Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
2014, № 1, с. 61–70 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Т.Х. РАСУЛОВ, Р.Т. МУХИТДИНОВ

КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, АССОЦИИРОВАННОГО С СИСТЕМОЙ ТРЕХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

Аннотация. Рассматривается модельный оператор H, ассоциированный с системой трех частиц на решетке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов. При некоторых естественных условиях на параметры, задающие данный модельный оператор H, доказана конечность дискретного спектра.

Ключевые слова: дискретный спектр, нелокальный потенциал, непрерывность в равномерной операторной топологии, класс Гильберта–Шмидта, уравнение Вайнберга.

УДК: 517.984

Введение

Хорошо известно, что при некоторых естественных предположениях непрерывный оператор Шредингера A системы трех попарно взаимодействующих частиц имеет существенный спектр, совпадающий с полуосью $[\varkappa, \infty)$, где $\varkappa \leq 0$. В работах [1], [2] доказано, что при $\varkappa < 0$ и достаточно быстром убывании потенциалов взаимодействия в координатном представлении дискретный спектр оператора A является конечным.

Что же касается дискретного оператора Шредингера, являющегося решеточным аналогом обычного трехчастичного непрерывного оператора Шредингера, в отличие от непрерывного случая, двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра заполняют отрезки конечной длины и они могут не пересекаться. Вопросу конечности дискретного спектра таких операторов посвящены многие работы, например, [3], [4]. Отметим, что в [3] пользуясь уравнениями типа Фаддеева и Вайнберга, а также разложением определителя Фредгольма, доказана конечность дискретного спектра трехчастичного дискретного оператора Шредингера парными контактными взаимодействиями при отсутствии виртуальных уровней у операторов, описывающих двухчастичные подсистемы. В [4] с помощью принципа Бирмана–Швингера доказана конечность дискретного спектра трехчастичного дискретного оператора Шредингера, описывающая системы трех частиц (два бозона и третий иной природы).

Обычно в физической литературе используются локальные потенциалы, т. е. операторы умножения на функцию. Однако потенциалы, которые строятся, например, в теории псевдопотенциала [5], оказываются нелокальными и представляют собой, в том числе для периодического оператора, сумму локального потенциала и некоторого конечномерного потенциала.

Поступила 11.09.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) № TR368/6-2.

В данной работе рассматривается модельный оператор H, ассоциированный с системой трех частиц на решетке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов. Построен симметризованный вариант известного уравнения Вайнберга, с помощью которого доказывается конечность дискретного спектра оператора H. Следует отметить, что этот метод используется даже в том случае, когда существенный спектр модельного оператора H имеет лакуну (см. случай в) теоремы 1.3). В работах [6]–[8] изучены бесконечность дискретного спектра оператора H, а также его несимметризованного варианта.

В разделе 1 модельный оператор рассматривается как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и формулируется основной результат работы. В разделе 2 получен аналог уравнения Вайнберга для собственных функций оператора H и доказан основной результат работы.

1. Предварительные сведения и формулировка основного результата

Пусть $\mathbf{T}^3 \equiv (-\pi, \pi]^3$ — трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $(\mathbf{T}^3)^2 = \mathbf{T}^3 \times \mathbf{T}^3$ — декартово произведение, $L_2(\mathbf{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbf{T}^3$ и $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbf{T}^3)^2$.

Рассмотрим модельный оператор H, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$ по формуле $H = H_0 - V_1 - V_2$, где операторы H_0, V_i, $i = 1, 2$, определяются по правилам

$$(H_0 f)(p, q) = w(p, q) f(p, q),$$

$$(V_1 f)(p, q) = \varphi(p) \int \varphi(s) f(s, q) ds, \quad (V_2 f)(p, q) = \varphi(q) \int \varphi(s) f(p, s) ds.$$

Здесь $\varphi(\cdot)$ — вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbf{T}^3$, $w(\cdot, \cdot)$ — вещественнозначная непрерывная симметричная функция на $(\mathbf{T}^3)^2$. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

Можно легко проверить, что в этих предположениях модельный оператор H является ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$.

Отметим, что в работах [9], [10] изучены нелокальные потенциалы с вырожденным ядром вида $\mathcal{V}(p, q) = -\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(p) g_i(q)$. Там такие операторы рассматриваются как модели, ассоциированные с системой нескольких частиц, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов. Например, одним из нелокальных потенциалов является гауссовый потенциал, ядро которого для одночастичного случая имеет вид

$$\mathcal{V}(p, q) = -\mu e^{-\frac{\beta}{2}(p^2+q^2)}, \quad \mu, \beta > 0.$$

Так как двухчастичные уравнения Шредингера легко разрешимы для нелокальных взаимодействий, их часто используют в ядерной физике и в многочастичных проблемах. Они также используются очень систематически вместе с уравнениями Фаддеева для систем трех частиц. Их основная характеристика [10] заключается в том, что частично-волновая t-матрица имеет ту же простую форму и может быть продолжена простым способом, характеристика, которая наиболее важна, как хорошо известно, в ядерной физике и в уравнениях Фаддеева.

Приведем несколько основных обозначений, которые будут применяться на протяжении всей работы.

При каждом фиксированным $p \in \mathbf{T}^3$ определим регулярную в $\mathbf{C} \backslash [m_w(p), M_w(p)]$ функцию

$$\Delta(p; z) := 1 - \int \frac{\varphi^2(s) ds}{w(p,s) - z},$$

где $m_w(p) := \min_{q \in \mathbf{T}^3} w(p,q)$, $M_w(p) := \max_{q \in \mathbf{T}^3} w(p,q)$.

Пусть σ — множество тех точек $z \in \mathbf{C}$, для которых равенство $\Delta(p;z) = 0$ имеет место хотя бы для одной $p \in \mathbf{T}^3$,

$$m := \min_{p,q \in \mathbf{T}^3} w(p,q), \quad M := \max_{p,q \in \mathbf{T}^3} w(p,q) \quad \text{и} \quad \Sigma := [m, M] \cup \sigma.$$

Пусть $P_{(a,b)}(A)$ — спектральный проектор самосопряженного оператора A, соответствующий интервалу (a,b).

Определение 1.1. Множество всех λ, для которых при любом положительном ε проектор $P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(A)$ является бесконечномерным, называется существенным спектром самосопряженного оператора A и обозначается $\sigma_{\text{ess}}(A)$.

Критерий Вейля. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ в том и только том случае, когда существует ортонормальная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||(A-\lambda)\psi_n|| \to 0$.

Теорема 1.1 ([6], [7]). *Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$ модельного оператора H справедливо равенство $\sigma_{\text{ess}}(H) = \Sigma$.*

Определение 1.2. Множества σ и $[m, M]$ называются соответственно двухчастичной и трехчастичной ветвями существенного спектра модельного оператора H.

Везде будет предполагаться, что все частные производные второго порядка функции $w(\cdot,\cdot)$ непрерывны в $(\mathbf{T}^3)^2$ и имеют невырожденный минимум в точках $(P_i, Q_i) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $1 \le i \le N < \infty$. Тогда из непрерывности функции $\varphi(\cdot)$ на $\mathbf{T}^3$ вытекает, что $\int \frac{\varphi^2(s)ds}{w(p,s)-m} > 0$, $p \in \mathbf{T}^3$, является конечным интегралом.

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует $\Delta(P_i; m) = \lim\limits_{p \to P_i} \Delta(p; m)$, $i = \overline{1, N}$, и, следовательно, функция $\Delta(\cdot\,; m)$ непрерывна на $\mathbf{T}^3$.

Пусть $E_{\min}$ и $E_{\max}$ — нижняя и верхняя грани множества σ соответственно.

Теорема 1.2 ([6], [7]). *Имеем*

а) *если* $\min\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m) \ge 0$, *то* $\sigma_{\text{ess}}(H) = [m, M]$;

б) *если* $\min\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m) < 0$ *и* $\max\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m) \ge 0$, *то* $\sigma_{\text{ess}}(H) = [E_{\min}, M]$, *причем* $E_{\min} < m$;

в) *если* $\max\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m) < 0$, *то* $\sigma_{\text{ess}}(H) = [E_{\min}, E_{\max}] \cup [m, M]$, *причем* $E_{\max} < m$.

Так как $E_{\min}, E_{\max} \in \sigma$, существуют точки $p_1, q_1 \in \mathbf{T}^3$ такие, что $\Delta(p_1; E_{\min}) = 0$ и $\Delta(q_1; E_{\max}) = 0$. Следует отметить, что последние равенства могут выполняться в нескольких точках.

Пусть

$$|p| := \sqrt{(p^{(1)})^2 + (p^{(2)})^2 + (p^{(3)})^2}, \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbf{T}^3,$$

$$U_\delta(p_0) := \{p \in \mathbf{T}^3 : |p - p_0| < \delta\}, \quad \delta > 0, \quad p_0 \in \mathbf{T}^3.$$

Для точной формулировки нужного нам результата, приведем следующие условия.

Условие 1.1. *Предположим, что*

$$\{p \in \mathbf{T}^3 : \Delta(p; E_{\min}) = 0\} = \{p_1, \ldots, p_n\}, \quad 1 \le n < +\infty \quad (E_{\min} < m),$$

существуют числа C, $\delta > 0$ *и* $\alpha_j \in (0, 2]$, $j = \overline{1, n}$, *такие, что*

$$|\Delta(p; E_{\min})| \ge C|p - p_j|^{\alpha_j}, \quad p \in U_\delta(p_j), \quad j = \overline{1, n},$$

и для любого $p \in \mathbf{T}^3 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ *справедливо неравенство* $\Delta(p; E_{\min}) > 0$.

Условие 1.2. *Предположим, что*

$$\{p \in \mathbf{T}^3 : \Delta(p; E_{\max}) = 0\} = \{q_1, \ldots, q_k\}, \quad 1 \le k < +\infty \quad (E_{\max} < m),$$

существуют числа K, $\rho > 0$ *и* $\beta_j \in (0, 2]$, $j = \overline{1, k}$, *такие, что*

$$|\Delta(p; E_{\max})| \ge K|p - q_j|^{\beta_j}, \quad p \in U_\rho(q_j), \quad j = \overline{1, k},$$

и для любого $p \in \mathbf{T}^3 \setminus \{q_1, \ldots, q_k\}$ *справедливо неравенство* $\Delta(p; E_{\max}) < 0$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1.3. *Пусть выполняется одно из следующих условий*:

а) $\min\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m) > 0$,

б) $\min\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m) < 0$, $\max\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m) \ge 0$ *и условие* 1.1,

в) $\max\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m) < 0$ *и условия* 1.1, 1.2.

Тогда дискретный спектр оператора H *конечен.*

Замечание 1.1. Класс функций $\varphi(\cdot)$ и $w(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.3, является непустым (см. лемму 2.6).

Замечание 1.2. Отметим, что если $\min\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; m) = \Delta(P_i; m) = 0$, $i = \overline{1, N}$, и $\varphi(Q_j) \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, N\}$, то модельный оператор H имеет [8] бесконечное число собственных значений, лежащих левее точки $z = m$.

2. Доказательство основного результата

В этом разделе строится уравнение, представляющее собой симметризованный вариант известного уравнения Вайнберга и приводятся некоторые вспомогательные утверждения, с помощью которых доказывается основной результат работы.

В дальнейшем через γ, C_1, C_2 и C_3 обозначаются различные положительные постоянные, значения которых не конкретизированы.

Лемма 2.1. *Пусть выполняется условие* в) *теоремы* 1.3. *Тогда существуют положительные числа* γ, C_1 *такие, что при всех*

$$(p, z) \in \left(\mathbf{T}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_\gamma(p_j)\right) \times (-\infty, E_{\min}],$$

$$(p, z) \in \left(\mathbf{T}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_\gamma(q_j)\right) \times [E_{\max}, (m + E_{\max})/2],$$

$$(p, z) \in \mathbf{T}^3 \times [(m + E_{\max})/2, m]$$

выполняется неравенство $|\Delta(p; z)| \ge C_1$.

Доказательство. Так как при каждом $p \in \mathbf{T}^3$ функция $\Delta(p;\cdot)$ монотонно убывает по $z \in (-\infty; E_{\min})$, то $\Delta(p;z) \geq \Delta(p;E_{\min})$ при всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $z \leq E_{\min}$. В силу условия 1.1 имеем $\Delta(p;E_{\min}) > 0$ при всех $p \in \mathbf{T}^3 \setminus \{p_1,\dots,p_n\}$. Отсюда и из непрерывности функции $\Delta(\cdot;E_{\min})$ на компактном множестве $\mathbf{T}^3 \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_\gamma(p_j)$ следует, что существует число $C_1 > 0$ такое, что $|\Delta(p;z)| \geq C_1$. Случаи $(p,z) \in \Big(\mathbf{T}^3 \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} U_\gamma(q_j)\Big) \times [E_{\max}, (m+E_{\max})/2]$ и $(p,z) \in \mathbf{T}^3 \times [(m+E_{\max})/2, m]$ доказываются аналогично. □

Лемма 2.2. *Существуют положительные числа γ, C_1, C_2, C_3 такие, что выполняются неравенства*
а) $C_1(|p-P_i|^2 + |q-Q_i|^2) \leq w(p,q) - m \leq C_2(|p-P_i|^2 + |q-Q_i|^2)$ *при* $(p,q) \in U_\gamma(P_i) \times U_\gamma(Q_i)$, $i = \overline{1,N}$,
б) $w(p,q) - z \geq w(p,q) - m > C_3$ *при* $(p,q) \notin \bigcup\limits_{i=1}^{N} (U_\gamma(P_i) \times U_\gamma(Q_i))$ *и* $z \leq m$.

Доказательство. Так как все частные производные второго порядка функции $w(\cdot,\cdot)$ непрерывны в $(\mathbf{T}^3)^2$ и функция $w(\cdot,\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $(P_i,Q_i) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $i = \overline{1,N}$, то согласно лемме Адамара ([11], с. 468) в $\gamma > 0$-окрестностях этих точек имеет место равенство

$$w(p,q) = m + \sum_{s,l=1}^{3} H_{sl}(p,q)(p^{(s)} - P_i^{(s)})(q^{(l)} - Q_i^{(l)}), \quad (p,q) \in U_\gamma(P_i) \times U_\gamma(Q_i),$$

где функции $H_{sl}(\cdot,\cdot)$, $s,l = 1,2,3$, непрерывны в $U_\gamma(P_i) \times U_\gamma(Q_i)$, $i = \overline{1,N}$.

Отсюда следует, что существуют числа C_1, C_2, $C_3 > 0$ и некоторая $\gamma > 0$ такие, что получаем а) и б). □

Пусть $\tau_{\mathrm{ess}}(H)$ — нижняя грань существенного спектра модельного оператора H. Отметим, что при всех $z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$ (соответственно $z \in (E_{\max}, m)$, в случае, когда выполняется условие в) теоремы 1.3) и $p \in \mathbf{T}^3$ верно $\Delta(p;z) \geq 0$ (соответственно $-\Delta(p;z) \geq 0$) и, следовательно, существует его квадратный корень.

При каждом $z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$ (соответственно $z \in (E_{\max}, m)$) рассмотрим интегральный оператор $W(z)$, действующий в пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$, с ядром

$$W(p,q,s,t;z) := \frac{\varphi(p)\varphi(q)\varphi(s)\varphi(t)}{\sqrt{\Delta(s\,;z)}(w(p,q)-z)} \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta(p;z)}(w(p,s)-z)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta(q;z)}(w(q,s)-z)}\right]$$

(s, t — переменные интегрирования), а при каждом $z \in (E_{\max}, m)$ ядро оператора $W(z)$ равно $-W(p,q,s,t;z)$, где роль функции $\Delta(\cdot;\cdot)$ играет $-\Delta(\cdot;\cdot)$.

Лемма 2.3. *Если $f \in L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению $z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$ (соответственно $z \in (E_{\max}, m)$) модельного оператора H, то f удовлетворяет уравнению $W(z)f = f$, обычно называемому уравнением Вайнберга.*

Доказательство. Пусть $z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$ (соответственно $z \in (E_{\max}, m)$) — собственное значение модельного оператора H и $f \in L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$ — соответствующая собственная функция. Тогда f удовлетворяет уравнению

$$(w(p,q)-z)f(p,q) - \varphi(q)\int \varphi(s)f(p,s)ds - \varphi(p)\int \varphi(s)f(s,q)ds = 0. \tag{2.1}$$

Так как $z \notin [m, M]$, то из уравнения (2.1) для f имеем

$$f(p,q) = \frac{\varphi(q)g(p) + \varphi(p)g(q)}{w(p,q) - z}, \tag{2.2}$$

где

$$g(p) = \int \varphi(s) f(p,s) ds. \tag{2.3}$$

Подставляя выражение (2.2) для f в (2.3) и учитывая $z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$ (соответственно $z \in (E_{\max}, m)$), получим

$$g(p) = \frac{\varphi(p)}{\sqrt{\Delta(p;z)}} \int \frac{\varphi(s)g(s)ds}{\sqrt{\Delta(s;z)}(w(p,s) - z)}, \tag{2.4}$$

соответственно

$$g(p) = -\frac{\varphi(p)}{\sqrt{-\Delta(p;z)}} \int \frac{\varphi(s)g(s)ds}{\sqrt{-\Delta(s;z)}(w(p,s) - z)}. \tag{2.5}$$

Теперь подставляя в (2.2) выражение (2.4) (соответственно (2.5)), затем используя выражение (2.3), получим уравнение Вайнберга $W(z)f = f$. □

Лемма 2.4. *Пусть выполняется условие* в) *теоремы* 1.3. *Тогда оператор $W(z)$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта при $z \le E_{\min}$ и $E_{\max} \le z \le m$, а также операторнозначная функция $W(\cdot)$ является непрерывной в равномерной операторной топологии в $(-\infty, E_{\min}] \cup [E_{\max}, m]$.*

Доказательство. Пусть выполняется условие в) теоремы 1.3. Так как функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна в компактном множестве $\mathbf{T}^3$, то для некоторого $C_1 > 0$ имеем $|\varphi(p)| \le C_1$, $p \in \mathbf{T}^3$. Из леммы 1.1 и 1.2 следует, что абсолютная величина ядра $W(p,q,s,t;z)$ оператора $W(z)$ при $z \in [(m + E_{\max})/2, m]$ не превосходит

$$\begin{aligned} C_1 \sum_{i=1}^{N} \Bigg(1 &+ \frac{\chi_\gamma(p - P_i)\chi_\gamma(q - Q_i)}{|p - P_i|^2 + |q - Q_i|^2} + \\ &+ \frac{\chi_\gamma(p - P_i)\chi_\gamma(s - Q_i)}{|p - P_i|^2 + |s - Q_i|^2} + \frac{\chi_\gamma(p - P_i)\chi_\gamma(q - Q_i)\chi_\gamma(s - Q_i)}{(|p - P_i|^2 + |q - Q_i|^2)(|p - P_i|^2 + |s - Q_i|^2)} + \\ &+ \frac{\chi_\gamma(s - P_i)\chi_\gamma(q - Q_i)}{|s - P_i|^2 + |q - Q_i|^2} + \frac{\chi_\gamma(p - P_i)\chi_\gamma(q - Q_i)\chi_\gamma(s - P_i)}{(|p - P_i|^2 + |q - Q_i|^2)(|s - P_i|^2 + |q - Q_i|^2)} \Bigg), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\chi_\gamma(\cdot)$ — характеристическая функция множества $U_\gamma(0)$.

Ясно, что оценочная функция (2.6) квадратично-интегрируема по совокупности переменных p, q, s, t в $(\mathbf{T}^3)^4$, что доказывает принадлежность оператора $W(z)$ классу Гильберта–Шмидта при $z \in [(m + E_{\max})/2, m]$.

Ядро оператора $W(z)$ непрерывно по $p, q, s, t \in \mathbf{T}^3$ при $z \in [(m + E_{\max})/2, m)$ и квадратично интегрируемо по совокупности переменных p, q, s, t в $(\mathbf{T}^3)^4$ при $z \in [(m+E_{\max})/2, m]$. Тогда по теореме Лебега операторнозначная функция $W(\cdot)$ непрерывна в равномерной операторной топологии в $[(m + E_{\max})/2, m]$.

Имеют место следующие оценки:

$$w(p,q) - z \ge m - E_{\min} > 0 \quad \text{при всех} \quad p, q \in \mathbf{T}^3, \quad z \le E_{\min},$$

$$w(p,q) - z \ge (m - E_{\max})/2 > 0 \quad \text{при всех} \quad p, q \in \mathbf{T}^3, \quad z \in [E_{\max}, (m + E_{\max})/2].$$

Тогда в силу леммы 2.1, условий 1.1, 1.2 получим, что абсолютная величина ядра $W(p,q,s,t;z)$ оператора $W(z)$ при $z \le E_{\min}$ оценивается через

$$C_2\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\chi_\delta(s-p_j)}{|s-p_j|^{\alpha_j/2}}\right)\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\chi_\delta(p-p_j)}{|p-p_j|^{\alpha_j/2}}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\chi_\delta(q-p_j)}{|q-p_j|^{\alpha_j/2}}\right),$$

а при $z \in [E_{\max},(m-E_{\max})/2]$ — через

$$C_3\left(1+\sum_{j=1}^{k}\frac{\chi_\rho(s-q_j)}{|s-q_j|^{\beta_j/2}}\right)\left(1+\sum_{j=1}^{k}\frac{\chi_\rho(p-q_j)}{|p-q_j|^{\beta_j/2}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\chi_\rho(q-q_j)}{|q-q_j|^{\beta_j/2}}\right).$$

Так как обе оценочные функции квадратично-интегрируемы по совокупности переменных p, q, s, t в $(\mathbf{T}^3)^4$, оператор $W(z)$ является оператором из класса Гильберта–Шмидта при $z \in (-\infty, E_{\min}] \cup [E_{\max},(m+E_{\max})/2]$.

Рассуждая аналогично, получаем непрерывность операторнозначной функций $W(\cdot)$ в равномерной операторной топологии в $z \in (-\infty, E_{\min}] \cup [E_{\max},(m+E_{\max})/2]$. □

Аналогично доказывается

Лемма 2.5. *Пусть выполняется условие* а) (*соответственно* б)) *теоремы* 1.3. *При* $z \le m$ (*соответственно* $z \le E_{\min}$) *оператор* $W(z)$ *принадлежит классу Гильберта–Шмидта и операторнозначная функция* $W(\cdot)$ *является непрерывной в равномерной операторной топологии в* $(-\infty, m]$ (*соответственно* $(-\infty, E_{\min}]$).

Доказательство теоремы 1.3. Сначала отметим, что из положительности оператора $V = V_1 + V_2$ вытекает, что оператор $H = H_0 - V$ не имеет собственных значений на $(M,+\infty)$. Пусть, например, выполняется условие в) теоремы 1.3. Докажем конечность дискретного спектра оператора H, расположенного в $(E_{\max}, m)$. Допустим, что модельный оператор имеет бесконечное число собственных значений $z_\nu \in (E_{\max}, m)$ и $z_\nu \to E_{\max}$ при $\nu \to \infty$. Обозначим через ψ_ν соответствующие ортонормированные собственные функции. Тогда по лемме 2.3 имеем $\psi_\nu = W(z_\nu)\psi_\nu$. Согласно лемме 2.4 оператор $W(E_{\max})$ является компактным и $\|W(z) - W(E_{\max})\| \to 0$ при $z \to E_{\max} + 0$. Следовательно,

$$1 = \|\psi_\nu\| = \|W(z_\nu)\psi_\nu\| \le \|(W(z_\nu) - W(E_{\max}))\psi_\nu\| + \|W(E_{\max})\psi_\nu\| \to 0$$

при $\nu \to \infty$. Это противоречие означает, что точка $z = E_{\max}$ не может быть предельной точкой множества собственных значений модельного оператора H, лежащих в $(E_{\max}, m)$. Рассуждая аналогично показывается, что точки $z = m$ и $z = E_{\min}$ не могут быть предельными точками множества собственных значений этого оператора, лежащих в $(E_{\max}, m)$ и $(-\infty, E_{\min})$ соответственно.

Если выполняется условие а) (соответственно б)) теоремы 1.3, используя леммы 2.3 и 2.5 аналогично доказывается конечность числа собственных значений модельного оператора H, лежащих в $(-\infty, m)$ (соответственно $(-\infty, E_{\min})$). Теорема 1.3 доказана. □

Лемма 2.6. *Пусть* $\varphi(q) :\equiv \sqrt{\mu}$, $w(p,q) := \varepsilon(p)+\varepsilon(q)$, *где* $\mu > 0$, *а функция* $\varepsilon(\cdot)$ *определяется по формуле* $\varepsilon(p) := \sum\limits_{s=1}^{3}(1-\cos n_0 p^{(s)})$, $n_0 > 1$ — *некоторое натуральное число.*

Положим

$$\mu_0 := \left(\int \frac{dt}{\varepsilon(t)}\right)^{-1}, \quad \mu_1 := \left(\int \frac{dt}{\varepsilon(t)+6}\right)^{-1}.$$

Тогда

1) *если* $\mu \in (0, \mu_0)$, *то условие* а) *теоремы* 1.3 *выполняется,*

2) *если* $\mu \in (\mu_0, \mu_1]$, *то условие* б) *теоремы* 1.3 *выполняется*,
3) *если* $\mu \in (\mu_1, +\infty)$, *то условие* в) *теоремы* 1.3 *выполняется*.

Доказательство. Докажем утверждение 3). Утверждения 1) и 2) доказываются аналогично. Отметим, что $m = 0$, $M = 12$. Пусть $\mu \in (\mu_1, +\infty)$. Тогда из соотношения

$$\min_{p \in \mathbf{T}^3} \int \frac{dt}{\varepsilon(p) + \varepsilon(t)} = \int \frac{dt}{\varepsilon(t) + 6}$$

вытекает

$$\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p; 0) = 1 - \mu \min_{p \in \mathbf{T}^3} \int \frac{dt}{\varepsilon(p) + \varepsilon(t)} = 1 - \mu \mu_1^{-1} < 0.$$

Теперь проверим справедливость условий 1.1 и 1.2.

Пусть

$$n_0' := \begin{cases} n_0, & \text{если } n_0 \text{ четное;} \\ n_0 - 1, & \text{если } n_0 \text{ нечетное,} \end{cases} \quad \text{и} \quad n_0'' := \begin{cases} n_0 - 1, & \text{если } n_0 \text{ четное;} \\ n_0, & \text{если } n_0 \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Обозначим через $n \equiv n(n_0)$ число точек $p_j = (p_j^{(1)}, p_j^{(2)}, p_j^{(3)}) \in \mathbf{T}^3$, для которых

$$p_j^{(s)} \in \left\{ 0, \pm\frac{2}{n_0}\pi; \pm\frac{4}{n_0}\pi; \dots ; \pm\frac{n_0'}{n_0}\pi \right\}, \quad s = 1, 2, 3,$$

причем $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$.

Через $k \equiv k(n_0)$ обозначим число точек $q_j = (q_j^{(1)}, q_j^{(2)}, q_j^{(3)}) \in \mathbf{T}^3$, для которых

$$q_j^{(s)} \in \left\{ \pm\frac{1}{n_0}\pi; \pm\frac{3}{n_0}\pi; \dots ; \pm\frac{n_0''}{n_0}\pi \right\}, \quad s = 1, 2, 3,$$

причем $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$.

Можно легко проверить, что функция $w(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q)$ имеет невырожденный минимум в точках $(p_i, p_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$ и $N = (n_0' + 1)^6$. Видно, что при каждом фиксированном $z \in (-\infty, 0)$ функция $\Delta(\cdot\,; z)$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbf{T}^3$ и

$$\frac{\partial^2 \Delta(p; z)}{\partial p^{(l)} \partial p^{(l)}} = \mu n_0^2 \cos\, n_0 p^{(l)} \int \frac{dt}{(\varepsilon(p) + \varepsilon(t) - z)^2} - \\ - 2\mu n_0^2 (\sin\, n_0 p^{(l)})^2 \int \frac{dt}{(\varepsilon(p) + \varepsilon(t) - z)^3}, \quad l = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\partial^2 \Delta(p; z)}{\partial p^{(s)} \partial p^{(l)}} = -2\mu n_0^2 \sin n_0 p^{(s)} \sin n_0 p^{(l)} \int \frac{dt}{(\varepsilon(p) + \varepsilon(t) - z)^3}, \quad s \neq l, \quad s, l = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 \Delta(p_j\,; E_{\min})}{\partial p^{(l)} \partial p^{(l)}} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Delta(p_j\,; E_{\min})}{\partial p^{(s)} \partial p^{(l)}} = 0, \quad s \neq l, \quad s, l = 1, 2, 3, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial^2 \Delta(q_j\,; E_{\max})}{\partial p^{(l)} \partial p^{(l)}} < 0, \quad \frac{\partial^2 \Delta(q_j\,; E_{\max})}{\partial p^{(s)} \partial p^{(l)}} = 0, \quad s \neq l, \quad s, l = 1, 2, 3, \quad j = \overline{1, k}.$$

Матрица, состоящая из частных производных второго порядка функции $\Delta(\cdot, ; E_{\min})$ положительно определена в точках $p = p_j$, $j = \overline{1, n}$. Следовательно, функция $\Delta(\cdot, ; E_{\min})$ имеет невырожденный минимум в точках $p = p_j$, $j = \overline{1, n}$. Так как $\Delta(p_j, ; E_{\min})$, $j = \overline{1, n}$, существуют числа C_j, $\delta_j > 0$ $(j = \overline{1, n})$ такие, что

$$|\Delta(p; E_{\min})| \geq C_j |p - p_j|^2, \quad p \in U_{\delta_j}(p_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

Полагая $C := \min\limits_{1\leq j\leq n} C_j$, $\delta := \min\limits_{1\leq j\leq n} \delta_j$, получим условие 1.1 с константой $\alpha_j = 2$, $j = \overline{1,n}$. Аналогично можно получить условие 1.2 с константой $\beta_j = 2$, $j = \overline{1,k}$. $\square$

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные и полезные замечания.

Литература

[1] Яфаев Д.Р. *О конечности дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера*, Теор. и матем. физика **25** (2), 185–195 (1975).

[2] Жислин Г.М. *О конечности дискретного спектра операторов энергии квантовых систем многих частиц*, ДАН СССР, **207** (1), 25–28 (1972).

[3] Абдуллаев Ж.И., Лакаев С.Н. *Конечность дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера на решетке*, Теор. и матем. физика **111** (1), 94–108 (1997).

[4] Лакаев С.Н., Муминов М.Э. *Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке*, Теор. и матем. физика **135** (3), 478–503 (2003).

[5] Хейне В., Коэн М., Уэйр Д. *Теория псевдопотенциала* (Мир, М., 1973).

[6] Albeverio S., Lakaev S.N., Djumanova R.Kh. *The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles*, Rep. Math. Phys. **63** (3), 359–380 (2009).

[7] Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. *On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on a lattices*, Russ. J. Math. Phys. **14** (4), 377–387 (2007).

[8] Расулов Т.Х. *Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке*, Теор. и матем. физика **163** (1), 34–44 (2010).

[9] Hall R.L. *Exact solutions for semi-relativistic problems with non-local potentials*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (4), 903–912 (2006).

[10] Chadan K., Kobayashi R. *The absence of positive energy bound states for a class of nonlocal potentials*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (5), 1133–1145 (2005).

[11] Зорич В.А. *Математический анализ.* Ч. 2 (Наука, М., 1984).

Т.Х. Расулов

доцент, кафедра математической физики и анализа,
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан,

e-mail: rth@mail.ru

Р.Т. Мухитдинов

доцент, кафедра математической физики и анализа,
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан

T.Kh. Rasulov and R.T. Mukhitdinov

The finiteness of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice

Abstract. We consider a model operator H associated with a system of three particles on a lattice interacting via nonlocal pair potentials. Under some natural conditions on the parameters specifying this model operator H, we prove the finiteness of its discrete spectrum.

Keywords: discrete spectrum, nonlocal potential, continuity in the uniform operator topology, Hilbert–Schmidt class, Weinberg equation.

T.Kh. Rasulov

Associate Professor, Chair of Mathematical Physics and Analysis,
Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: rth@mail.ru

R.T. Mukhitdinov

Associate Professor, Chair of Mathematical Physics and Analysis,
Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan