ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 517.9

Г.А. СВИРИДЮК, А.В. КЕЛЛЕР

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ДИХОТОМИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА[1]

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, оператор L линеен и непрерывен, т.е. $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{A};\mathfrak{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathfrak{F}$ линеен и замкнут с областью определения $\operatorname{dom} M$, плотной в $\mathfrak{A}$. Нас будут интересовать инвариантные подпространства и дихотомии решений линейного операторного уравнения *типа Соболева* [1]

$$L\dot{u} = Mu. \tag{0.1}$$

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{A})$, то уравнение (0.1) тривиально редуцируется к паре эквивалентных ему стандартных уравнений

$$\dot{u} = Su \qquad \dot{f} = Tf,$$

где $S = L^{-1}M : \operatorname{dom} S \to \mathfrak{A}$, $T = ML^{-1} : \operatorname{dom} T \to \mathfrak{F}$ — линейные замкнутые операторы с областями определения $\operatorname{dom} S = \operatorname{dom} M$, $\operatorname{dom} T = L[\operatorname{dom} M]$ плотными в пространствах $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$ соответственно. Если оператор S (или оператор T) к тому же *секториален* ([2], п.1.3), то данная задача имеет классическое решение ([3], п.42).

Однако более интересен случай необратимости оператора L, в частности, когда его ядро $\ker L \neq \{0\}$. Именно к этому случаю удается редуцировать некоторое множество задач, возникших в последнее время в приложениях [4]–[6]. Различные частные случаи этой задачи уже привлекали внимание математиков [7], [8], однако лишь подход, разработанный в последнее время [9], позволяет рассмотреть задачу с должной полнотой.

В § 1 данной статьи вводится относительный спектр (L-спектр) оператора M и доказывается теорема о расщеплении пространств $\mathfrak{A}$ и F в соответствии с расщеплением L-спектра. Эти результаты имеют самостоятельное значение, т.к. обобщают некоторые частные случаи [9]. В § 2 изложены и уточнены некоторые результаты по теории p-секториальных операторов и аналитических полугрупп операторов с ядрами [9]. В § 3 доказаны теоремы о существовании инвариантных пространств и дихотомии решений уравнения (0.1) (точнее, пары эквивалентных ему уравнений, определенных на пространствах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно). В § 4 приведен иллюстрированный пример, имеющий прикладное значение.

Условимся о следующем: все исследования проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако при рассмотрении "спектральных" вопросов вводится их естественная комплексификация; все контуры ориентированы движением "против часовой стрелки" и ограничивают области, лежащие "слева" при таком движении.

[1] Статья поддержана программой "Университеты России" по направлению "Фундаментальные проблемы математики и механики", проект 1.5.16, частично Государственной научной стипендией и Международным научным фондом Дж. Сороса.

1. Теорема об относительном спектре

Следуя [9], введем *L-резольвентное множество* $\rho^L(M) + \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{A})\}$ и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Из аналога *тождества Гильберта* [9]

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1} L(\lambda L - M)^{-1} \tag{1.1}$$

вытекает открытость $\rho^L(M)$ и, как следствие, замкнутость $\sigma^L(M)$. Кроме того, из (1.1) следуют *правое*

$$R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) R^L_\mu(M) R^L_\lambda(M) \tag{1.2}$$

и *левое*

$$L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) L^L_\mu(M) L^L_\lambda(M) \tag{1.3}$$

L-резольвентные тождества [9]. (Здесь $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ — *правая*, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ — *левая L-резольвенты* оператора M. Оператор-функция $(\mu L - M)^{01}$ называется *L-резольвентой* оператора M.) Наконец, отметим, что из (1.1) вытекает аналитичность L-резольвенты и, как следствие, правой и левой L-резольвент оператора M [9].

Пусть выполнено условие:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma^L(M) = \sigma^L_1(M) \cup \sigma^L_2(M), \text{ причем существует замкнутый}\\ \text{контур } \Gamma \subset \mathbb{C},\ \Gamma \cap \sigma^L(M) = \varnothing, \text{ ограничивающий область,}\\ \text{содержащую } \sigma^L_1(M), \text{ а } \sigma^L_2(M) \text{ лежит вне этой области,}\end{array}\right\} \tag{1.4}$$

тогда имеют смысл интегралы *типа Ф. Рисса*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R^L_\mu(M) d\mu, \qquad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma L^L_\mu(M) d\mu. \tag{1.5}$$

Лемма 1.1. *Пусть выполнено условие* (1.4). *Тогда оператор $P : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ ($Q : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$) — проектор.*

Доказательство. По построению оператор $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{A})$, поэтому для доказательства достаточно установить его идемпотентность. Из (1.4) и замкнутости $\sigma^L(M)$ следует существование замкнутого контура $\Gamma' \subset \mathbb{C}$, $\Gamma' \cap \sigma^L(M) = \varnothing$, ограничивающего область, содержащую контур Γ. Из аналитичности правой L-резольвенты оператора M вытекает

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} R^L_\lambda(M) d\lambda.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P^2 &= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma'} \int_\Gamma R^L_\lambda(M) R^L_\mu(M) d\mu\, d\lambda \\ &= (2\pi i)^{-2} \left(\int_{\Gamma'} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int_\Gamma R^L_\mu(M) d\mu + \int_{\Gamma'} R^L_\lambda(M) d\lambda \int_\Gamma \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \right) = P \end{aligned}$$

в силу теоремы о вычетах и (1.2). Утверждение относительно оператора Q доказывается аналогично с заменой (1.2) на (1.3). Лемма доказана. □

Положим

$$\operatorname{im} P = \mathfrak{A}^1, \quad \ker P = \mathfrak{A}^2, \quad \operatorname{im} Q = \mathfrak{f}^1, \quad \ker Q = \mathfrak{F}^2$$

и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{A}^k$ ($\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{A}^k$), $k = 1, 2$.

Лемма 1.2. *Пусть выполнено условие* (1.4). *Тогда*

(i) $L_k : \mathfrak{A}^k \to \mathfrak{F}^k$, $k = 1, 2$;

(ii) $M_k : \operatorname{dom} M \cap \mathfrak{A}^k \to \mathfrak{F}^k$, $k = 1, 2$.

Доказательство. Утверждение (i) с очевидностью вытекает из (1.5), ибо $LP = LQ$. Для доказательства (ii) введем два очевидных тождества

$$\begin{aligned}(\mu L - M)^{-1}M &= \mu R^L_\mu(M) - I,\\ M(\mu L - M)^{-1} &= \mu L^L_\mu(M) - I,\end{aligned} \tag{1.6}$$

из которых следует $MR^L_\mu(M)u = L^L_\mu(M)Mu\ \forall u \in \operatorname{dom} M$ и значит, $MPu = QMu\ \forall u \in \operatorname{dom} M$. Лемма доказана. $\square$

Обозначим через $\sigma^{L_k}(M_k)$ L_k-спектр оператора M_K, $k = 1, 2$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие* (1.4). *Тогда* $\sigma^{L_k}(M_k) = \sigma^L_k(M)$, $k = 1, 2$.

Доказательство. Обозначим через Ω_1 область, ограниченную контуром Γ, и положим $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}_1$. Очевидно, $\sigma^{L_k}(M_k) \supset \sigma^L_k(M)$, $k = 1, 2$. Пусть точка $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\mu L - M)^{-1}}{\mu - \lambda} d\mu(\lambda L - M) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{I\, d\mu}{\mu - \lambda} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M) d\mu = \begin{cases} I - P, & \lambda \in \Omega_1;\\ -P, & \lambda \in \Omega_2,\end{cases}$$

$$(\lambda L - M)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\mu L - M)^{-1}}{\mu - \lambda} d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{I\, d\mu}{\mu - \lambda} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M) d\mu = \begin{cases} I - Q, & \lambda \in \Omega_1;\\ -Q, & \lambda \in \Omega_2,\end{cases}$$

в силу очевидных тождеств, а также

$$\begin{aligned}(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) &= I - (\mu - \lambda)R^L_\mu(M),\\ (\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} &= I - (\mu - \lambda)L^L_\mu(M),\end{aligned}$$

которые получаются аналогично (1.6).

Это означает существование непрерывных операторов

$$(\lambda L_k - M_k)^{-1} : \mathfrak{F}^k \to \mathfrak{A}^k, \quad \lambda \notin \sigma^L_k(M),$$

равных сужению оператора

$$(-1)^k \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\mu L - M)^{-1}}{\mu - \lambda} d\mu$$

на подпространства $\mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$, соответственно. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.1. *В условиях теоремы* 1.1

(i) *существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{A}^1)$;
(ii) *оператор* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}^1; \mathfrak{F}^1)$.

Доказательство. (i) Оператор L_1^{-1} равен сужению оператора

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mu L - M)^{-1} d\mu$$

на $\mathfrak{F}^1$.

(ii) Заметим сначала, что поскольку интегралы (1.5) понимаются в смысле Римана, а оператор M замкнут, то проектор P переводит векторы из $\operatorname{dom} M$ в $\operatorname{dom} M$, т.е. $Pu \in \operatorname{dom} M$, если $u \in \operatorname{dom} M$. Отсюда и из (1.6) имеем

$$M_1 u = MPu = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma MR^L_\mu(M)u\, d\mu = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu LR^L_\mu(M)u\, d\mu, \tag{1.7}$$

если $u \in \operatorname{dom} M$. Поскольку линеал $P[\operatorname{dom} M]$ плотен в $\mathfrak{A}^1$, а интеграл справа в (1.7) задает непрерывный оператор, то $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}^1; \mathfrak{F}^1)$. Следствие доказано. $\square$

2. Относительно p-секториальные операторы и разрешающие полугруппы операторов

Пусть $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$. Тогда из (1.2), (1.3) непосредственно следуют соотношения

$$\operatorname{im} R^L_\lambda(M) = \operatorname{im} R^L_\mu(M), \qquad \operatorname{im} L^L_\lambda(M) = \operatorname{im} L^L_\mu(M). \tag{2.1}$$

Кроме того, нетрудно показать [9], что

$$\begin{aligned} &\ker R^L_\mu(M) = L, \\ &\ker L^L_\mu(M) = \{M\varphi : \varphi \in \operatorname{dom} M \cap \ker L\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Пусть $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 1, 2, \dots, p$. Введем *правую* и *левую* (L,p)-резольвенты оператора M:

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M) \quad \text{и} \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{P} L^L_{\mu_q}(M)$$

соответственно. Из (2.1), (2.2), рассуждая по индукции, нетрудно получить следующий результат [9].

Лемма 2.1. *Пусть $\lambda_q, \mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 0, 1, \dots, p$. Тогда*

(i) $\operatorname{im} R^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$, $\operatorname{im} L^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$;

(ii) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ *есть линейная оболочка собственных и присоединенных векторов высоты не большей p правой L-резольвенты оператора M*, $\ker L^L_{(\mu,p)}(M) = \{M\varphi : \varphi \in \operatorname{dom} M \cap \ker R^L_{(\mu,p)}(M)\}$.

Определение 2.1. Оператор M называется *секториальным относительно* оператора L *с числом* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (короче, (L,p)-*секториальным*), если

(i) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ такие, что сектор $S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta,\ \mu \neq a\} \subset \rho^L(M)$;

(ii) существуют полином $P(\mu)$ степени не выше p и константа $k \in \mathbb{R}_+$ такие, что

$$\|(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{A})} \leq |P(\mu)|,$$

$$\max\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{A})},\ \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|\} \leq k\left(\prod_{q=0}^{p} |\mu_q - a|\right)^{-1}$$

при любых $\mu, \mu_q \in S^L_{a,\theta}(M)$, $q = 0, 1, \dots, p$.

Замечание 2.1. Если $p = 0$, то в этом случае (L,p)-секториальный оператор M называется L-секториальным [9]. Если существует оператор $L^{-1} \in (\mathfrak{F};\mathfrak{A})$, то оператор M тогда и только тогда L-секториален, когда секториален оператор $L^{-1}M$ (или оператор ML^{-1}).

Замечание 2.2. Если оператор M (L,σ)-ограничен, т.е.

$$\exists a > 0\ \forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > a) \Longrightarrow \mu \in \rho^L(M),$$

причем ∞ — несущественная особая точка L-резольвенты оператора M, то оператор M (L,p)-секториален [9].

Замечание 2.3. Не теряя общности, можно положить $a = 0$ в определении 2.1 [9]. Положим $S^L_{0,\theta}(M) = S^L_\theta(M)$.

Лемма 2.2. [9]. *Пусть оператор M (L,p)-секториален и $\mu_q \in S^L_\theta(M)$, $q = 0, 1, \dots, p$. Тогда*

(i) $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M) \cap \ker R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$;

(ii) $\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M) \cap \ker L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$.

Пусть $\rho^L(M) \neq \varnothing$, тогда уравнение (0.1) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{2.3}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f, \tag{2.4}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$. Уравнения (2.3), (2.4) удобно рассматривать в рамках уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{2.5}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$, а $\mathfrak{V}$ — некоторое банахово пространство. *Решением уравнения* (2.5) называется вектор-функция $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{V})$, удовлетворяющая этому уравнению. Решение $v = v(t)$ уравнения (2.5) называется *решением задачи Коши*

$$v(0) = v_0, \tag{2.6}$$

если $\lim\limits_{t\to 0+} v(t) = v_0$.

Определение 2.2. Отображение $V^\cdot \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(\mathfrak{V}))$ называется *полугруппой разрешающих операторов* (короче, *разрешающей полугруппой*) уравнения (2.5), если

(i) $V^sV^t = V^{s+t}\ \forall s, t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{V}$ вектор-функция $v(t) = V^tv_0$ является решением уравнения (2.5).

Следуя традиции ([2], гл. 1), отождествим полугруппу с ее графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Полугруппа $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется аналитической, если она аналитически продолжима в некоторый сектор, содержащий $\mathbb{R}_+$, с сохранением свойств (i) и (ii), и равномерно ограниченной, если

$$\|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \le \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема 2.1. [9]. *Пусть оператор M L,p-секториален. Тогда существуют аналитические в секторе $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \theta - \frac{\pi}{2}\}$ и равномерно ограниченные разрешающие полугруппы уравнений* (2.3), (2.4).

Искомые полугруппы задаются несобственными интегралами *типа Данфорда-Тейлора* соответственно

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \qquad F^+ = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,$$

где $\Gamma \subset S^L_\theta(M)$ — такой контур, что $|\arg\mu| \to \theta$ при $\mu \to \infty$, $\mu \in \Gamma$, а $t \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2.3. Пусть $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ — аналитическая полугруппа. Множество

$$\ker V^\cdot = \{\varphi \in \mathfrak{V} : V^t\varphi = 0\ \exists t \in \mathbb{R}_+\}$$

называется *ядром*, а множество

$$\operatorname{im} V^\cdot = \{v \in \mathfrak{V} : \lim_{t\to 0+} V^tv = v\}$$

— образом этой полугруппы.

(Обсуждение корректности определения $\ker V^\cdot$ и $\operatorname{im} V^\cdot$ см. в [9].)

Положим $\mathfrak{A}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M)$, $\mathfrak{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M)$, а через $\mathfrak{A}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) обозначим замыкание образа $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{F}$).

Теорема 2.2. [9]. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда* $\ker U^\cdot = \mathfrak{A}^0$, $\operatorname{im} U^\cdot = \mathfrak{A}^1$, $\ker F^\cdot = \mathfrak{F}^0$, $\operatorname{im} F^\cdot = \mathfrak{F}^1$.

Определение 2.4. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{V}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2.5), если

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (2.5) лежит в $\mathfrak{P}$, т.е. $v(t) \in \mathfrak{P}\ \forall t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (2.5), (2.6).

Теорема 2.3. *Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда* $\operatorname{im} U^{\cdot}$ $(\operatorname{im} F^{\cdot})$ *является фазовым пространством уравнения* (2.1) (*уравнения* (2.2)).

Доказательство. Справедливость требования (ii) определения 2.4 вытекает из теоремы 2.2 и установлена в [9]. Установим справедливость (i).

Пусть $u = u(t)$ — решение уравнения (2.1). По определению $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{A})$. Покажем, что

$$u(t) = (R^L_{\alpha}(M))^q \sum_{r=0}^{q} a_r u^{(r)}(t) \tag{2.7}$$

при любых $q \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}_+$. (Здесь a_r, $r = 0, 1, \ldots, q$ — некоторые числовые коэффициенты, конкретный вид которых для нас несущественен.)

Докажем (2.7) по индукции. Пусть $q = 1$, тогда из (2.1) в силу (1.6) получим

$$R^L_{\alpha}(M)\dot{u} = \alpha R^L_{\alpha}(M)u - u. \tag{2.8}$$

Отсюда

$$u = R^L_{\alpha}(M)(\dot{u} - \alpha u).$$

Пусть (2.7) истинно при $q = p > 1$. Продифференцировав (2.7) по t, получим

$$(R^L_{\alpha}(M))^{p+1} \sum_{r=0}^{p} a_r u^{(r+1)} = R^L_{\alpha}(M)\dot{u} = \alpha R^L_{\alpha}(M)u - u \tag{2.9}$$

в силу (2.8). Подставив в первое слагаемое справа (2.7), получим требуемое. Итак, из (2.7) в силу леммы 2.1 (i) следует справедливость требования (i). Утверждение теоремы об образе $\operatorname{im} F^{\cdot}$ и фазовом пространстве уравнения (2.2) доказывается аналогично. Теорема доказана. □

3. Инвариантные подпространства и дихотомии решений

Перейдем к изложению основных результатов.

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{P}$ — фазовое пространство уравнения (2.5). Множество $\mathfrak{P}^1 \subset \mathfrak{P}$ называется *инвариантным пространством* этого уравнения, если при любом $v_0 \in \mathfrak{P}^1$ существует единственное решение $v = v(t)$ задачи (2.5), (2.6), причем $v(t) \in \mathfrak{P}^1$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 3.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален и выполнено условие* (1.4). *Тогда существуют инвариантные пространства уравнения* (2.3) (*уравнения* (2.4)).

Доказательство. Пусть $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ — проектор (1.5). Положим $\mathfrak{A}^{11} = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{A}^{12} = \ker P \cap \mathfrak{A}^1$. $\mathfrak{A}^{1k}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{A}$, $k = 1, 2$.

Как нетрудно видеть,

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} R^L_{\mu}(M) e^{\mu t} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} R^L_{\mu}(M) e^{\mu t} d\mu, \tag{3.1}$$

где замкнутый контур $\Gamma_1 \subset \rho^L(M)$ ограничивает область, содержащую часть $\sigma^L_1(M)$ L-спектра оператора M и для любого $\mu \in \Gamma_1$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, а контур $\Gamma_2 \subset \rho^L(M)$ ограничивает область, содержащую другую часть $\sigma^L(M)$, причем $|\arg \mu| \to \theta$ при $\mu \to \infty$ и $\operatorname{Re}\mu < 0$, где $\mu \in \Gamma_2$, и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

В соответствии с (3.1) положим $U^t = U^t_1 + U^t_2$. Из теоремы 2.1 следует, что $\{U^t_k : t \in \mathbb{R}_+\}$, $k = 1, 2,$ — разрешающая полугруппа уравнения (2.3), а из теоремы 2.2 вытекает, что $\operatorname{im} U^{\cdot}_k = \mathfrak{A}^{1k}$, $k = 1, 2$. В силу теоремы 1.1 имеем $\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}^{11} \oplus \mathfrak{A}^{12}$.

Утверждение относительно уравнения (2.4) доказывается аналогично. Теорема доказана. □

Замечание 3.1. Полугруппа $\{U^t_1 : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжима до группы $\{U^t_1 : t \in \mathbb{R}_+\}$.

Определение 3.2. Пусть $\mathfrak{P}$ — фазовое пространство уравнения (2.5), причем $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^1 \oplus \oplus \mathfrak{P}^2$, где $\mathfrak{P}^k$ — инвариантное пространство, $k = 1, 2$. Решение $v = v(t)$ уравнения (2.5) имеет *экспоненциальную дихотомию*, если выполняются следующие условия:

(i) $\|v^1(t)\| \le N_1 e^{\nu_1(t-s)} \|v^1(s)\|$, $t \ge s$, $\nu_1 > 0$;
(ii) $\|v^2(t)\| \le N_2 e^{\nu_2(t-s)} \|v^2(s)\|$, $t \le s$, $\nu_2 > 0$.

Здесь $v^k(t) \in \mathfrak{P}^k$, $k = 1, 2$ ([10]).

Теорема 3.2. *Пусть оператор* M (L, p)*-секториален и существует* $\omega \in \mathbb{R}_+$ *такое, что* $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : -\omega \le \operatorname{Re}\mu \le \omega\} = \varnothing$. *Тогда решения уравнения* (2.3) (*уравнения* (2.4)) *имеют экспоненциальную дихотомию.*

Доказательство. Из условия теоремы следует (1.4), поэтому воспользуемся (3.1). Пусть $u \in \mathfrak{A}^1$, положим $u = u^1 + u^2$, $u^k \in \mathfrak{A}^{1k}$, $k = 1, 2$. Отсюда

$$u^1(t) = U_1^{t-s} u^1(s) = e^{-\nu_1(t-s)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1'} R_\tau^L(M) e^{\tau(t-s)} u^1(s) d\tau, \tag{3.2}$$

где $\tau = \mu + \nu_1$, причем $\operatorname{Re}\tau > 0$, $\tau \in \Gamma_1'$. Следовательно, $0 < \nu_1 < \min \operatorname{Re}\mu$ и можем положить $\nu_1 = \omega - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Если $s \ge t$, справедлива оценка

$$\|u^1(t)\|_{\mathfrak{A}} \le e^{-\nu_1(t-s)} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1'} |R_\mu^L(M)| \, |e^{\tau(t-s)}| \, |d\tau| \, \|u^1(s)\|_{\mathfrak{A}} \le$$
$$\le e^{-\nu_1(t-s)} N_1 \|u^1(s)\|_{\mathfrak{A}},$$

таким образом, выполняется условие (ii) определения 3.2.

Далее

$$u^2(t) = U_2^{t-s} u^2(s) = e^{-\nu_2(t-s)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2'} R_\tau^L(M) e^{\tau(t-s)} u^2(s) d\tau, \tag{3.3}$$

где $\tau = \mu + \nu_2$, причем $\operatorname{Re}\tau < 0$, $\tau \in \Gamma_2'$. Следовательно, $0 < \nu_2 < -\max \operatorname{Re}\mu$ и можем положить $\nu_2 = \omega - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. При $t \ge s$ из (3.3) получаем

$$u^2(t) = e^{-\nu_2(t-s)} \tilde{U}_2^{t-s} u^2(s),$$

причем семейство $\{\tilde{U}_2^{t-s} : t \ge s\}$ образует аналитическую и равномерно ограниченную разрешающую полугруппу уравнения (2.3) (см. замечание 2.3). Поэтому

$$\|u^2(t)\|_{\mathfrak{A}} \le e^{-\nu_2(t-s)} \|\tilde{U}_2^{t-s}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{A})} \|u^2(s)\|_{\mathfrak{A}} \le N_2 e^{-\nu_2(t-s)} \|u^2(s)\|_{\mathfrak{A}},$$

таким образом, выполняется условие (i) определения 3.2.

Утверждение относительно уравнения (2.4) доказывается аналогично. Теорема доказана. □

4. Пример

Теорема 3.2 устанавливает лишь возможность экспоненциальной неустойчивости решений уравнения (0.1). Поэтому в качестве примера, демонстрирующего существование такой неустойчивости, рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta) u_t = \alpha \Delta u - \beta \Delta^2 u, \tag{4.1}$$

моделирующее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [11]. Здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметры, характеризующие среду, причем параметр λ может принимать отрицательные значения [12].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В области $\Omega \times \mathbb{R}_+$ ищется решение уравнения (4.1), удовлетворяющее граничному

$$u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{4.2}$$

и начальному

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.3}$$

условиям.

Чтобы редуцировать задачу (4.1)–(4.3) к задаче Коши $u(0) = u_0$, положим

$$\mathfrak{A} = \{u \in W_q^{k+2}(\Omega) : u(x) = 0, \ x \in \partial\,\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_q^k(\Omega),$$

где $W_q^l(\Omega)$ — пространства Соболева $k = 0, 1, \ldots, \ 1 < q < \infty$, а операторы L, M зададим формулами

$$L = \lambda - \Delta, \qquad M = \alpha\Delta = \beta\Delta^2,$$
$$\operatorname{dom} M = \{u \in W_q^{k+4}(\Omega) : \Delta u(x) = 0, \ x \in \partial\,\Omega\} \cap \mathfrak{A}.$$

Так определенный оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}; \mathfrak{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathfrak{F}$ линеен, замкнут и плотно определен.

Лемма 4.1. *При любом $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор M L-секториален.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированное в смысле пространства $L_2(\Omega)$ множество собственных векторов однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ, занумерованное по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Пусть $\mu \in \mathbb{C}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda - \lambda_k)} \varphi_k. \tag{4.4}$$

Ряд (4.4) сходится равномерно и абсолютно на любом компакте в $\mathbb{C}$, не содержащем точек

$$\mu_k = \lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda_k - \lambda}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Поскольку спектр $\sigma(\Delta)$ отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$, то из (4.5) следует, что L-спектр оператора M вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$. (В случае $\lambda \in \sigma(\Delta)$ из множества (4.5) следует удалить μ_k с номерами k такими, что $\lambda_k = \lambda$.)

Пусть $\mu \neq \mu_k$, тогда из (4.4) получаем

$$(\mu L - M)^{-1} = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda - \lambda_k)} + \sum_{\lambda = \lambda_k} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\beta\lambda^2 - \alpha\lambda},$$
$$R_\mu^L(M) = L_\mu^L(M) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \left(\mu + \lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda - \lambda_k} \right)^{-1} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda_k = \lambda$ (Если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, то штрих следует удалить.) Отсюда легко вытекает справедливость требований определения 2.1. Лемма доказана. □

Пусть λ_1 — (отрицательное, однократное) максимальное собственное значение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω.

Теорема 4.1. *Пусть $\lambda < \lambda_1$, тогда решения задачи* (4.1)–(4.3) *имеют экспоненциальные дихотомии.*

Доказательство легко следует из представления

$$U^t u_0 = \sum_{\lambda_k > \lambda} \exp\Big(-t\lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda - \lambda_k}\Big) \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{\lambda_k < \lambda} \exp\Big(-t\lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda - \lambda_k}\Big) \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

где $u_0 = \mathfrak{A}$. Теорема доказана. $\square$

Литература

1. Свиридюк Г.А. *Задача Коши для линейного сингулярного уравнения типа Соболева* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 12. – С. 2169–2171.
2. Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* – М.: Мир, 1985. – 376 с.
3. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.* – М.: Мир, 1970. – 456 с.
4. Свиридюк Г.А. *Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 1. – С. 74–79.
5. Свиридюк Г.А. *Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 2. – С. 55–61.
6. Свиридюк Г.А. *Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 12. – С. 65–70.
7. Соболев В.А., Чернышов К.И. *Об интегральных многообразиях операторных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной* // Приближ. методы исслед. дифференц. уравнений и их прилож. – Куйбышев, 1983. – С. 77–83.
8. Поволоцкий А.И., Свиридюк Г.А. *О дихотомии решений одного класса уравнений типа Соболева* // Операторы и их прилож. – Л., 1988. – С. 71–75.
9. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.
10. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 534 с.
11. Свиридюк Г.А., Суханова М.В. *Разрешимость задачи Коши для линейных сингулярных уравнений эволюционного типа* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 3. – С. 323–330.
12. Свиридюк Г.А. *К общей теории псевдопараболических уравнений.* – Ленингр. гос. пед. ин-т. – Л., 1984. – 25 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.10.84, № 6552–84.

Челябинский государственный университет

Поступили
первый вариант 19.10.1994
окончательный вариант 23.07.1996