И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 1 (464)

УДК 517.968 : 519.6

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ, М.И. ЗАКИЕВ, И.П. СЕМЕНОВ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Данная работа посвящена полиномиальным проекционным методам решения интегродифференциального уравнения

$$Ax \equiv x'(s) + a(s)x(s) + V(x;s) = y(s), \quad -\infty < s < \infty, \tag{0.1}$$

при периодических краевых условиях

$$x(0) = x(2\pi); \tag{0.2}$$

здесь $a(s) \in C_{2\pi}$ и $y(s) \in L_2(0, 2\pi)$ — известные 2π-периодические функции, $x(t)$ — искомая функция, а V — данный вполне непрерывный (в том числе интегродифференциальный) оператор, в частности,

$$V(x;s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x'(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(s,\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}x(\sigma)d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(s,\sigma)\frac{\ln^m|\sin\frac{\sigma-s}{2}|}{|\sin\frac{\sigma-s}{2}|^\alpha}x(\sigma)d\sigma,$$

где $h(s,\sigma) \in L_2([0,2\pi]^2)$, $g(s,\sigma) \in H([0,2\pi]^2)$, $r(s,\sigma) \in C([0,2\pi]^2)$, $m+1 \in \mathbb{N}, 0 \le \alpha < 1$.

Отметим, что краевая задача (0.1)–(0.2) встречается в ряде прикладных задач (напр., [1]–[4]). Поскольку она точно не решается, то для приложений большое значение имеет разработка приближенных методов ее решения с соответствующим теоретическим обоснованием. Ниже, как в работах [1], [3]–[5], краевая задача (0.1)–(0.2) решается общим проекционным методом, порождаемым как ограниченными, так и неограниченными в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ полиномиальными проекционными операторами, а также рассматриваются его конкретные реализации. Доказывается также оптимальность исследуемых методов.

1. Вычислительные схемы

Пусть $Y = L_2 = L_2(0, 2\pi)$ – пространство квадратично-суммируемых по Лебегу в $(0, 2\pi)$ функций с обычными скалярным произведением и нормой соответственно

$$(f,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\varphi(s)ds \qquad (f,\varphi \in L_2),$$

$$\|f\|_2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(s)|^2 ds\right\}^{1/2} \equiv \|f\|_{L_2} \qquad (f \in L_2).$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n = \{P_n\}$ множество всех $N = N(n)$-мерных линейных полиномиальных проекционных операторов в пространстве L_2, где $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\mathcal{P}_n^{(1)} = \{P_n \in \mathcal{P}_n : \|P_n\|_{L_2 \to L_2} = O(1),\ n \to \infty\},$$
$$\mathcal{P}_n^{(2)} = \{P_n \in \mathcal{P}_n : \|P_n\|_{L_2 \to L_2} = \infty,\ \ \|P_n\|_{C_{2\pi} \to L_2} = O(1),\ n \to \infty\},$$

где $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычной нормой

$$\|f\|_{C_{2\pi}} = \max_s |f(s)| \equiv \|f\|_\infty \quad (f \in C_{2\pi}).$$

Приближенное решение задачи (0.1)–(0.2) будем искать в виде тригонометрического полинома в комплексной форме

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks}, \quad \alpha_{-k} = \overline{\alpha_k}, \ \ N = 2n+1, \tag{1.1}$$

который будем определять как решение уравнения

$$A_n x_n \equiv P_n A x_n = P_n y \quad (P_n \in \mathcal{P}_n). \tag{1.2}$$

Очевидно, что это уравнение эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка $N = 2n+1$ относительно $N = 2n+1$ неизвестных коэффициентов многочлена (1.1).

Отметим, что при каждом конкретном способе выбора оператора $P_n \in \mathcal{P}_n$ получаем конкретный полиномиальный проекционный метод решения задачи (0.1)–(0.2). Например, если $P_n \equiv \Phi_n$ есть оператор Фурье n-го порядка по тригонометрической системе функций

$$\Phi_n(f;s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{iks}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks} ds, \ \ f \in L_2, \tag{1.3}$$

то имеем метод редукции (Галёркина) с СЛАУ

$$ir\alpha_r + \sum_{k=-n}^{n} \{c_{r-k}(a) + b_{rk}\}\, \alpha_k = c_r(y), \quad r = \overline{-n,n}, \tag{1.4}$$

где

$$b_{rk} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(e^{iks}; s) e^{-irs} ds;$$

если P_n есть оператор Лагранжа

$$\mathcal{L}_n(f;s) = \sum_{k=0}^{2n} f(s_k) t_k(s), \quad f \in C_{2\pi}, \tag{1.5}$$

а $t_k(s)$ — фундаментальные тригонометрические полиномы по системе из $2n+1$ попарно неэквивалентных узлов $s_0, s_1, \ldots, s_{2n}$, то имеем метод коллокации решения задачи (0.1)–(0.2) с СЛАУ вида

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \{ik + a(s_r)\} e^{iks_r} + \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k V(e^{iks}; s_r) = y(s_r), \quad r = \overline{0,2n}. \tag{1.6}$$

Если же P_n — оператор интерполирования по заданным функционалам

$$f_k = \frac{1}{s_{k+1} - s_k}\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(s) ds, \quad k = \overline{0,2n}, \quad f \in L_2, \ \ s_{2n+1} = s_0 + 2\pi, \tag{1.7}$$

то получим метод подобластей решения задачи (0.1)–(0.2) с системой аппроксимирующих уравнений вида

$$\sum_{k=-n}^{n} c_{rk}\alpha_k = y_r, \quad r = \overline{0, 2n}, \tag{1.8}$$

где

$$c_{rk} = \int_{s_r}^{s_{r+1}} A(e^{iks}; s)ds, \quad y_r = \int_{s_r}^{s_{r+1}} y(s)ds.$$

Поэтому подлежащий исследованию метод (1.1)–(1.2) является *общим* полиномиальным проекционным методом решения краевой задачи (0.1)–(0.2).

2. Основные результаты

Пусть $X = W_2^1 = W_2^1(0, 2\pi)$ — соболевское пространство 2π–периодических функций с нормой

$$\|x(s)\|_{W_2^1} = \|x(s)\|_{L_2} + \left\|\frac{d}{ds}x(s)\right\|_{L_2} \quad (x \in W_2^1).$$

Обозначим через $E_n(\varphi)_{L_2} = E_n(\varphi)_2$ наилучшее среднеквадратическое приближение функции $\varphi \in L_2$ тригонометрическими полиномами степени не выше n $(n+1 \in \mathbb{N})$. Через $E_n(\varphi)_C = E_n(\varphi)_\infty$ будем обозначать наилучшее равномерное приближение функции $\varphi \in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами степени не выше n $(n+1 \in \mathbb{N})$. Дальше через $\mathbb{H}_n^T$ будем обозначать множество всех тригонометрических полиномов степени не выше n $(n = 0, 1, \dots)$.

Для вычислительной схемы (0.1)–(0.2), (1.1)–(1.2) справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$, функции $a(s), y(s) \in L_2$, а $V : W_2^1 \to L_2$ — вполне непрерывный оператор. Если краевая задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение $x^*(s) \in W_2^1$ при любой правой части $y(s) \in L_2$, то при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого, уравнение* (1.2) *общего проекционного метода также имеет единственное решение*

$$x_n^*(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^* e^{iks} \in \mathbb{H}_n^T. \tag{1.1*}$$

Последовательность приближенных решений (1.1*) *при $n \to \infty$ сходится к точному решению $x^*(s)$ в пространстве W_2^1 со скоростью*

$$\|x^*(s) - x_n^*(s)\|_{W_2^1} = O\left\{E_n\left(\frac{d}{ds}x^*(s)\right)_{L_2}\right\}. \tag{2.1}$$

Следствие. Если функции $a(s), y(s)$ и оператор V уравнения (0.1) таковы, что

$$x^*(s) \in W^{r+1}L_2(0, 2\pi), \quad r \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

то в условиях теоремы 1 проекционный метод сходится со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^1} = O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{2.3}$$

Теорема 2. *Пусть $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$, функции $a(s), y(s) \in C_{2\pi}$, а $V : W_2^1 \to C_{2\pi}$ — вполне непрерывный оператор. Если краевая задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение $x^*(s) \in W_2^1$ при любой правой части $y(s) \in L_2$, то при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого, уравнение* (1.2) *общего проекционного метода также имеет единственное решение $x_n^*(s) \in \mathbb{H}_n^T$. Последовательность приближенных решений* (1.1*) *при $n \to \infty$ сходится к точному решению $x^*(s)$ в пространстве W_2^1 со скоростью*

$$\|x^*(s) - x_n^*(s)\|_{W_2^1} = O\left\{E_n\left(\frac{d}{ds}x^*(s)\right)_C\right\}. \tag{2.4}$$

Следствие. Если уравнение (0.1) таково, что его решение

$$x^*(s) \in W^{r+1}(0,2\pi), \quad r \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

то в условиях теоремы 2 общий проекционный метод сходится со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^1} = O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{2.6}$$

Пусть теперь $Y = C_{2\pi}$, а $X = C_{2\pi}^1$ — пространство непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций с нормой

$$\|x\|_{C_{2\pi}^1} = \|x(s)\|_{C_{2\pi}} + \|x'(s)\|_{C_{2\pi}}, \quad x \in C_{2\pi}^1.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n^{(3)} = \{P_n : Y \to \mathbb{H}_n^T \subset Y\}$ множество всех линейных полиномиальных проекционных операторов ранга $2n+1 \in \mathbb{N}$, а через $\omega(\varphi;\delta)_\infty$ — обычный (т. е. в $C_{2\pi}$) модуль непрерывности функции $\varphi \in C_{2\pi}$ с шагом $\delta > 0$. Положим $\|P_n\|_\infty = \|P_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Пусть $X = C_{2\pi}^1, Y = C_{2\pi}$, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(3)}$, а функции $a(s), y(s)$ и оператор $V : C_{2\pi}^1 \to C_{2\pi}$ таковы, что*

$$\lambda_n = \left\{\omega\left(a;\frac{1}{n}\right)_\infty + \omega\left(y;\frac{1}{n}\right)_\infty + \frac{1}{n}\right\}\|P_n\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.7}$$

$$\mu_n = \|P_n\|_\infty \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} E_n(Vx)_\infty \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.8}$$

Если задача (0.1)–(0.2) имеет единственное решение $x^* \in C_{2\pi}^1$ при любой правой части $y \in C_{2\pi}$, то при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого, уравнение (1.2) также имеет единственное решение $x_n^*(s) \in \mathbb{H}_n^T$. Последовательность приближенных решений (1.1) сходится к точному решению в пространстве $C_{2\pi}^1$ со скоростью, определяемой соотношениями*

$$\|x^*(s) - x_n^*(s)\|_{C_{2\pi}^1} = O\left\{\|P_n\|_\infty E_n\left(\frac{d}{ds}x^*(s)\right)_C\right\} = O(\lambda_n + \mu_n). \tag{2.9}$$

Теперь рассмотрим хотя бы вкратце оптимизацию приближенных методов решения краевой задачи (0.1)–(0.2), пользуясь при этом определениями и некоторыми результатами работ [3], [6]. В случае фиксированного уравнения (0.1) имеет место

Теорема 4. *В условиях теоремы 1 справедливы следующие утверждения:*

а) *проекционный метод (1.1)–(1.2) с оператором $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ оптимален по порядку среди всевозможных прямых и проекционных методов решения задачи (0.1)–(0.2), позволяющих построить приближенное решение в виде полинома (1.1);*

б) *метод Галёркина (1.1)–(1.4) асимптотически оптимален среди всевозможных полиномиальных прямых и проекционных методов решения задачи (0.1)–(0.2).*

Теорема 5. *В условиях теоремы 1 метод подобластей (1.1), (1.2), (1.7), (1.8) с узлами*

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{0, 2n+1}, \tag{2.10}$$

и метод наименьших квадратов с СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (Ae^{iks}, Ae^{ijs}) = (y, Ae^{ijs}), \quad j = \overline{-n, n}, \tag{2.11}$$

оптимальны по порядку в смысле теоремы 4.

Замечание 1. Поскольку $X_n = X \cap \mathbb{H}_n^T$ и $Y_n = Y \cap \mathbb{H}_n^T$ являются экстремальными подпространствами в использованных выше пространствах X и Y, то утверждения теорем 4 и 5 остаются справедливыми и для прямых и проекционных методов решения *класса* однозначно разрешимых краевых задач (0.1)–(0.2), у которых класс $X^* = \{x^*\} \subset X$ искомых элементов образует центрально-симметрический компакт в пространстве X. Поскольку в силу приведенных выше теорем и соответствующих результатов глав II и IV из [3] в обосновании этих утверждений не возникает принципиальных трудностей, то на этом вопросе более подробно останавливаться не будем, а приведем лишь один результат.

Теорема 6. *В условиях теоремы* 3 *и замечания* 1 *справедливы соотношения*

$$U_N(\mathcal{E}) \asymp \sup_{x^* \in X^*} \|x^{*\prime} - \Phi_n x^{*\prime}\|_\infty,$$

и оптимальными по порядку являются:

а) *метод Галёркина* (1.1)–(1.4);

б) *метод коллокации* (1.1), (1.2), (1.5), (1.6) *с узлами*

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{0, 2n};$$

в) *метод подобластей* (1.1), (1.2), (1.7), (1.8) *с узлами* (2.10).

3. Доказательство теорем

Приведем доказательства сформулированных выше теорем 1–6. При этом будем пользоваться результатами работ [1], [3]–[9].

Доказательство теоремы 1. Положим $X = W_2^1, Y = L_2$ и задачу (0.1)–(0.2) будем рассматривать как линейное операторное уравнение вида

$$Ax \equiv Bx + Vx = y \quad (x \in X, \ \ y \in Y), \tag{3.1}$$

где $Bx = x' + ax$. В силу условий теоремы оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|A\|_{X \to Y} \le d_0, \quad \|A^{-1}\|_{Y \to X} \le d_1, \tag{3.2}$$

где d_k — положительные постоянные.

Положим $X_n = \mathbb{H}_n^T \cap X$, $Y_n = \mathbb{H}_n^T \cap Y$ и соотношения (1.1)–(1.2) будем рассматривать как линейное операторное уравнение вида

$$A_n x_n \equiv P_n B x_n + P_n V x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, \ \ P_n y \in Y_n, \ \ P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}). \tag{3.3}$$

Ясно, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$

$$\|P_n\|_{L_2 \to L_2} \equiv \|P_n\|_2 \le d_2 < \infty, \quad \|A_n\|_{X_n \to Y_n} \le \|P_n\|_{Y \to Yn} \|A\|_{X_n \to Y} \le d_2 d_0, \tag{3.4}$$

где постоянная d_2 не зависит от n.

Из (3.1), (3.3) для любых $x_n \in X_n, P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ последовательно находим

$$\begin{aligned} \|Ax_n - A_n x_n\| &= \|Bx_n + Vx_n - P_n(Bx_n + Vx_n)\| \le \\ &\le \|Bx_n - P_n Bx_n\| + \|Vx_n - P_n V x_n\| = \|ax_n - P_n(ax_n)\| + \|Vx_n - P_n V x_n\|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ясно, что для любого $x_n \in X_n$ и $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ имеем

$$\|Vx_n - P_n V x_n\| \le 2\|P_n\|_2 E_n(Vx_n)_2 \le 2d_2 \|x_n\| \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \le 1}} E_n(Vx)_2 = 2d_2 \|x_n\| \sup_{z \in VS} E_n(z)_2,$$

$$\|A_0 x_n - P_n A_0 x_n\| = \|ax_n - P_n(ax_n)\| \le 2d_2 \|x_n\| \sup_{x \in S} E_n(ax)_2,$$

где $S = S(0,1)$ — единичный шар с центром в нулевой точке пространства X. Поэтому

$$\beta_n \equiv \|V - P_n V\|_{X_n \to Y} \le 2d_2 \sup_{z \in VS} E_n(z)_2, \tag{3.6}$$

$$\gamma_n \equiv \|A_0 - P_n A_0\|_{X_n \to Y} \le 2d_2 \sup_{z \in A_0 S} E_n(z)_2. \tag{3.7}$$

Поскольку операторы V, $A_0 : X \to Y$ являются вполне непрерывными, то множества VS и $A_0 S$ будут компактными в пространстве Y. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in VS} E_n(z)_2 = \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in A_0 S} E_n(z)_2 = 0. \tag{3.8}$$

Из (3.4)–(3.9) для любых $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ получаем

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \le \beta_n + \gamma_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

С другой стороны, для правых частей уравнений (3.1) и (3.3) в силу сказанного выше имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_2 \le 2\|P_n\|_2 E_n(y)_2 \le 2d_2 E_n(y)_2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.10}$$

В силу соотношений (3.2)–(3.10) для уравнений (3.1) и (3.3) выполнены все условия теоремы 7 ([3], гл. I), отсюда следует, что операторы $A_n : X_n \to Y_n$ $(n \ge n_0)$ непрерывно обратимы, причем

$$\|A_n^{-1}\| \le d_3 = \text{const} < \infty \quad (n \ge n_0), \tag{3.11}$$

$$\|x^* - x_n^*\| = \|A^{-1}y - A_n^{-1}P_n y\| = O(\varepsilon_n + \delta_n) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.12}$$

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\|x^* - \widetilde{x}_n\|) \quad \forall \widetilde{x}_n \in X_n, \;\; n \to \infty. \tag{3.13}$$

Выберем элемент $\widetilde{x}_n$ по формуле

$$\widetilde{x}_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(x^*) e^{iks} \equiv \Phi_n(x^*; s), \quad c_k(x^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^*(\sigma) e^{-ik\sigma} d\sigma. \tag{3.14}$$

Поскольку $\frac{d}{ds}\Phi_n(x^*(\sigma); s) = \Phi_n\left(\frac{d}{d\sigma}x^*(\sigma); s\right)$, то из (3.11)–(3.14) находим оценку (2.1)

$$\|x^* - x_n^*\| \le d_4 \|x^* - \widetilde{x}_n\|_X = d_4[\|x^* - \Phi_n x^*\|_Y + \|x^{*\prime} - \Phi_n x^{*\prime}\|_Y] =$$

$$= d_4[E_n(x^*)_2 + +E_n(x^{*\prime})_2] \le d_4\left[\frac{E_n(x^{*\prime})_2}{n} + E_n(x^{*\prime})_2\right] \le 2d_4 E_n(x^{*\prime})_2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Если выполнено условие (2.2), то из (2.1) и теоремы Джексона [7] в пространстве L_2 находим оценку (2.3).

Доказательство теоремы 2 ведем в основном по схеме доказательства теоремы 1. Однако здесь в силу неограниченности операторов $P_n : L_2 \to L_2$ $(P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)})$ вместо величин d_2, β_n, γ_n, ε_n, δ_n и формул (3.8) будем иметь для $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$ соотношения соответственно

$$\|P_n\|_{C_{2\pi} \to L_2} \le \widetilde{d}_2 = \text{const} < \infty, \tag{3.15}$$

$$\widetilde{\beta}_n \equiv \|V - P_n V\|_{X_n \to Y} \le 2\widetilde{d}_2 \sup_{z \in VS} E_n(z)_\infty, \tag{3.16}$$

$$\widetilde{\gamma}_n \equiv \|A_0 - P_n A_0\|_{X_n \to Y} \le 2\widetilde{d}_2 \sup_{z \in A_0 S} E_n(z)_\infty, \tag{3.17}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \le \widetilde{\beta}_n + \widetilde{\gamma}_n \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.18}$$

$$\widetilde{\delta}_n \equiv \|y - P_n y\|_Y \le 2\|P_n\|_{C_{2\pi} \to L_2} E_n(y)_\infty \le 2\widetilde{d}_2 E_n(y)_\infty \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in VS} E_n(z)_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in A_0 S} E_n(z)_\infty = 0. \tag{3.20}$$

Заметим, что соотношения (3.20) имеют место в силу компактности множеств VS и $A_0 S$ в пространстве $C_{2\pi}$.

В силу соотношений (3.2), (3.15)–(3.20) для уравнений (3.1) и (3.3) с $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$ выполнены все условия теоремы 7 из ([3], гл. I), откуда в свою очередь следуют соотношения

$$\|A_n^{-1}\|_{Y_n\to X_n} \le \widetilde{d}_3 = \text{const} < \infty, \quad n \ge n_0, \tag{3.21}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O(\widetilde{\varepsilon}_n + \widetilde{\delta}_n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.22}$$

Для получения оценок (2.4) и (2.6) воспользуемся теоремой 14 из ([3], гл. I). С этой целью уравнения (3.1) и (3.3) представим в эквивалентном виде соответственно

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, \ \ y \in Y), \tag{3.23}$$

$$A_n x_n \equiv Gx_n + P_n T x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, \ \ P_n y \in Y_n, \ \ P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}), \tag{3.24}$$

где $Gx \equiv x' + x$, $Tx = (a-1)x + Vx$. Тогда легко показать, что

а) оператор $G : X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|G\|_{X\to Y} \le 1, \quad \|G^{-1}\|_{Y\to X} \le 2; \tag{3.25}$$

б) оператор $T : W_2^1 \to C_{2\pi}$ вполне непрерывен.

Поэтому из (3.21)–(3.25) и (3.2) последовательно находим

$$\begin{aligned}
\|x^* - x_n^*\|_X &= \|(E - A_n^{-1}P_nT)(x^* - G^{-1}P_nGx^*)\|_X \le \\
&\le \|E - A_n^{-1}P_nT\|_{X\to X}\|x^* - G^{-1}P_nGx^*\|_X \le \\
&\le (1 + \|A_n^{-1}\|_{Y_n\to X_n}\|P_n\|_{C_{2\pi}\to L_2}\|T\|_{W_2^1\to C_{2\pi}})\|x^* - G^{-1}P_nGx^*\|_X \le \\
&\le (1 + \widetilde{d}_1\widetilde{d}_3 d_5)\|x^* - G^{-1}P_nGx^*\|_X \le (1 + \widetilde{d}_1\widetilde{d}_3 d_5)\|G^{-1}\|_{Y\to X}\|Gx^* - P_nGx^*\|_Y \le \\
&\le 2(1 + \widetilde{d}_1\widetilde{d}_3 d_5)2\widetilde{d}_2 E_n(Gx^*)_\infty \equiv d_6 E_n(Gx^*)_\infty = O\{E_n(Gx^*)_\infty\}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
E_n(Gx^*)_\infty &= E_n(x^{*\prime} + x^*)_\infty \le E_n(x^{*\prime})_\infty + E_n(x^*)_\infty \le \\
&\le E_n(x^{*\prime})_\infty + \frac{\pi}{2(n+1)}E_n(x^{*\prime})_\infty \le 2E_n(x^{*\prime})_\infty, \quad n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

то из (3.26) следует оценка (2.4).

Если выполнено условие (2.5), то из оценки (2.4) и теоремы Джексона [7] в пространстве $C_{2\pi}$ получаем оценку (2.6).

Для завершения доказательства теорем 1 и 2 остается доказать

а) компактность оператора $A_0 : W_2^1 \to L_2$ в условиях теоремы 1,

б) компактность операторов $A_0, T : W_2^1 \to C_{2\pi}$ в условиях теоремы 2,

а также справедливость неравенств (3.25).

Для любого $x \in W_2^1$ и $a \in L_2$ находим

$$\|A_0x\|_2 = \|a(s)x(s)\|_2 \le \|a\|_\infty\|x\|_2 \le \|a\|_\infty\|x\|_X, \tag{3.27}$$

$$\omega(A_0x;\delta)_2 = \omega(ax;\delta)_2 \le \omega(a;\delta)_2\|x\|_\infty + \|a\|_2\omega(x;\delta)_\infty, \quad 0 < \delta \le \pi, \tag{3.28}$$

где $\omega(\varphi;\delta)_2$ и $\omega(\psi;\delta)_\infty$ — модули непрерывности функций $\varphi \in L_2$ и $\psi \in C_{2\pi}$ в пространствах соответственно $L_2(0,2\pi)$ и $C_{2\pi}$. Оценим сверху $\|x\|_\infty$ и $\omega(x;\delta)_\infty$ для любой функции $x \in W_2^1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \Big\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{iks}\Big\|_\infty \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(x)| = |c_0(x)| + \sum_{|k|=1}^{\infty}\left|\frac{c_k(x')}{ik}\right| \le \\
&\le \|x\|_2 + \sqrt{\sum_{|k|=1}^{\infty}|c_k(x')|^2}\sqrt{\sum_{|k|=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}} = \|x\|_2 + \|x'\|_2\frac{\pi}{\sqrt{3}} \le \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|x\|_{W_2^1}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Поскольку для любой функции $x \in W_2^1$

$$x(s) = x(0) + \int_0^s x'(\sigma)d\sigma, \quad -\infty < s < \infty,$$

то для любых $s', s'' \in [0, 2\pi]$, $0 < s' - s'' \le \delta$, имеем

$$|x(s') - x(s'')| = \left| \int_{s''}^{s'} x'(\sigma)d\sigma \right| \le \sqrt{s' - s''} \sqrt{\int_0^{2\pi} |x'(\sigma)|^2 d\sigma} \le$$
$$\le \sqrt{2\pi\delta}\, \|x'\|_2 \le \sqrt{2\pi\delta}\, \|x\|_X, \quad \omega(x;\delta)_\infty \le \sqrt{2\pi\delta}\, \|x\|_{W_2^1}. \quad (3.30)$$

Из (3.28)–(3.30) следует неравенство

$$\omega(A_0 x; \delta)_2 \le \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{3}} \omega(a;\delta)_2 + \sqrt{2\pi\delta}\, \|a\|_2 \right\} \|x\|_{W_2^1}. \quad (3.31)$$

Из соотношений (3.27), (3.31) следует компактность оператора $A_0 : W_2^1 \to L_2$ в условиях теоремы 1.

Теперь докажем компактность операторов $A_0, T : W_2^1 \to C_{2\pi}$ в условиях теоремы 2. В силу компактности $V : W_2^1 \to C_{2\pi}$ это достаточно сделать для оператора A_0. Для $x \in W_2^1$ и $a \in C_{2\pi}$ в силу (3.29) и (3.30) находим

$$\|A_0 x\|_\infty = \|ax\|_\infty \le \|a\|_\infty \|x\|_\infty \le \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|a\|_\infty \|x\|_{W_2^1}; \quad (3.32)$$

$$\omega(A_0 x;\delta)_\infty = \omega(ax;\delta)_\infty \le \omega(a;\delta)_\infty \|x\|_\infty + \|a\|_\infty \omega(x;\delta)_\infty \le$$
$$\le \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{3}} \omega(a;\delta)_\infty + \sqrt{2\pi\delta}\, \|a\|_\infty \right\} \|x\|_{W_2^1}. \quad (3.33)$$

Из соотношений (3.32), (3.33) и известной теоремы Арцела [8] следует компактность оператора $A_0 : W_2^1 \to C_{2\pi}$, а следовательно, и оператора $T : W_2^1 \to C_{2\pi}$.

Первое из неравенств (3.25) очевидно; для доказательства второго из них рассмотрим вспомогательное уравнение

$$Gx \equiv x'(s) + x(s) = y(s), \quad x \in X,\ y \in L_2. \quad (3.34)$$

Полагая

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{iks}, \quad y(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks},$$
$$x'(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik c_k(x) e^{iks} \quad (x \in W_2^1,\ \ y \in L_2),$$

из (3.34) находим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + ik) c_k(x) e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks}, \quad c_k(x) = \frac{c_k(y)}{1 + ik}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Поэтому оператор $G : W_2^1 \to L_2$ обратим и

$$G^{-1}(y;s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(y)}{1 + ik} e^{iks}, \quad y \in L_2. \quad (3.35)$$

Отсюда с помощью равенства Парсеваля для $y \in L_2$ находим

$$\|G^{-1}y\|_{W_2^1} = \|G^{-1}y\|_{L_2} + \left\|\frac{d}{ds}G^{-1}y\right\|_{L_2} = \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k(y)}{1+ik}e^{iks}\right\|_{L_2} +$$
$$+\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{ik}{1+ik}c_k(y)e^{iks}\right\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{|c_k(y)|^2}{1+k^2}} + \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k^2}{1+k^2}|c_k(y)|^2} \leq$$
$$\leq 2\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(y)|^2\right\}^{1/2} = 2\|y\|_{L_2}. \quad (3.36)$$

Из (3.36) следует требуемое неравенство $\|G^{-1}\|_{Y\to X} \leq 2$.

Доказательство теоремы 3. Положим $X_n = \mathbb{H}_n^T \cap C_{2\pi}^1$ и $Y = \mathbb{H}_n^T \cap C_{2\pi}$, $\dim X_n = \dim Y_n < \infty$. Тогда уравнения (3.1) и (3.3) принимают вид соответственно

$$Ax \equiv Bx + Vx = y \quad (x \in C_{2\pi}^1, \quad y \in C_{2\pi}), \quad (3.37)$$

$$A_n x_n \equiv P_n B x_n + P_n V x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, \quad P_n y \in Y_n, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(3)}). \quad (3.38)$$

Из (3.37), (3.38) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_\infty = \|[x_n - P_n(ax_n)] + (Vx_n - P_n V x_n)\|_\infty \leq$$
$$\leq 2\|P_n\|_\infty\{E_n(ax_n)_\infty + E_n(Vx_n)_\infty\}. \quad (3.39)$$

Из (3.39) и теоремы Джексона [7] в пространстве $C_{2\pi}$ получаем

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_{C_{2\pi}} \leq 2\|P_n\|_\infty \|x_n\|_{C_{2\pi}^1}\left\{\omega\left(a;\frac{1}{n}\right)_\infty + \frac{1}{n}\|a\|_\infty\right\}.$$

Отсюда и из (2.7), (2.8) следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n\to Y} \leq d_7\|P_n\|_\infty\left\{\omega\left(a;\frac{1}{n}\right)_\infty + \frac{1}{n}\|a\|_\infty + \sup_{\substack{x\in C_{2\pi}^1\\ \|x\|\leq 1}} E_n(Vx)_\infty\right\} \to 0, \quad n\to\infty. \quad (3.40)$$

Аналогично для правых частей уравнений (3.37) и (3.38) в силу (2.7) при $n \to \infty$ находим

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_\infty \leq 2\|P_n\|_\infty E_n(y)_\infty \leq 6\|P_n\|_\infty \omega(y; 1/n)_\infty \to 0. \quad (3.41)$$

Поскольку $\|P_n\|_\infty \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то в силу (2.8) оператор $V : C_{2\pi}^1 \to C_{2\pi}$ является вполне непрерывным. Тогда в условиях теоремы оператор $A : C_{2\pi}^1 \to C_{2\pi}$ непрерывно обратим. Поэтому в силу соотношений (3.40) и (3.41) мы находимся в условиях применимости теорем 6 и 7 из ([3], гл. I) к уравнениям (3.37) и (3.38), откуда легко выводится требуемое утверждение, в том числе оценка (2.9).

Доказательство теоремы 4. Как уже указывали перед формулировкой теоремы 4, ниже будем пользоваться обозначениями и некоторыми результатами работы [6] в частных случаях. Пусть $\mathcal{E}_n = \{e_n\}$ — множество всех приближенных методов решения фиксированной задачи (0.1)–(0.2), позволяющих построить ее приближенное решение в виде полинома (1.1). Тогда в силу $x_n(s)$ и $x_n^*(s) \in \mathbb{H}_n^T$ имеем

$$E_n(x^{*\prime})_2 \leq E_n(x^*)_{W_2^1} \leq V_N \leq U_N \leq \|x^*(s) - x_n^*(s)\|, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}, \quad (3.42)$$

где $N = 2n+1$. Из соотношений (3.42) и (2.1) для любых $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ находим

$$E_n(x^{*\prime})_{L_2} \leq V_N \leq U_N \leq \|x^* - x_n^*\|_{W_2^1} = O\{E_n(x^{*\prime})_{L_2}\}. \quad (3.43)$$

Из соотношений (3.43) следует утверждение а) теоремы 4.

Докажем утверждение б). С этой целью будем пользоваться уравнениями (3.23) и (3.24), эквивалентными уравнениям соответственно (3.1) и (3.3). Кроме того, в пространстве W_2^1 введем скалярное произведение и норму с помощью соотношений соответственно

$$(f,g)_{W_2^1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)g(s)ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(s)g'(s)ds \quad (f,g\in W_2^1), \tag{3.44}$$

$$\|f\|_{W_2^1} = \sqrt{\|f\|_{L_2}^2 + \|f'\|_{L_2}^2} \quad (f\in W_2^1). \tag{3.45}$$

Норма (3.45) эквивалентна норме, введенной в начале § 2. Поэтому для этого случая утверждения теорем 1–3 остаются в силе. Покажем, что теперь вместо (3.25) имеем соотношения

$$\|G\|_{W_2^1\to L_2} = \|G^{-1}\|_{L_2\to W_2^1} = 1, \tag{3.46}$$

т. е. $G : W_2^1 \to L_2$ есть линейная изометрия.

Поскольку $(x', x) = 0$ для $x \in W_2^1$, то в силу (3.44), (3.45) имеем

$$\|Gx\|_{L_2}^2 = \|x'(s)+x(s)\|_{L_2}^2 = (x'+x, x'+x) = \|x'\|_{L_2}^2 + \|x\|_{L_2}^2 = \|x\|_{W_2^1}^2, \quad x\in W_2^1.$$

Поэтому $\|G\|_{X\to Y} = 1$. С другой стороны, из (3.35) с помощью равенства Парсеваля находим

$$\|G^{-1}y\|_{W_2^1}^2 = \|G^{-1}y\|_{L_2}^2 + \left\|\frac{d}{ds}G^{-1}y\right\|_{L_2}^2 = \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k(y)}{1+ik}e^{iks}\right\|_{L_2}^2 + \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{ik}{1+ik}c_k(y)e^{iks}\right\|_{L_2}^2 =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{|c_k(y)|^2}{1+k^2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k^2}{1+k^2}|c_k(y)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(y)|^2 = \|y\|_{L_2}^2 \quad (y\in L_2).$$

Поэтому $\|G^{-1}y\|_{W_2^1} = \|y\|_{L_2}$ для $y \in L_2$. Следовательно, $\|G^{-1}\|_{L_2\to W_2^1} = 1$, т. е. соотношения (3.46) доказаны.

Положим $\varphi = Gx$, $\varphi_n = Gx_n$ ($x \in X$, $x_n \in X_n$). Очевидно, $\varphi \in Y$, $\varphi_n \in Y_n$. Тогда уравнения (3.23) и (3.24) с $P_n = \Phi_n$ эквивалентны уравнениям соответственно

$$K\varphi \equiv \varphi + TG^{-1}\varphi = y \quad (\varphi, y\in L_2), \tag{3.47}$$

$$K_n\varphi_n \equiv \varphi_n + \Phi_n TG^{-1}\varphi_n = \Phi_n y \quad (\varphi_n, \Phi_n y\in Y_n), \tag{3.48}$$

где оператор Φ_n определен по формуле (1.3). Этот оператор обладает свойствами

$$\Phi_n^2 = \Phi_n, \quad \Phi_n^* = \Phi_n, \quad \|\Phi_n\|_{L_2\to L_2} = 1, \quad \Phi_n \to E \ \text{ сильно в } \ L_2.$$

Пространства W_2^1 (с нормой (3.45)) и L_2 являются гильбертовыми, оператор $TG^{-1} : L_2 \to L_2$ вполне непрерывен. Поэтому к уравнениям (3.47) и (3.48) применима теорема 16.2 из ([9], гл. 4), согласно которой для их решений $\varphi^* \in L_2$, $\varphi_n^* \in Y_n$ справедлива асимптотическая оценка

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \sim \|\varphi^* - P_n\varphi^*\|_2 = E_n(\varphi^*)_2, \quad P_n = \Phi_n. \tag{3.49}$$

Из (3.45), (3.46) и (3.49) находим

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^1} = \|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{L_2} \sim \|\varphi^* - P_n\varphi^*\|_{L_2} = \|Gx^* - P_nGx^*\|_{L_2} =$$
$$= \|Gx^* - GP_nx^*\|_{L_2} = \|G(x^* - P_nx^*)\|_{L_2} = \|x^* - P_nx^*\|_{W_2^1} = E_n(x^*)_{W_2^1}. \tag{3.50}$$

Поскольку

$$E_n(x^*)_{W_2^1} \le V_N \le U_N \le \|x^* - x_n^*\|,$$

то из (3.50) для метода Галёркина решения задачи (0.1)–(0.2) находим

$$V_N \sim U_N \sim \|x^* - x_n^*\|_{W_2^1} \sim E_n(x^*)_{W_2^1}. \tag{3.51}$$

Из соотношений (3.51) следует утверждение б) теоремы. Однако для завершения доказательства необходимо показать справедливость использованного в формулах (3.50) тождества

$$\Phi_n G x = G \Phi_n x \quad (x \in X). \tag{3.52}$$

Прежде всего заметим, что оператор Φ_n из (1.3), определенный в пространстве L_2, определен также в пространстве W_2^1. Поэтому для $x \in W_2^1$ последовательно находим

$$G(\Phi_n x; s) = \Phi_n(x; s) + \frac{d}{ds}\Phi_n(x; s) = \Phi_n(x(\sigma); s) + \Phi_n\left(\frac{d}{d\sigma}x(\sigma); s\right) =$$
$$= \Phi_n(x(\sigma) + x'(\sigma); s) = \Phi_n(Gx; s),$$

следовательно, тождество (3.52) установлено.

Теорема 4 доказана полностью.

Доказательство теоремы 5 в случае метода подобластей с узлами (2.10) проводится с помощью теоремы 4 и того факта [6], что

$$P_n^2 = P_n, \quad \|P_n\|_{L_2 \to L_2} \le \pi/2 \ \ (n \in \mathbb{N}), \quad P_n \to E \quad \text{сильно в } \ L_2.$$

Поскольку оператор $A : W_2^1 \to L_2$ непрерывно обратим, то система функций $\{A(e^{ik\sigma}; s)\}_{-\infty}^{\infty}$ является линейно независимой. Поэтому ее определитель Грамма отличен от нуля при любых $n \in \mathbb{N}$, а тогда СЛАУ (2.11) однозначно разрешима при любых $n \in \mathbb{N}$ и любых правых частях. В этом случае известно (напр., [3], с. 27–28), что приближенное решение $\widetilde{x}_n \in X_n$, построенное методом наименьших квадратов (1.1), (2.11) решения задачи (0.1)–(0.2), при $n \to \infty$ сходится в пространстве X со скоростью, определяемой неравенством

$$\|x^* - \widetilde{x}_n\|_{W_2^1} \le \|A\|_{W_2^1 \to L_2} \|A^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} E_n(x^*)_{W_2^1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.53}$$

Из (3.42) и (3.53) получаем соотношения

$$V_N \asymp U_N \asymp \|x^* - \widetilde{x}_n\|_{W_2^1} \asymp E_n(x^*)_{W_2^1}, \quad N = 2n+1,$$

откуда и следует требуемое утверждение в случае метода наименьших квадратов.

Доказательство теоремы 6. Для операторов проектирования $P_n : C_{2\pi} \to \mathbb{H}_n^T \subset C_{2\pi}$, указанных в теореме 6 методов Галёркина, коллокации и подобластей справедливы (напр., [3], [4]) соотношения

$$\|P_n\|_\infty \asymp \ln n, \quad n \to \infty.$$

В силу этого дальше доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 17 из ([3], гл. IV).

Замечание 2. В доказанных выше теоремах 1, 2, 4–6 существенным образом использовано условие: оператор V является вполне непрерывным как оператор из пространства W_1^2 в пространство L_2 или из W_2^1 в $C_{2\pi}$. Это условие может быть ослаблено в том смысле, что указанные теоремы (с небольшими изменениями в доказательствах) остаются справедливыми и в том случае, если оператор V заменить на оператор U,

$$U(x; s) = V(x; s) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} x'(\sigma) \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} d\sigma, \quad x \in W_2^1,$$

где оператор V определен выше, а λ — произвольная вещественная постоянная.

Оператор U не является вполне непрерывным в указанном выше смысле, что связано с тем известным [10] фактом, что оператор Гильберта $J : L_2 \to L_2$, где

$$J(\varphi; s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} d\sigma, \quad \varphi \in L_2,$$

является непрерывным, но не вполне непрерывным, причем $J\mathbb{H}_n^T \subset \mathbb{H}_n^T$.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г., Ахметов С.М. *Прямые методы решения уравнения теории струй* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 7. – С. 1299–1307.
2. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. –С. 251–307.
3. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
4. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
5. Габдулхаев Б.Г. *Полиномиальные аппроксимации по В.К. Дзядыку решений сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 6. – С. 51–62.
6. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 3–18.
7. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функцианальный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
9. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.
10. Michlin S., Prössdorf S. *Singuläre Integraloperatoren.* – Berlin: Academic-Verlag, 1980. – 514 s.

Казанский государственный университет

Поступила
18.09.2000