ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 517.544

С.Н. КИЯСОВ

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, РАЗРЕШАЕМЫЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

В настоящее время известно сравнительно немного типов сингулярных интегральных уравнений, решения которых имеют замкнутую форму. Это связано прежде всего с тем, что метод решения таких уравнений основан на сведении их к эквивалентной задаче линейного сопряжения, которая, в свою очередь, должна допускать эффективное решение. Однако класс таких задач достаточно узок. В работе рассмотрено сингулярное интегральное уравнение, эквивалентное однородной задаче линейного сопряжения с матрицей-функцией (м.-ф.) специального вида, которое может быть "подправлено" так, что соответствующая ему м.-ф. допускает эффективную факторизацию. Показано, что для "подправляющих множителей" определенного вида удается эффективно факторизовать и м.-ф., соответствующую исходному уравнению, а значит, записать его решение в замкнутой форме.

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+,\ \infty \in D^-)$. В [1] на Γ рассмотрено сингулярное интегральное уравнение

$$K\varphi(t) \equiv a_0(t)\varphi(t) + a_1(t)S[k_1\varphi](t) + \cdots + a_n(t)S[k_n\varphi](t) = f(t), \tag{1}$$

правая часть которого взята в виде $f(t) = 2M_1(t)a_1(t) + \cdots + 2M_n(t)a_n(t)$ ($M_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, — полиномы), через $S[\omega](t)$ обозначен сингулярный оператор, а $a_0(t)$, $a_i(t)$, $k_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, — H_μ-непрерывные функции точек контура. Если при $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$, $a_i(t) \not\equiv a_j(t)$, $k_i(t) \not\equiv k_j(t)$, $t \in \Gamma$, то уравнение (1) при условии его нормальной разрешимости эквивалентно однородной задаче линейного сопряжения с м.-ф.

$$G = G_0 - E, \quad G_0 = \|g_{ij}\| \quad (g_{ij} = 2k_ia_j/(a_0+\Delta), \quad i,j = \overline{1,n}, \quad \Delta = k_1a_1 + \cdots + k_na_n) \tag{2}$$

и названо сингулярным интегральным уравнением с n ядрами. Показано, что союзные уравнения с n ядрами эквивалентны союзным задачам линейного сопряжения, и отмечено, что наличие у коэффициентов уравнения нулей на контуре не влияет на картину его разрешимости. Рассмотрено также уравнение $K_\alpha\varphi(t) = f_\alpha(t)$ вида (1), в котором коэффициенты a_i, k_i, $i = \overline{1,n}$, заменены на a_i/α_i и $k_i\alpha_i$ соответственно, где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, – H_μ-непрерывные функции точек контура. Такое уравнение эквивалентно однородной задаче линейного сопряжения с м.-ф.

$$G_\alpha = \operatorname{diag}\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}G\operatorname{diag}\{\alpha_1^{-1},\ldots,\alpha_n^{-1}\}. \tag{3}$$

Выделим частные случаи уравнения (1), для которых удается не только эффективно факторизовать специальным образом подобранную м.-ф. (3), но и м.-ф. задачи линейного сопряжения для уравнения (1).

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют следующим условиям: для некоторых фиксированных значений индексов* k, j *отношения*

1) $r_i(t) = a_i(t)/a_k(t)$ *или* $r_i(t) = k_j(t)/k_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ $(1 \le k,j \le n)$,

либо отношения

2) $r_i(t) = a_i(t)/a_k(t)$, $i = \overline{1,m}$ $(1 \le k \le m)$, *и* $r_i(t) = k_j(t)/k_i(t)$, $i = \overline{m+1,n}$ $(m+1 \le j \le n)$, *а также выражение*

$$(a_{m+1}k_{m+1} + \cdots + a_nk_n + a_0)/(a_{m+1}k_{m+1} + \cdots + a_nk_n - a_0) \tag{4}$$

или

$$(a_1k_1 + \cdots + a_mk_m + a_0)/(a_1k_1 + \cdots + a_mk_m - a_0) \tag{5}$$

являются рациональными функциями без нулей и полюсов на контуре.

Тогда решение уравнения (1) *может быть записано в замкнутой форме.*

Доказательство. Обозначим через $\varkappa$ индекс уравнения (1). Рассмотрим сначала уравнение $K\varphi = 0$ и случай $\varkappa \ge 0$.

Полагая в случае 1) $\alpha_i(t) \equiv r_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, придем к уравнению с одним ядром $K_\alpha\varphi \equiv a_0\varphi + a_kS[\Delta a_k^{-1}\varphi] = 0$ или к уравнению $K_\alpha\varphi \equiv a_0\varphi + \Delta k_{j1}^{-1}S[k_j\varphi] = 0$, в котором функция $\Delta(t)$ определена в (2).

В случае 2), полагая $\alpha_i(t) \equiv r_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, $\alpha_i(t) \equiv \beta^{-1}(t)r_i(t)$, $i = \overline{m+1,n}$, где $\beta(t)$ — пока неопределенная H_μ-непрерывная функция, не имеющая нулей на Γ, придем к уравнению с двумя ядрами

$$a_0\varphi + a_kS[a_k^{-1}(k_1a_1 + \cdots + k_ma_m)\varphi] + k_j^{-1}(a_{m+1}k_{m+1} + \cdots + a_nk_n)\beta S[k_j\beta^{-1}\varphi] = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим формулу перестановки ([2], с. 63), записав ее в виде

$$S[aS[k\varphi]] = ak\varphi - S[kS[a]\varphi] + S[a]S[k\varphi], \quad a, k \in H_\mu(\Gamma). \tag{7}$$

С использованием (7) легко показать, что уравнение с двумя ядрами

$$A\psi + S[(B - S[A])\psi] + S[A]S[\psi] = 0, \tag{8}$$

в котором A, B — H_μ-непрерывные функции, сводится к уравнению $S[B\psi + AS[\psi]] = 0$ и, значит, эквивалентно уравнению с одним ядром (характеристическому уравнению) $B\psi + AS[\psi] = 0$.

Используя последнее замечание, получим, что уравнение (6) представимо в виде (8) ($\psi = k_j\beta^{-1}\varphi$), если на Γ выполняется условие

$$S[a_0a_k^{-1}k_j^{-1}\beta] = a_k^{-1}k_j^{-1}(a_{m+1}k_{m+1} + \cdots + a_nk_n)\beta. \tag{9}$$

Будем рассматривать условие (9) как уравнение с одним ядром для определения H_μ-непрерывной на Γ функции $\beta(t)$ в случае его нормальной разрешимости. Тогда индекс уравнения λ равен индексу выражения (4), а его решения согласно условию теоремы и при условии $\lambda > 0$, $a_0(t) \ne 0$, $t \in \Gamma$, будут рациональными функциями без нулей на контуре. Пусть $\beta(t)$ — нетривиальное решение уравнения (9). Тогда уравнение (6) оказывается эквивалентным уравнению $L\varphi(t) \equiv \Delta(t)\varphi(t) + a_0(t)k_j^{-1}(t)\beta(t)S[k_j\beta^{-1}\varphi](t) = 0$. Если $\lambda \le 0$, то вместо уравнения (9) рассмотрим уравнение

$$a_k^{-1}k_j^{-1}(k_{m+1}a_{m+1} + \cdots + k_na_n)\beta - S[a_0a_k^{-1}k_j^{-1}\beta] = T_p, \tag{10}$$

где $T_p(z) = d_pz^p + \cdots + d_1z + d_0$ — полином степени $p = |\lambda|$, удовлетворяющий условиям разрешимости этого уравнения ([2], с. 179) и требованию отсутствия у решения уравнения нулей на контуре. Используя (7), (10), приведем уравнение (6) к виду

$$S[(a_k^{-1}\Delta - k_j\beta^{-1}T_p)\varphi] + S[a_0a_k^{-1}k_j^{-1}\beta S[k_j\beta^{-1}\varphi]] + T_pS[k_j\beta^{-1}\varphi] = 0.$$

Применяя к последнему уравнению оператор S и формулу (7), получим эквивалентное уравнение

$$L\varphi = a_k(S[T_pk_j\beta^{-1}\varphi] - T_pS[k_j\beta^{-1}\varphi]) \tag{11}$$

(если $\lambda = 0$, то, полагая $T_0 = c$, где c — соответствующим образом подобранная постоянная, придем к уравнению $L\varphi = 0$). Уравнение (11) является уравнением с вырожденной регулярной частью. Вводя обозначения

$$A_s = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \tau^{s-1}k_j(\tau)\beta^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad s = \overline{1,p}, \tag{12}$$

придем к уравнению

$$L\varphi(t) = a_k(t)\sum_{s=1}^{p} A_s \sum_{l=0}^{p-s} d_{l+s}t^l. \tag{13}$$

Записав общее решение уравнения (13) и требуя выполнения для него условий (12), придем к линейной однородной алгебраической системе $p = |\lambda|$ уравнений для определения $\varkappa + |\lambda|$ постоянных A_s, $s = \overline{1,|\lambda|}$, и коэффициентов c_l, $l = \overline{0,\varkappa-1}$, входящих в общее решение уравнения $L\varphi = 0$. Так как постоянные (12) являются коэффициентами разложения компоненты $Q[k_j\beta^{-1}\varphi]$, $Q = [I-S]/2$ (I — единичный оператор) на бесконечности, то коэффициенты c_l однозначно выражаются через A_s. Поэтому при $|\lambda| \le \varkappa$ ранг матрицы этой системы равен $|\lambda|$ и уравнение имеет $\varkappa$, а в случае $|\lambda| > \varkappa$ имеет $(\varkappa + |\lambda| - r)$ линейно независимых решений, где r ($\varkappa \le r \le |\lambda|$) — ранг матрицы полученной системы.

Случай выполнения условия теоремы для выражения (5) исследуется аналогично.

Таким образом, при указанных значениях α_i, $i = \overline{1,n}$, решение соответствующего уравнения $K_\alpha\varphi = 0$, а также уравнения $K_\alpha\varphi = f_\alpha$ при различных значениях полиномов M_i, $i = \overline{1,n}$, строится в явном виде. Поэтому согласно [1] формулы

$$\varphi_i^+ = P[k_i\alpha_i\varphi] - M_i \ \ (P = [I+S]/2), \ \ \varphi_i^- = Q[k_i\alpha_i\varphi] + M_i, \ \ i = \overline{1,n}, \tag{14}$$

определят систему решений соответствующей однородной задачи линейного сопряжения с м.-ф. (3). Это в свою очередь позволяет получить на Γ представление

$$G_\alpha(t) = G_\alpha^+(t)G_\alpha^-(t), \tag{15}$$

в котором $\det G_\alpha(z)$ имеет конечное число нулей, а значит, в силу [3] эффективно построить ее факторизацию.

Если $\varkappa < 0$, то, рассматривая союзное уравнение и факторизуя соответствующую м.-ф. $F_\alpha = (G'_\alpha)^{-1}$, где $'$ означает операцию транспонирования, получим факторизацию м.-ф. (3) в этом случае.

Пусть представление (15) — факторизация м.-ф. (3). Тогда во всех рассмотренных случаях м.-ф. (2) представима в виде

$$G = \operatorname{diag}\{R_1,\dots,R_n\}G_\alpha^+G_\alpha^- \operatorname{diag}\{R_1^{-1},\dots,R_n^{-1}\}, \tag{16}$$

где $R_1,\dots,R_n$ — рациональные функции без нулей и полюсов на контуре. Поэтому ее факторизация также может быть построена эффективно, а решение соответствующей задачи линейного сопряжения $\Phi(z) = (\varphi_1(z),\varphi_2(z),\dots,\varphi_n(z))$ с заданной главной частью на бесконечности определит согласно (14) (при $\alpha_i(t) \equiv 1$, $i = \overline{1,n}$) по любой из формул

$$\varphi(t) = (\varphi_1^+(t) + \varphi_1^-(t))/k_1(t) = \cdots = (\varphi_n^+(t) + \varphi_n^-(t))/k_n(t) \tag{17}$$

решение уравнения (1). □

Если у коэффициентов уравнения (1) в рассмотренных случаях допустить нули на контуре (что, как было отмечено выше, не влияет на картину его разрешимости), то "перебрасывая", например, нули коэффициентов a_i к k_i, $i = \overline{1,n}$, придем к задаче линейного сопряжения с м.-ф. (16), решения которой в соответствующем классе функций определят решения задачи линейного сопряжения для исходного уравнения.

Пример. Рассмотрим на $\Gamma : |t| = 1$ уравнение (1) с тремя ядрами

$$\varphi + r_1 S[k_1\varphi] + r_2 S[k_2\varphi] + r_3 S[k_3\varphi] = f, \tag{18}$$

в котором $r_i(t)$ — рациональные функции без нулей и полюсов на контуре, а $k_i(t)$ — H_μ-непрерывные на Γ функции, $i = 1, 2, 3$. Полагая $\alpha_i = r_i$, $i = 1, 2, 3$, придем к уравнению с одним ядром

$$\varphi + S[\Delta\varphi] = f_\alpha, \quad \Delta = k_1 r_1 + k_2 r_2 + k_3 r_3 \tag{19}$$

с правой частью $f_\alpha = 2(M_1 + M_2 + M_3)$, где M_i, $i = 1, 2, 3,$ — полиномы. Обозначив $\Delta\varphi = \omega = \omega^+ - \omega^-$, $\omega^-(\infty) = 0$, придем к краевому условию задачи Римана

$$\omega^+ = [1 - \Delta][1 + \Delta]^{-1}\omega^- + \Delta[1 + \Delta]^{-1} f_\alpha, \tag{20}$$

по решениям которой построим факторизацию м.-ф. (15) и согласно сделанному замечанию — м.-ф. (16), соответствующей исходному уравнению. Поэтому решение уравнения (18) может быть получено в замкнутой форме.

Проведем вычисления для случая $r_1(t) = 1$, $r_2(t) = t$, $r_3(t) = t^2/2$; $k_1(t) = \cos^2 t$, $k_2(t) = \sin^2 t/t$, $k_3 = 1/t$. Отыскивая решения задачи (20) при $f_\alpha(t) \equiv 0$, а также полагая $M_1(t) \equiv 0$, $M_2(t) \equiv 1$, $M_3(t) \equiv 0$ и $M_1(t) \equiv 0$, $M_2(t) \equiv 0$, $M_3(t) \equiv 1$, по формулам (14) построим факторизацию м.-ф.

$$G_\alpha(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin^2 t}{t} - \frac{\cos^2 t}{t+4} & -\frac{4\sin^2 t}{t} & -\frac{4\sin^2 t}{t} \\ \frac{\sin^2 t}{t} - \frac{\sin^2 t}{t+4} & \frac{4\sin^2 t}{t} - 1 & \frac{4\sin^2 t}{t} \\ \frac{2}{t+4} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_\alpha^+(t) G_\alpha^-(t)$$

с устойчивым набором частных индексов $(1, 0, 0)$. Таким образом, соответствующая м.-ф. (2) может быть представлена в виде

$$G(t) = \operatorname{diag}\{1, 1/t, 2/t^2\} G_\alpha^+(t) G_\alpha^-(t) \operatorname{diag}\{1, t, t^2/2\} = G^+(t) G^-(t),$$

где $G^+(t) = \operatorname{diag}\{1, 1/t, 2/t^2\} G_\alpha^+(t)$, $G^-(t) = G_\alpha^-(t) \operatorname{diag}\{1, t, t^2/2\}$. Умножая м.-ф. $G^\pm(t)$ на $t^{\pm 2}$ соответственно, получим представление, в котором определитель м.-ф. $G^+(z)$ обращается в нуль при $z = 0$. Умножая м.-ф. $G^+(t)$ справа на м.-ф.

$$V(t) = \begin{pmatrix} 1 & -4/t & -1/2t - 2/t^2 \\ 0 & 1/t & 0 \\ 0 & 0 & 1/t^2 \end{pmatrix},$$

а м.-ф. $G^-(t)$ — слева на $V^{-1}(t)$, получим нормальное представление $G(t) = G_1^+(t) G_1^-(t)$, $t \in \Gamma$. Наконец, умножая м.-ф. $G_1^-(t)$ слева на м.-ф.

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 + t/4 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2t & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а м.-ф. $G_1^+(t)$ — справа на м.-ф. $W^{-1}(t)$, получим факторизацию м.-ф. $G(t) = G_2^+(t) G_2^-(t)$ с набором частных индексов $(1, 0, 0)$. Таким образом, м.-ф.

$$X(z) = \{G_2^+(z),\ z \in D^+;\ [G_2^-(z)]^{-1},\ z \in D^-\}$$

будет канонической матрицей ([4], с. 31) однородной задачи линейного сопряжения, исчезающее на бесконечности решение которой имеет вид

$$\Phi^+(z) = \left(\frac{(z^2 + 2z)\cos^2 z - 2(z + 4)\sin^2 z}{z(z + 4)}, \frac{(z^2 + 4z + 8)\sin^2 z}{z^2(z + 4)}, \frac{1}{2(z + 4)} \right),$$

$$\Phi^-(z) = \left(\frac{2}{z}, 0, \frac{z + 4}{2z^2} \right).$$

Тогда формулы (17) определяют одно линейно независимое решение соответствующего однородного уравнения $\varphi = (t^2 + 4t + 8)/t(t + 4)$.

Литература

1. Киясов С.Н. *Исследование разрешимости и оценки числа решений одного класса сингулярных интегральных уравнений* // Сиб. матем. журн. – 2000. – № 6. – С. 1357–1362.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Гахов Ф.Д. *Краевая задача Римана для системы n пар функций* // УМН. – 1952. – Т. 7. – № 4. – С. 3–54.
4. Векуа Н.П. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* – М.: Наука, 1970. – 379 с.

Казанский государственный университет

Поступила 27.12.2000