal{R}^n, \tag{14}$$

$$x_{(0)}(t,c_{10},\dots,c_{s0})=\sum_{j=1}^{s}\Upsilon_j(t)c_{j0}+\phi_{(0)}(t), \quad c_{j0}\in\mathcal{R}^n, \quad t\in J, \tag{15}$$

удовлетворяют уравнениям (11) $\forall t\in J$, и на любом отрезке $\widetilde{J}\subseteq J$ нет решений, отличных от тех, которые можно рассматривать как сужение (14), (15) на $\widetilde{J}$.

3. Вспомогательные результаты

Важную роль в дальнейшем анализе играет следующий результат, принадлежащий Долежалю (Dolezal).

Лемма 1 ([6]). *Пусть $(n\times n)$-матрица $A(t)\in\mathcal{C}^A(T)$ и $\max\limits_{t\in T}\operatorname{rank}A(t)=\rho$.*

Тогда существует $(n\times n)$-матрица $P(t)\in\mathcal{C}^A(T)$ такая, что $\det P(t)\neq 0$ $\forall t\in T$, $P(t)A(t)=\left(\begin{smallmatrix}A_1(t)\\ O\end{smallmatrix}\right)$, где $\dim A_1(t)=\max\limits_{t\in T}\operatorname{rank}A_1(t)=\rho$.

Лемма 2. *Пусть в АДС*

$$\sum_{j=0}^{p} A_j(t)x^{(j)}(t) = f(t), \quad t \in T, \tag{16}$$

$(n \times n)$-матрицы $A_j(t) \in \mathcal{C}^A(T)$, $f(t) \in \mathcal{C}^{p+l}(T)$.

Тогда существует оператор $\mathcal{P} = \sum_{j=0}^{l} P_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j$, $P_j(t) \in \mathcal{C}^A(T)$, преобразующий (16) в эквивалентную в смысле решения систему

$$\begin{pmatrix} A_{p,0}(t) \\ O \\ \dots \\ O \\ O \end{pmatrix} x^{(p)}(t) + \begin{pmatrix} * \\ A_{p-1,1}(t) \\ \dots \\ O \\ O \end{pmatrix} x^{(p-1)}(t) + \dots + \begin{pmatrix} * \\ * \\ \dots \\ A_{0,p}(t) \\ O \end{pmatrix} x(t) = \widehat{f}(t), \quad t \in T, \tag{17}$$

в которой $\widehat{f}(t) = \mathcal{P}[f(t)]$, а $*$ обозначает матрицу соответствующих размеров, которая может быть отлична от нулевой,

$$\dim \begin{pmatrix} A_{p,0}(t) \\ A_{p-1,1}(t) \\ \dots \\ A_{0,p}(t) \end{pmatrix} = \max_{t \in T} \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A_{p,0}(t) \\ A_{p-1,1}(t) \\ \dots \\ A_{0,p}(t) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Доказательство. Если в (16) $\max_{t\in T} \operatorname{rank} A_p(t) = n$, то $\mathcal{P}$ — тождественный оператор. Пусть $\max_{t\in T} \operatorname{rank} A_p(t) < n$. Умножим уравнение (16) слева на матрицу $L_0(t) \in \mathcal{C}^A(T)$, $\det L_0(t) \neq 0$ $\forall t \in T$, уничтожающую линейно зависимые на T строки в матрице $A_p(t)$. По лемме 1 такая матрица существует. Тогда система (16) преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} A_p^{0,0}(t) \\ O \end{pmatrix} x^{(p)}(t) + \sum_{j=0}^{p-1} \begin{pmatrix} A_j^{0,0}(t) \\ A_j^{0,1}(t) \end{pmatrix} x^{(j)}(t) = f_0(t).$$

Полученное уравнение умножим слева на матрицу $\left(\begin{smallmatrix} E & O \\ O & L_1(t) \end{smallmatrix}\right)$ (E — единичная матрица) такую, что $L_1(t) \in \mathcal{C}^A(T)$, $\det L_1(t) \neq 0$ $\forall t \in T$, $L_1(t)A_{p-1}^{0,1}(t) = \left(\begin{smallmatrix} A_{p-1}^{1,1}(t) \\ O \end{smallmatrix}\right)$, $\dim A_{p-1}^{1,1}(t) = \max_{t\in T} \operatorname{rank} A_{p-1}^{1,1}(t) = \max_{t\in T} \operatorname{rank} A_{p-1}^{0,1}(t)$.

Затем таким же образом занулим линейно зависимые на T строки в подматрице матрицы $L_1(t)A_{p-2}^{0,1}(t)$, соответствующей нулевым строкам в $L_1(t)A_{p-1}^{0,1}(t)$ и т. д. Продолжая этот процесс, придем к системе вида

$$\begin{pmatrix} A_p^{0,0}(t) \\ O \\ \dots \\ O \\ O \end{pmatrix} x^{(p)}(t) + \begin{pmatrix} * \\ A_{p-1}^{1,1}(t) \\ \dots \\ O \\ O \end{pmatrix} x^{(p-1)}(t) + \dots + \begin{pmatrix} * \\ * \\ \dots \\ A_0^{p,p}(t) \\ O \end{pmatrix} x(t) = f_p(t), \tag{19}$$

в которой $\dim A_j^{p-j,p-j}(t) = \max_{t\in T} \operatorname{rank} A_j^{p-j,p-j}(t)$, $j = \overline{0,p}$. Если при этом окажется, что матрица

$$\begin{pmatrix} A_p^{0,0}(t)^\top & A_{p-1}^{1,1}(t)^\top & \dots & A_0^{p,p}(t)^\top \end{pmatrix}^\top \tag{20}$$

не имеет линейно зависимых на T строк, $\top$ — символ транспонирования, то (19) и есть искомая система (17), а оператор $\mathcal{P}$ представляет собой произведение невырожденных $\forall t \in T$ аналитических $(n \times n)$-матриц.

В противном случае линейная зависимость на T строк матрицы (20) уничтожается применением к (19) оператора вида

$$\begin{pmatrix} E & L_{1,1}\frac{d}{dt} & L_{1,2}\left(\frac{d}{dt}\right)^2 & \dots & L_{1,p-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p-1} & L_{1,p}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p} \\ O & E & L_{2,2}\frac{d}{dt} & \dots & L_{2,p-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p-2} & L_{2,p}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p-1} \\ O & O & E & \dots & L_{3,p-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p-3} & L_{3,p}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & E & L_{p,p}\frac{d}{dt} \\ O & O & O & \dots & O & E \end{pmatrix}. \tag{21}$$

По лемме 1 матрицы $L_{j,k} = L_{j,k}(t) \in \mathcal{C}^A(T)$ в сделанных предположениях существуют. Результатом действия оператора (21) будет новая система, в коэффициентах которой вновь последовательно исключим линейно зависимые на T строки. После этого система примет вид (17). Если для (17) не выполняется условие (18), продолжаем преобразования, действуя на эту систему оператором типа (21) и т. д.

Поскольку размерность исходной системы (16) и число коэффициентов в ней ограничено, то через конечное число шагов получим систему вида (17), (18).

Действие операторов структуры (21) не добавляет системе новых решений, поэтому (17) эквивалентна (16) в смысле решения. При этом оператор $\mathcal{P}$ будет произведением всех матриц и операторов, использованных в процессе преобразований. □

Определение 3. Для системы (16) определим матрицу

$$\Theta[A_p(t),\dots,A_0(t)] = \begin{pmatrix} A_{p,0}(t)^\top & \dots & A_{0,p}(t)^\top \end{pmatrix}^\top$$

и величину

$$\theta[A_p(t),\dots,A_0(t)] = \sum_{j=0}^{p} \dim A_{p-j,j}(t),$$

где $A_{p-j,j}(t)$ $(j = \overline{0,p})$ — матрицы из эквивалентной системы (17), удовлетворяющие условию (18).

Систему (17), (18) назовем *θ-формой* для системы (16).

Лемма 3. *Пусть*

1) *в АДС* (11) $(n\times n)$*-матрицы коэффициентов аналитические, а правые части — бесконечно дифференцируемые функции на* J;
2) *система* (11) *имеет на* J *общее решение в смысле определения* 2;
3) $\theta[A_{p(i)}(t),\dots,A_{0(i)}(t)] = n$ *на* J *при любом* $i \in \mathcal{N}$.

Тогда $\operatorname{rank}\Theta[A_{p(i)}(t),\dots,A_{0(i)}(t)] = n \quad \forall t \in J, \quad \forall i \in \mathcal{N}$.

Доказательство. Преобразуем часть уравнения (11) $\sum\limits_{j=0}^{p} A_{j(i)}(t)x_{(i)}^{(j)}(t)$ к θ-форме. По лемме 2 это возможно. Для наглядности заметим, что полученная система будет иметь вид (17), если в правую часть $\widehat{f}(t)$ включить все слагаемые, содержащие функцию $x_{(i-1)}(t)$ и ее производные, у всех матриц и векторов добавить нижний индекс (i) и заменить промежуток T на J. По предположению 3) леммы последняя нулевая блочная строка в (17) будет отсутствовать.

Продифференцируем вторую блочную строку полученной системы один раз, третью — два раза и т. д., последнюю — p раз. Результатом будет система дифференциальных уравнений p-го порядка с матрицей $\Theta_{(i)}(t) = \Theta[A_{p(i)}(t),\dots,A_{0(i)}(t)]$ при старшей производной

$$\Theta_{(i)}(t)x_{(i)}^{(p)}(t) + \sum_{j=0}^{p-1} G_{j(i)}(t)x_{(i)}^{(j)}(t) = \check{f}_{(i)}(t), \quad t \in J. \tag{22}$$

Ясно, что система (22), как и исходная (11), будет иметь на J общее решение, у нее может лишь возрасти ранг матрицы (12) d.

В соответствии с замечанием 1 по предположению 3) леммы матрица $\Theta_{(i)}(t) \in \mathcal{C}^A(J)$ не имеет линейно зависимых на J строк. Покажем, что ранг этой матрицы постоянен на J и равен n. Предположим обратное, т. е. $\exists \xi_i, \zeta_i \in J$ такие, что

$$\det \Theta_{(i)}(\xi_i) = 0, \quad \det \Theta_{(i)}(\zeta_i) \neq 0.$$

В силу непрерывности матрицы $\Theta_{(i)}(t)$ на J существует ε_i-окрестность точки ζ_i $\;J_{\varepsilon_i} = (\zeta_i - \varepsilon_i, \zeta_i + \varepsilon_i) \subset J$ такая, что на J_{ε_i} решение системы (22) представимо в виде

$$x_{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{p} X_{j(i)}(t) c_{ji} + \phi_{(i)}(t), \quad t \in J_{\varepsilon_i},$$

где $(n \times n)$-матрицы $X_{j(i)}(t) \in \mathcal{C}^A(J_{\varepsilon_i})$, $j = \overline{1,p}$, являются решениями p задач Коши

$$X_{j(i)}^{(p)}(t) + \sum_{j=0}^{p-1} \Theta_{(i)}^{-1}(t) G_{j(i)}(t) X_{j(i)}^{(j)}(t) = O, \quad t \in J_{\varepsilon_i},$$

$$\Big(X_{j(i)}^{(p-1)}(\zeta_i)^{\top} \quad X_{j(i)}^{(p-2)}(\zeta_i)^{\top} \quad \ldots \quad X_{j(i)}(\zeta_i)^{\top} \Big) = (\underbrace{O_n \ \ldots \ O_n}_{j-1} \quad \underbrace{E_n}_{j} \quad \underbrace{O_n \ \ldots \ O_n}_{p-j}), \quad j = \overline{1,p},$$

и обладают свойством

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} X_{1(i)}(t) & \ldots & X_{p(i)}(t) \\ X'_{1(i)}(t) & \ldots & X'_{p(i)}(t) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ X_{1(i)}^{(p-1)}(t) & \ldots & X_{p(i)}^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} = pn \quad \forall t \in J_{\varepsilon_i}.$$

Так как по определению 2 ранг матрицы (12) постоянен на J, то в (12) $r = p$ и $d = pn \quad \forall t \in J$. В силу последнего обстоятельства на J должно существовать решение системы (22) вида (14) для любых начальных данных, в частности, для

$$\begin{pmatrix} x_{(i)}^{(p-1)}(\xi_i) \\ \ldots \\ x_{(i)}(\xi_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{pi} \\ \ldots \\ a_{1i} \end{pmatrix},$$

поскольку алгебраическая система

$$\begin{pmatrix} a_{pi} \\ \ldots \\ a_{1i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} \Omega_{j(i)}^{(p-1)}(\xi_i) c_{ji} + \phi_{(i)}^{(p-1)}(\xi_i) \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{p} \Omega_{j(i)}(\xi_i) c_{ji} + \phi_{(i)}(\xi_i) \end{pmatrix}$$

единственным образом разрешима относительно c_{ji}, $j = \overline{1,p}$. А это означает, что для любых векторов $(a_{pi}^{\top} \ \ldots \ a_{1i}^{\top})^{\top}$ и $\breve{f}_{(i)}(t)$ можно единственным образом найти $x_{(i)}^{(p)}(\xi_i)$.

С другой стороны, алгебраическая система

$$\Theta_{(i)}(\xi_i) z_i + \sum_{j=0}^{p-1} G_{j(i)}(\xi_i) a_{ji} = \breve{f}_{(i)}(\xi_i)$$

разрешима относительно $z_i = x_{(i)}^{(p)}(\xi_i)$ не для любых a_{ji} и $\breve{f}_{(i)}(\xi_i)$ (т. к. $\det \Theta_{(i)}(\xi_i) = 0$). Получили противоречие. Поэтому $\operatorname{rank} \Theta_{(i)}(t) = n \quad \forall t \in J, \quad \forall i \in \mathcal{N}$. $\square$

4. Общее решение и существование операторов $\mathcal{W}_{(i)}$

Перейдем непосредственно к поиску условий, при которых для системы (7), (8) существуют операторы $\mathcal{W}_{(i)}$, $i=\overline{1,\infty}$, преобразующие ее к виду (10), (8).

Теорема 1. *Пусть в системе* (2) $A(t),B(t),D(t)\in\mathcal{C}^A(T)$, $f(t)\in\mathcal{C}^\infty(T)$.

Тогда для того чтобы АДС (7) *имела на* J *общее решение, необходимо и достаточно существования операторов*

$$\mathcal{V}_{(i)}=\sum_{k=0}^{\eta}\sum_{j=0}^{v}V_{j,k(i)}\left(\frac{d}{dt}\right)^j(\omega^{-1})^k,\quad V_{j,k(i)}\in\mathcal{C}^A(J),\quad i=\overline{1,\infty},\tag{23}$$

действие которых преобразует (7) *в систему уравнений*

$$\begin{pmatrix}\widehat{A}_{r(i)}(t)\\ O\\ \dots\\ O\\ O\end{pmatrix}x^{(r)}_{(i)}(t)+\begin{pmatrix}*\\ \widehat{A}_{r-1(i)}(t)\\ \dots\\ O\\ O\end{pmatrix}x^{(r-1)}_{(i)}(t)+\dots+\begin{pmatrix}*\\ *\\ \dots\\ *\\ \widehat{A}_{0(i)}(t)\end{pmatrix}x_{(i)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{s}\widehat{D}_{j(i)}(t)x^{(j)}_{(i-1)}(t)=\mathcal{V}_{(i)}[f_{(i)}(t)],\quad i=\overline{1,\infty};\tag{24}$$

$$\begin{pmatrix}G_{s,0}(t)\\ O\\ \dots\\ O\\ O\end{pmatrix}x^{(s)}_{(0)}(t)+\begin{pmatrix}*\\ G_{s-1,1}(t)\\ \dots\\ O\\ O\end{pmatrix}x^{(s-1)}_{(0)}(t)+\dots+\begin{pmatrix}*\\ *\\ \dots\\ G_{0,s}(t)\\ O\end{pmatrix}x_{(0)}(t)=g(t),\quad t\in J.\tag{25}$$

Система (24), (25) *эквивалентна исходной* (7) *в смысле решения. При этом в* (24), (25)
1) *все коэффициенты аналитические, а правые части — бесконечно дифференцируемые функции на* J;
2) *при фиксированном* j, $0\le j\le r$, $\dim A_{j(i)}(t)=k_j=\mathrm{const}\quad\forall i\in\mathcal{N}$;
3)

$$\det\begin{pmatrix}\widehat{A}^\top_{r(i)}(t) & \widehat{A}^\top_{r-1(i)}(t) & \dots & \widehat{A}^\top_{0(i)}(t)\end{pmatrix}^\top\neq 0\ \ \forall t\in J,\ \ \forall i\in\mathcal{N};\tag{26}$$

4) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}G^\top_{s,0}(t) & G^\top_{s-1,1}(t) & \dots & G^\top_{0,s}(t)\end{pmatrix}^\top=\dim\begin{pmatrix}G^\top_{s,0}(t) & G^\top_{s-1,1}(t) & \dots & G^\top_{0,s}(t)\end{pmatrix}^\top\quad\forall t\in J.$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (7) имеет на J общее решение в смысле определения 2. В соответствии с леммой 2 можно привести левую часть уравнения (7), которая не содержит функции $x_{(i-1)}(t)$ и ее производных, к θ-форме.

Если окажется, что $\theta[A_{(i)}(t),B_{(i)}(t)]=n\quad\forall i\in\mathcal{N}$, то по лемме 3 полученная система и будет искомой (24). Ограничение (25) при этом будет отсутствовать.

Допустим, что $\theta[A_{(i)}(t),B_{(i)}(t)]<n\quad\forall i\in\mathcal{N}$. В этом случае полученная система будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}A^{1,1}_{(i)}(t)\\ O\\ O\end{pmatrix}x'_{(i)}(t)+\begin{pmatrix}B^{1,1}_{(i)}(t)\\ B^{1,2}_{(i)}(t)\\ O\end{pmatrix}x_{(i)}(t)+\sum_{j=0}^{s_1}\begin{pmatrix}D^{1,1}_{j(i)}(t)\\ D^{1,2}_{j(i)}(t)\\ D^{1,3}_{j(i)}(t)\end{pmatrix}x^{(j)}_{(i-1)}(t)=f_{1(i)}(t).\tag{27}$$

Заметим, что поскольку коэффициенты в системе (7) представляют собой сужение соответствующих аналитических на T матриц, то с учетом замечания 1 в (27) $\dim A^{1,1}_{(i)}(t)=k_1$,

$\dim B^{1,2}_{(i)}(t) = k_2$, $\dim D^{1,3}_{j(i)}(t) = k_3$ $(k_1, k_2, k_3 = \mathrm{const})$ $\quad \forall i \in \mathcal{N}$. То же относится и к блокам в матрицах, которые будут получаться ниже. По тем же соображениям $\theta[A_{(i)}(t), B_{(i)}(t)]$ либо равно, либо сторого меньше n одновременно для всех $i \in \mathcal{N}$.

Подействуем на (27) оператором $\begin{pmatrix} E & O & O \\ O & E & O \\ O & O & \omega^{-1}E \end{pmatrix}$, а затем приведем к θ-форме пучок матриц $\sum\limits_{j=0}^{s_1} \lambda^j D^{1,3}_{j(i)}(t)$. Результатом будет система

$$\begin{pmatrix} O \\ O \\ \widetilde{D}^{1,0}_{s_1(i+1)}(t) \\ O \\ \dots \\ O \end{pmatrix} x^{(s_1)}_{(i)}(t) + \begin{pmatrix} O \\ O \\ * \\ \widetilde{D}^{1,1}_{s_1-1(i+1)}(t) \\ \dots \\ O \end{pmatrix} x^{(s_1-1)}_{(i)}(t) + \dots + \begin{pmatrix} A^{1,1}_{(i)}(t) \\ O \\ * \\ * \\ \dots \\ O \end{pmatrix} x'_{(i)}(t) +$$

$$+ \begin{pmatrix} B^{1,1}_{(i)}(t) \\ B^{1,2}_{(i)}(t) \\ * \\ * \\ \dots \\ \widetilde{D}^{1,s_1}_{0(i+1)}(t) \end{pmatrix} x_{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{s_1} \begin{pmatrix} D^{1,1}_{j(i)}(t) \\ D^{1,2}_{j(i)}(t) \\ O \\ O \\ \dots \\ O \end{pmatrix} x^{(j)}_{(i-1)}(t) = \widetilde{f}_{1(i)}(t), \quad i = \overline{1, \infty}; \tag{28}$$

$$\begin{pmatrix} O \\ \widetilde{D}^{1,0}_{s_1(1)}(t) \\ O \\ \dots \\ O \end{pmatrix} x^{(s_1)}_{(0)}(t) + \begin{pmatrix} O \\ * \\ \widetilde{D}^{1,1}_{s_1-1(1)}(t) \\ \dots \\ O \end{pmatrix} x^{(s_1-1)}_{(0)}(t) + \dots + \begin{pmatrix} O \\ * \\ * \\ \dots \\ \widetilde{D}^{1,s_1}_{0(1)}(t) \end{pmatrix} x_{(0)}(t) = g_1(t), \quad t \in J. \tag{29}$$

Матрицы $\widetilde{D}^{1,s_1}_{0(i)}(t)$ в (28), (29) должны быть полного ранга $\forall t \in J$, $\quad \forall i \in \mathcal{N}$. Иначе для (7) можно подобрать такую правую часть $f_{(i)}(t)$, что система (28), (29), а следовательно, и (7) будут неразрешимы. Это противоречит существованию для (7) общего решения.

Левую часть уравнения (28), не содержащую функцию $x_{(i-1)}(t)$ и ее производные, вновь приведем к θ-форме. Если при этом окажется, что соответствующее $\theta = n$, то по лемме 3 получим искомую систему (24). При $\theta < n$ продолжим преобразования. За конечное число шагов придем к системе вида (24).

В самом деле, если процесс преобразований зациклился, то, начиная с некоторого момента, на компоненты функции $x_{(0)}(t)$ будем получать несовместные ограничения. А это означает, что АДС (7) неразрешима относительно $x_{(0)}(t)$ для заданной правой части, что противоречит исходному предположению о том, что система (7), а следовательно, и (24) имеют на J общее решение.

Возникшую в процессе преобразований систему уравнений для $x_{(0)}(t)$ (типа (29)) приведем к θ-форме (25). Используя технику доказательства леммы 3, можно показать, что свойство (13) влечет за собой выполнение условия 4) из формулировки теоремы.

Из леммы 2 следует, что система (24), (25) эквивалентна (7) в смысле решения. По построению ясно, что для (24), (25) будут иметь место свойства 1), 2), а условие (26) выполнится для всех $i \in \mathcal{N}$.

Операторы $\mathcal{V}_{(i)}$ представляют собой произведение всех операторов, использованных в процессе преобразований. Нетрудно проследить, что они будут иметь вид (23).

Достаточность. Пусть для системы (7) существуют операторы (23), действие которых приводит (7) к виду (24), (25). Из 3) следует, что решение системы (24) существует и имеет вид (14). Покажем, что при этом выполняется условие (12).

В (24) перенесем слагаемые с $x^{(j)}_{(i-1)}(t)$ в правую часть и приведем полученное уравнение к эквивалентной системе первого порядка

$$U_{1(i)}(t)z'_{(i)}(t)+U_{0(i)}(t)z_{(i)}(t)=u_{(i)}(t),\quad t\in J,\quad i=\overline{1,\infty}, \tag{30}$$

где $z_{(i)}(t)=\begin{pmatrix}x_{(i)}(t)^\top & x'_{(i)}(t)^\top & \dots & x^{(r-1)}_{(i)}(t)^\top\end{pmatrix}^\top$.

С другой стороны, подействовав на (24) оператором

$$\begin{pmatrix}\widehat{A}_{r(i)}(t)\\ \widehat{A}_{r-1(i)}(t)\\ \dots\\ \widehat{A}_{0(i)}(t)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E & O & \dots & O\\ O & E\frac{d}{dt} & \dots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & \dots & E\left(\frac{d}{dt}\right)^r\end{pmatrix},$$

получим систему

$$x^{(r)}_{(i)}(t)+\sum_{j=0}^{r-1}\widetilde{A}_{j(i)}(t)x^{(j)}_{(i)}(t)=\widetilde{f}_{(i)}(t),\quad t\in J,\quad i=\overline{1,\infty}, \tag{31}$$

(здесь слагаемые с $x^{(j)}_{(i-1)}(t)$, $j=\overline{0,s}$, включены в $\widetilde{f}_{(i)}(t)$), которую тоже запишем в виде системы первого порядка

$$z'_{(i)}(t)+\widetilde{U}_{0(i)}(t)z_{(i)}(t)=\widetilde{u}_{(i)}(t),\quad t\in J,\quad i=\overline{1,\infty}. \tag{32}$$

Поскольку для системы (24) существует оператор, приводящий ее к виду (31), то, очевидно, что и для (30) существует некоторый линейный дифференциальный оператор, преобразующий ее к виду (32). Последнее эквивалентно тому, что решение системы (30) представимо в виде

$$z_{(i)}(t)=Z_{(i)}(t)c_i(t)+h_{(i)}(t),\quad c_i\in\mathcal{R}^n,\quad t\in J,$$

где $\operatorname{rank}Z_{(i)}(t)=\mathrm{const}\quad\forall t\in J$ ([5], с. 126). Так как коэффициенты системы (24) обладают свойством 2), то $\operatorname{rank}Z_{(i)}(t)=\mathrm{const}\quad\forall i\in\mathcal{N}$.

Матрица $Z_{(i)}(t)$ есть матрица из условия (12), поэтому (12) имеет место $\forall t\in J$ и $\forall i\in\mathcal{N}$.

Аналогично рассуждая, можно показать, что в условиях 4) теоремы существует вектор-функция $x_{(0)}(t)\in\mathcal{C}^\infty(J)$, удовлетворяющая на J уравнению (25) и имеющая вид (15) со свойством (13). $\square$

Следствие 1. Если для системы (7) существуют операторы (23), фигурирующие в формулировке теоремы 1, то для (7) существуют операторы

$$\mathcal{W}_{(i)}=\sum_{k=0}^{\eta}\sum_{j=0}^{w}W_{j,k(i)}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j(\omega^{-1})^k,\quad W_{j,k(i)}(t)\in\mathcal{C}^A(J),\quad i=\overline{1,\infty}, \tag{33}$$

преобразующие ее к виду (10).

Справедливость следствия очевидна.

Замечание 2. Если в (25) $\dim\left(G^\top_{s,0}(t)\quad G^\top_{s-1,1}(t)\quad\dots\quad G^\top_{0,s}(t)\right)^\top=n$, то пространство решений системы (7), а следовательно, и (2), конечномерно.

5. Достаточное условие существования операторов $\mathcal{W}_{(i)}$

Получим условие существования операторов (33) в терминах входных данных. Введем обозначения $\theta = \theta[A(t), B(t)]$, $l = (n+1)^n(n-2)+1$.

Лемма 4. *Пусть в системе* (2) $(n\times n)$*-матрицы* $A(t), B(t), D(t) \in \mathcal{C}^A(T)$, $f(t)\in\mathcal{C}^\infty(T)$. *Если для АДС* (7) *существуют операторы* $\mathcal{V}_{(i)}$, $i=\overline{1,\infty}$, *вида* (23), *тогда в* (23) $\eta\le\theta+1$, *наименьшее из возможных* $v\le l$.

Доказательство леммы опущено. Оценка для v весьма грубая, получение же более точных оценок представляет собой серьезную задачу, выходящую за рамки данной статьи.

Теорема 2. *Пусть*
1) *в системе* (2) $(n\times n)$*-матрицы* $A(t), B(t), D(t)\in\mathcal{C}^A(T)$, $f(t)\in\mathcal{C}^\infty(T)$;
2) *матрица*

$$\Lambda_{l,\theta(i)}(t)=\begin{pmatrix} U_{(i)}(t) & S_{(i)}(t) & O & \dots & O & O\\ O & U_{(i+1)}(t) & S_{(i+1)}(t) & \dots & O & O\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ O & O & O & \dots & U_{(i+\theta+1)}(t) & S_{(i+\theta+1)}(t)\end{pmatrix}$$

полного ранга $\forall t\in J$, $\forall i\in\mathcal{N}$, *т. е.* $\operatorname{rank}\Lambda_{l,\theta(i)}(t)=(l+1)(\theta+2)n$. *Здесь*

$$U_{(m)}(t)=\Delta_l[D_{(m)}(t), O_n],\quad S_{(m)}(t)=\Delta_l[B_{(m)}(t), A_{(m)}(t)],\quad m=\overline{i, i+\theta+1},$$

где $A_{(i)}(t)$, $B_{(i)}(t)$, $D_{(i)}(t)$ *— матрицы из системы* (7).

Тогда существуют операторы $\mathcal{V}_{(i)}$, $i=\overline{1,\infty}$, (23), *преобразующие АДС* (7) *в систему* (24), *в которой*
1) *все коэффициенты аналитические, а правые части — бесконечно дифференцируемые на* J *функции*;
2) *при фиксированном* j, $0\le j\le r$, *на* J $\dim A_{j(i)}(t)=\mathrm{const}$ $\forall i\in\mathcal{N}$;
3) *на* J

$$\det\begin{pmatrix}\widehat{A}^\top_{r(i)}(t) & \widehat{A}^\top_{r-1(i)}(t) & \dots & \widehat{A}^\top_{0(i)}(t)\end{pmatrix}^\top\not\equiv 0\ \ \forall i\in\mathcal{N}; \tag{34}$$

4) $r, s\le l$.

Доказательство. Если в системе (7) $\det A_{(i)}\not\equiv 0$ $\forall i\in\mathcal{N}$ на J, то (7) уже в форме (24). Рассмотрим случай, когда $\det A_{(i)}(t)=0$ $\forall t\in J$. Это соотношение должно выполняться для всех i одновременно, поскольку существование $i_1, i_2\in\mathcal{N}$, $i_1\ne i_2$, таких, что $\det A_{(i_1)}(t)=0$, $\det A_{(i_2)}(t)\not\equiv 0$ $\forall t\in J$, по замечанию 1 противоречит включению $A(t)\in\mathcal{C}^A(T)$.

Преобразуем матрицы $S_{(m)}(t)$, $m=\overline{i,i+\theta+1}$, так, чтобы в них не было линейно зависимых на J строк. Положим $\Lambda^{[0,0]}_{l,\theta(i)}(t)=\Lambda_{l,\theta(i)}(t)$. Умножим эту матрицу слева на неособенную $\forall t\in J$ матрицу

$$\operatorname{diag}\{\Delta_l[P_{1(i)}(t)];\Delta_l[P_{1(i+1)}(t)];\dots;\Delta_l[P_{1(i+\theta+1)}(t)]\},$$

у которой на главной диагонали стоят блоки, перечисленные в фигурных скобках, остальные элементы нулевые, и $P_{1(i)}(t)=P_1(t+(i-1)\sigma)$, $t\in J$, $i=\overline{1,\infty}$. По лемме 1 матрица $P_1(t)\in\mathcal{C}^A(T)$ такая, что $\det P_1(t)\ne 0$ $\forall t\in T$, $P_1(t)A(t)=\binom{A^1(t)}{O}$, $\dim A^1(t)=\max\limits_{t\in T}\operatorname{rank}A^1(t)=\max\limits_{t\in T}\operatorname{rank}A(t)$, существует.

Полученная матрица $\widetilde{\Lambda}^{[0,0]}_{l,\theta(i)}(t)$ будет обладать той же структурой, что и $\Lambda^{[0,0]}_{l,\theta(i)}(t)$, при этом ее диагональные ненулевые блоки будут иметь вид

$$\widetilde{U}^{[0,0]}_{(m)}(t)=\Delta_l[P_{1(m)}(t)D_{(m)}(t), O_n],\quad \widetilde{S}^{[0,0]}_{(m)}(t)=\Delta_l\left[\begin{pmatrix}B^{1,1}_{(m)}(t)\\ B^{1,2}_{(m)}(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A^1_{(m)}(t)\\ O\end{pmatrix}\right],$$

$m=\overline{i,i+\theta+1}$.

По замечанию 1 либо $\dim B^{1,2}_{(m)}(t)$ равно $\max\limits_{t\in J,\ m\in\mathcal{N}} B^{1,2}_{(m)}(t)$, либо строго меньше этого числа для всех $m\in\mathcal{N}$. Во втором случае матрицу $\widetilde{\Lambda}^{[0,0]}_{l,\theta(i)}(t)$ умножим на неособенную $\forall t\in J,\quad \forall i\in\mathcal{N}$ матрицу

$$\operatorname{diag}\left\{\Delta_l\left[\begin{pmatrix}E & O\\ O & P_{2(i)}(t)\end{pmatrix}\right];\ldots;\Delta_l\left[\begin{pmatrix}E & O\\ O & P_{2(i+\theta+1)}(t)\end{pmatrix}\right]\right\},$$

где $P_{2(i)}=P_2(t+(i-1)\sigma)$, $t\in J$. Неособенная $\forall t\in T$ матрица $P_2(t)\in\mathcal{C}^A(T)$ уничтожает линейно зависимые на T строки в $B^{1,2}(t)$ ($B^{1,2}_{(m)}(t)=B^{1,2}(t+(m-1)\sigma)$, $t\in J$). В результате получим матрицу $\widehat{\Lambda}^{[0,0]}_{l,\theta(i)}(t)$, в которой

$$\widehat{U}^{[0,0]}_{(m)}(t)=\Delta_l\left[\begin{pmatrix}D^{1,1}_{0(m)}(t)\\ D^{1,2}_{0(m)}(t)\\ D^{1,3}_{0(m)}(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}O\\ O\\ O\end{pmatrix}\right],\quad \widehat{S}^{[0,0]}_{(m)}(t)=\Delta_l\left[\begin{pmatrix}B^{1,1}_{(m)}(t)\\ B^{1}_{(m)}(t)\\ O\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A^{1}_{(m)}(t)\\ O\\ O\end{pmatrix}\right].$$

Нетрудно убедиться, что матрица $D^{1,3}_{0(m)}(t)$ полного ранга $\forall t\in J,\quad \forall m\in\mathcal{N}$. В противном случае в точках $\xi\in J:\operatorname{rank}D^{1,3}_{0(m)}(\xi)<\dim D^{1,3}_{0(m)}(t)$

$$\operatorname{rank}\widehat{\Lambda}^{[0,0]}_{l,\theta(i)}(\xi)<(l+1)(\theta+2)n,$$

что противоречит условию 2) теоремы.

Для того чтобы исключить линейную зависимость на J между строками матриц $A^1_{(m)}(t)$ и $B^1_{(m)}(t)$, умножим блочные строки в $\widehat{\Lambda}^{[0,0]}_{l,\theta(i)}(t)$ на соответствующие невырожденные $\forall t\in J$, $\forall m\in\mathcal{N}$ матрицы

$$\begin{pmatrix}\Delta_{l-1}\left[\begin{pmatrix}P_{3(m)}(t) & O\\ O & E\end{pmatrix},\begin{pmatrix}O & Q_{3(m)}(t)\\ O & O\end{pmatrix}\right] & \vdots & O\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\\ O & \vdots & E_n\end{pmatrix},\quad m=\overline{i,i+\theta+1},$$

где $P_{3(m)}(t)=P_3(t+(m-1)\sigma)$, $Q_{3(m)}(t)=Q_3(t+(m-1)\sigma)\in\mathcal{C}^A(J)$; $\det P_3(t)\neq 0\quad\forall t\in J$;

$$\begin{pmatrix}P_3(t) & Q_3(t)\\ O & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^1(t)\\ B^1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^2(t)\\ O\\ B^1(t)\end{pmatrix},\quad t\in T,$$

$$\dim\begin{pmatrix}A^2(t)\\ B^1(t)\end{pmatrix}=\max_{t\in T}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A^2(t)\\ B^1(t)\end{pmatrix}=\max_{t\in T}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A^1(t)\\ B^1(t)\end{pmatrix}.$$

Ненулевые блоки новой матрицы $\Lambda^{[1,0]}_{l,\theta(i)}(t)$ будут иметь вид

$$U^{[1,0]}_{(m)}(t)=\begin{pmatrix}\Delta_{l-1}\left[\begin{pmatrix}D^{2,1}_{0(m)}(t)\\ D^{2,2}_{0(m)}(t)\\ D^{1,2}_{0(m)}(t)\\ D^{1,3}_{0(m)}(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D^{2,1}_{1(m)}(t)\\ D^{2,2}_{1(m)}(t)\\ O\\ O\end{pmatrix}\right] & \vdots & O\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\\ F^{[1,0]}_{(m)}(t) & \vdots & O\end{pmatrix},$$

$$S^{[1,0]}_{(m)}(t)=\left(\begin{array}{ccc}\Delta_{l-1}\left[\begin{pmatrix}B^{2,1}_{(m)}(t)\\B^{2,2}_{(m)}(t)\\B^{1}_{(m)}(t)\\O\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A^{2}_{(m)}(t)\\O\\O\\O\end{pmatrix}\right] & \vdots & O\\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\\ H^{[1,0]}_{(m)}(t) & \vdots & R^{[1,0]}_{(m)}(t)\end{array}\right),$$

где

$$F^{[1,0]}_{(m)}(t)=\begin{pmatrix}(D^{1,1}_{0(m)}(t))^{(l)} & \dots & D^{1,1}_{0(m)}(t)\\(D^{1,2}_{0(m)}(t))^{(l)} & \dots & D^{1,2}_{0(m)}(t)\\(D^{1,3}_{0(m)}(t))^{(l)} & \dots & D^{1,3}_{0(m)}(t)\end{pmatrix},$$

$$H^{[1,0]}_{(m)}(t)=\begin{pmatrix}(B^{1,1}_{(m)}(t))^{(l)} & \dots & *\\(B^{1}_{(m)}(t))^{(l)} & \dots & B^{1}_{(m)}(t)\\O & \dots & O\end{pmatrix},\quad R^{[1,0]}_{(m)}(t)=\begin{pmatrix}A^{1}_{(m)}(t)\\O\\O\end{pmatrix}.$$

Уничтожим линейную зависимость на J строк матрицы $B^{2,2}_{(m)}(t)=B^{2,2}(t+(m-1)\sigma)$, $t\in J$, а затем матрицы $\begin{pmatrix}A^{2}_{(m)}(t)\\\tilde{B}^{2,2}_{(m)}(t)\end{pmatrix}$, где $\dim\widetilde{B}^{2,2}_{(m)}(t)=\max\limits_{t\in J,\ m\in\mathcal{N}}\operatorname{rank}\widetilde{B}^{2,2}_{(m)}(t)=\max\limits_{t\in T}\operatorname{rank}B^{2,2}(t)$, и т. д.

Процесс преобразований будем продолжать до тех пор, пока на некотором шаге k в матрицах $S^{[k,0]}_{(m)}(t)$, $m=\overline{i,i+\theta+1}$, не останется линейно зависимых на J строк. Рассуждая так же, как в ([5], с. 87), можно показать, что $k\le\max\limits_{t\in T}\operatorname{rank}A(t)$. Полученная при этом матрица $\Lambda^{[k,0]}_{l,\theta(i)}(t)$ будет иметь следующие диагональные ненулевые блоки:

$$U^{[k,0]}_{(m)}(t)=\left(\begin{array}{ccc}\Delta_{l-k}\left[\begin{pmatrix}D^{k,1}_{0(m)}(t)\\D^{k,2}_{0(m)}(t)\\D^{k,3}_{0(m)}(t)\\D^{k-1,2}_{0(m)}(t)\\D^{k-1,3}_{0(m)}(t)\\\dots\\D^{1,2}_{0(m)}(t)\\D^{1,3}_{0(m)}(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D^{k,1}_{1(m)}(t)\\D^{k,2}_{1(m)}(t)\\D^{k,3}_{1(m)}(t)\\D^{k-1,2}_{1(m)}(t)\\D^{k-1,3}_{1(m)}(t)\\\dots\\O\\O\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}D^{k,1}_{k-1(m)}(t)\\D^{k,2}_{k-1(m)}(t)\\D^{k,3}_{k-1(m)}(t)\\O\\O\\\dots\\O\\O\end{pmatrix}\right] & \vdots & O\\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\\ F^{[k,0]}_{(m)}(t) & \vdots & O\end{array}\right),$$

$$S_{(m)}^{[k,0]}(t)=\begin{pmatrix} \Delta_{l-k}\left[\begin{pmatrix} B_{(m)}^{k,1}(t)\\ B_{(m)}^{k}(t)\\ O\\ B_{(m)}^{k-1}(t)\\ O\\ \dots\\ B_{(m)}^{1}(t)\\ O\end{pmatrix},\begin{pmatrix} A_{(m)}^{k}(t)\\ O\\ O\\ O\\ O\\ \dots\\ O\\ O\end{pmatrix}\right] & \vdots & O\\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\\ H_{(m)}^{[k,0]}(t) & \vdots & R_{(m)}^{[k,0]}(t)\end{pmatrix},$$

$$F_{(m)}^{[k,0]}(t)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}(D_{0(m)}^{k-1,1}(t))^{(l-k+1)} & \dots & D_{k-2(m)}^{k-1,1}(t)\\ (D_{0(m)}^{k-1,2}(t))^{(l-k+1)} & \dots & D_{k-2(m)}^{k-1,2}(t)\\ (D_{0(m)}^{k-1,3}(t))^{(l-k+1)} & \dots & D_{k-2(m)}^{k-1,3}(t)\end{pmatrix}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \begin{pmatrix}(D_{0(m)}^{1,1}(t))^{(l)} & \dots & D_{0(m)}^{1,1}(t)\\ (D_{0(m)}^{1,2}(t))^{(l)} & \dots & D_{0(m)}^{1,2}(t)\\ (D_{0(m)}^{1,3}(t))^{(l)} & \dots & D_{0(m)}^{1,3}(t)\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

$$H_{(m)}^{[k,0]}(t)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}(B_{(m)}^{k-1,1}(t))^{(l-k+1)} & \dots & *\\ (B_{(m)}^{k-1}(t))^{(l-k+1)} & \dots & B_{(m)}^{k-1}(t)\\ O & \dots & O\end{pmatrix}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \begin{pmatrix}(B_{(m)}^{1,1}(t))^{(l)} & \dots & *\\ (B_{(m)}^{1}(t))^{(l)} & \dots & *\\ O & \dots & O\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

$$R_{(m)}^{[k,0]}(t)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{(m)}^{k-1}(t) & \dots & O & O\\ O & \dots & O & O\\ O & \dots & O & O\end{pmatrix}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \begin{pmatrix}* & \dots & * & A_{(m)}^{1}(t)\\ * & \dots & B_{(m)}^{1}(t) & O\\ O & \dots & O & O\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

По построению все матрицы, стоящие в $U_{(m)}^{[k,0]}(t)$ и $S_{(m)}^{[k,0]}(t)$ в блочных строках с одинаковыми номерами, имеют одни и те же размеры $\forall m\in\mathcal{N}$, т.е.

$$\dim D_{0(m)}^{1,2}(t)=\dim B_{(m)}^{1}(t),\quad \dim D_{0(m)}^{1,1}(t)=\dim A_{(m)}^{1}(t),\dots,$$
$$\dim D_{0(m)}^{k,1}(t)=\dim B_{(m)}^{k,1}(t)=\dim A_{(m)}^{k}(t)$$

(число столбцов во всех этих матрицах равно n). Поэтому блочные строки матрицы $\Lambda_{l,\theta(i)}^{[k,0]}(t)$ можно переставить следующим образом:

1) строки из $U_{(m)}^{[k,0]}(t)$, которым в $S_{(m)}^{[k,0]}(t)$ отвечают нулевые строки, поставить на место строк с теми же номерами в $S_{(m-1)}^{[k,0]}(t)$, $m=\overline{i+1,i+\theta+1}$;

2) соответствующие строки из $U_{(i)}^{[k,0]}(t)$ перенести на последнее место в $\Lambda_{l,\theta(i)}^{[k,0]}(t)$.

После перестановки получим

$$\Lambda^{[k,1]}_{l,\theta(i)}(t) = \begin{pmatrix} U^{[k,1]}_{(i)}(t) & S^{[k,1]}_{(i)}(t) & O & \dots & O & O \\ O & U^{[k,1]}_{(i+1)}(t) & S^{[k,1]}_{(i+1)}(t) & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} O \\ M^{[k,1]}_{(i)}(t) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} O \\ O \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} O \\ O \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \overline{U}^{[k,1]}_{(i+\theta+1)}(t) \\ O \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overline{S}^{[k,1]}_{(i+\theta+1)}(t) \\ O \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

где
1) матрицы $U^{[k,1]}_{(m)}(t)$ получены из $U^{[k,0]}_{(m)}(t)$, $m = \overline{i, i+\theta}$, заменой блоков $D^{j_1,3}_{j_2(m)}(t)$, $j_1 = \overline{1,k}$, $j_2 = \overline{0, k-1}$, нулевыми блоками;
2) $S^{[k,1]}_{(m)}(t)$ получены из $S^{[k,0]}_{(i)}(t)$, $m = \overline{i, i+\theta}$, заменой нулевых блочных строк соответствующими строками из $U^{[k,0]}_{(m+1)}(t)$, содержащими блоки $D^{j_1,3}_{j_2(m+1)}(t)$;
3) матрицы $\overline{U}^{[k,1]}_{(i+\theta+1)}(t)$, $\overline{S}^{[k,1]}_{(i+\theta+1)}(t)$ получены из $U^{[k,0]}_{(i+\theta+1)}(t)$, $S^{[k,0]}_{(i+\theta+1)}(t)$ вычеркиванием строк, содержащих блоки $D^{j_1,3}_{j_2(i+\theta+1)}(t)$;
4)

$$\begin{pmatrix} O \\ M^{[k,1]}_{(i)}(t) \end{pmatrix} = \Delta_{l-k} \left[\begin{pmatrix} O \\ D^{k,3}_{0(i)}(t) \\ D^{k-1,3}_{0(i)}(t) \\ \dots \\ D^{1,3}_{0(i)}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O \\ D^{k,3}_{1(i)}(t) \\ D^{k-1,3}_{1(i)}(t) \\ \dots \\ O \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} O \\ D^{k,1}_{k-1(i)}(t) \\ O \\ \dots \\ O \end{pmatrix} \right].$$

Разобьем первые n строк матрицы $\Lambda^{[k,1]}_{l,\theta(i)}(t)$ на $(n \times n)$-блоки и выпишем АДС, для которой полученные матрицы будут коэффициентами. А именно, блоки из $U^{[k,1]}_{(i)}(t)$ в последовательности слева направо представляют собой коэффициенты соответственно при $x_{(i-1)}(t), x'_{(i-1)}(t), \dots, x^{(l)}_{(i-1)}(t)$, а блоки из $S^{[k,1]}_{(i)}(t)$ — коэффициенты при $x_{(i)}(t), x'_{(i)}(t), \dots, x^{(l)}_{(i)}(t)$. По постороению эта АДС будет вида (24), где $r, s \le l$. Если при этом удовлетворяется условие (34), то полученная система и есть искомая.

Поскольку

$$\Lambda^{[k,1]}_{l,\theta(i)}(t) = V^{[k,1]}_{l,\theta(i)}(t)\Lambda_{l,\theta(i)}(t), \quad \det V^{[k,1]}_{l,\theta(i)}(t) \neq 0 \ \ \forall t \in J, \ \ \forall i \in \mathcal{N},$$

то первые n строк матрицы $V^{[k,1]}_{l,\theta(i)}(t)$, разбитые на $(n \times n)$-блоки, можно взять в качестве коэффициентов оператора $\mathcal{V}_{(i)}$ вида (23).

Если условие (34) не выполнено, то продолжим преобразования над матрицей $\Lambda^{[k,1]}_{l,\theta(i)}(t)$, т.е. сначала исключим линейно зависимые на J строки в матрицах $S^{[k,1]}_{(m)}(t)$, $m = \overline{i, i+\theta}$. Затем описанным выше способом переставим строки в полученной матрице $\Lambda^{[k_2,1]}_{l,\theta(i)}(t)$ и т.д. На некотором шаге η коэффициенты АДС, составленной из первых $(n \times n)$-блоков матрицы $\Lambda^{[k_\eta,\eta]}_{l,\theta(i)}(t)$, будут удовлетворять условию (34). В этом случае коэффициенты $V_{j,k(i)}(t)$ из (23) представляют собой $(n \times n)$-блоки, расположенные в первых n строках матрицы $V^{[k_\eta,\eta]}_{l,\theta(i)}(t)$:

$$\Lambda^{[k_\eta,\eta]}_{l,\theta(i)}(t) = V^{[k_\eta,\eta]}_{l,\theta(i)}(t)\Lambda_{l,\theta(i)}(t), \quad \det V^{[k_\eta,\eta]}_{l,\theta(i)}(t) \neq 0 \ \ \forall t \in J, \ \ \forall i \in \mathcal{N}.$$

По лемме 4 число коэффициентов оператора $\mathcal{V}_{(i)}$ не превосходит $(l+1)(\theta+2)$, поэтому $k_\eta \le l$, $\eta \le \theta + 1$.

Допустим, что матрица $\Lambda^{[l,\theta+1]}_{l,\theta(i)}(t)$ оказалась такой, что для соответствующей АДС (24) условие (34) не имеет места. Это значит, что в $\Lambda^{[l,\theta+1]}_{l,\theta(i)}(t)$ появилась нулевая строка, что невозможно в силу предположения 2) теоремы. $\square$

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. И, кроме того,

$$\operatorname{rank}\Gamma^{[j]}_{l,\theta(i)}(t) = \text{const} \quad \forall t \in J, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad j = \overline{0, l-1}, \tag{35}$$

где

$$\Gamma^{[0]}_{l,\theta(i)}(t) = \begin{pmatrix} S_{(i)}(t) & O & \dots & O & O \\ U_{(i+1)}(t) & S_{(i+1)}(t) & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & U_{(i+\theta+1)}(t) & S_{(i+\theta+1)}(t) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{[j]}_{l,\theta(i)}(t) = \Gamma^{[j-1]}_{l,\theta(i)}(t) \begin{pmatrix} O_n & O \\ O & E \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, l-1}.$$

Тогда для системы (7) существуют операторы $\mathcal{V}_{(i)}$, $i = \overline{1, \infty}$, (23), приводящие ее к виду (24), (26).

Доказательство. Несложно проверить, что в условиях (35) матрицы $\widehat{A}_{r(i)}(t), \dots, \widehat{A}_{0(i)}(t)$ $(r \le l)$ в системе (24), построенной при доказательстве теоремы 2, будут постоянного ранга на J, а следовательно, будут удовлетворять условию (26). $\square$

Следствие 3. В условиях следствия 2 для системы (7) существуют операторы $\mathcal{W}_{(i)}$, $i = \overline{1, \infty}$, (33), преобразующие ее к виду (10).

Справедливость этого утверждения вытекает из следствия 1.

Литература

1. Campbell S.L. *Comments on* 2−D *descriptor systems* // Automatica. – 1991. – V. 27. – № 1. – P. 189–192.
2. Campbell S.L. *Singular linear systems of differential equations with delays* // Appl. Anal. – 1980. – V. 11. – № 2. – P. 129–136.
3. Щеглова А.А. *Об индексе алгебро-дифференциальных систем с отклоняющимся аргументом* // Тр. 11-й Байкальск. международ. школы-семин. “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск: Изд-во ин-та энергетич. систем им. Мелентьева СО РАН. – 1998. – Т. 4. – С. 191–195.
4. Campbell S.L. *Nonregular* 2D *descriptor delay systems* // IMA J. Math. Control and Informat. – 1995. – № 12. – P. 57–67.
5. Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* – Новосибирск: Наука, 1996. – 279 с.
6. Silverman L.M., Bucy R.S. *Generalization of theorem of Dolezal* // Math. System Theory. – № 4. – P. 334–339.

Институт динамики систем
и теории управления

Поступили
первый вариант 04.10.1999
окончательный вариант 25.04.2001