Известия вузов. Математика
2017, № 9, с. 69–75

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.А. УТКИНА

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ КВАЗИЛИНЕЙНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Аннотация. Для функционально-дифференциального квазилинейного гиперболического уравнения неисследованного ранее вида рассмотрены задачи с условиями на характеристиках. Получены условия разрешимости.

Ключевые слова: квазилинейное гиперболическое уравнение, задача Гурса, задачи с нормальными производными в граничных условиях, уравнение со смещением аргументов в искомой функции.

УДК: 517.956

Множество существующих публикаций посвящено изучению обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых аргументы искомой функции претерпевают определенное смещение. При этом различные авторы присваивают обсуждаемым уравнениям различные названия: функционально-дифференциальные, с запаздывающим или отклоняющимся аргументом (см. библиографию в [1]). Для уравнений с частными производными имеется незначительное число публикаций. Здесь возможно указать только некоторые результаты (например, [1]–[7]). В данной работе рассматривается новый вариант реализации смещения применительно к квазилинейному гиперболическому уравнению $u_{xy}(x,y) = f(x,y,u,u_x,u_y)$. Задачи для этого уравнения исследовались, например, в ([8], с. 292; [9], с. 205). В данной статье идея из [1], [4]–[6], реализованная для гиперболического уравнения со смещением аргументов искомой функции и уравнения с псевдопараболическими операторами третьего и четвертого порядков, распространяется на квазилинейное гиперболическое уравнение.

1. В области $D = \{0 < x, y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$\alpha_1(x,y)u_{xy}(x,y) + \alpha_2(x,y)v_{xy}(x,y) = f(x,y,u,u_x,u_y,v,v_x,v_y) \tag{1}$$

(о случаях изучения (1) при $\alpha_2 \neq 0$ в работах других исследователей автору неизвестно). При этом $v(x,y)$ определяется по $u(x,y)$ по формуле

$$v(x,y) \equiv u(y,x). \tag{2}$$

Коэффициенты (1) удовлетворяют условиям $\alpha_i \in C^{1,1}(\overline{D})$, $i = 1,2$ (здесь $C^{k,l}$ — класс функций, имеющих непрерывные производные $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$ для всех $0 \le i \le k$, $0 \le j \le l$). Функция f такова, что

1) она непрерывна относительно всех ее аргументов, если $(x,y) \in D$ и $|u| \le A_1$, $|u_x| \le A_2$, $|u_y| \le A_3$, $|v_x| \le A_4$, $|v_y| \le A_5$, где $A_j > 0$, $j = 1,\dots,5$, — известные числа;

2) она удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x,y,u_1,u_{1x},u_{1y},v_1,v_{1x},v_{1y}) - f(x,y,u_2,u_{2x},u_{2y},v_2,v_{2x},v_{2y})| \le$$

Поступила 05.05.2016

$$\leq k\big(|u_1 - u_2| + |u_{1x} - u_{2x}| + |u_{1y} - u_{2y}| + |v_1 - v_2| + |v_{1x} - v_{2x}| + |v_{1y} - v_{2y}|\big),$$
$k = \mathrm{const} > 0$.

Задача Гурса (Г). *Найти в D функцию $u \in C^{1,1}(D) \cap C(\overline{D})$, являющуюся решением уравнения* (1), *и удовлетворяющую условиям*

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad \varphi \in C^1[0,1], \tag{3}$$
$$u(x,0) = \psi(x), \quad \psi \in C^1[0,1], \tag{4}$$
$$\varphi(0) = \psi(0).$$

Используем сначала методику, ранее примененную к другим уравнениям в [1], [4]–[6]. Положим в (1) $x = t$, $y = \tau$ и проинтегрируем рассматриваемое уравнение по t от 0 до x, по τ от 0 до y. Учитывая при этом (3), (4), получим

$$\begin{aligned}\alpha_1(x,y)u(x,y) + \alpha_2(x,y)v(x,y) = \\ = \int_0^x \int_0^y f(t,\tau,u,u_t(t,\tau),u_\tau(t,\tau),v(t,\tau),v_t(t,\tau),v_\tau(t,\tau))d\tau dt + \\ + \int_0^y (\alpha_{1\tau}(x,\tau)u(x,\tau) + \alpha_{2\tau}(x,\tau)v(x,\tau))d\tau\, dt + \\ + \int_0^x (\alpha_{1t}(t,y)u(t,y) + \alpha_{2t}(t,y)v(t,y))dt - \\ - \int_0^x \int_0^y (\alpha_{1t\tau}(t,\tau)u(t,\tau) + \alpha_{2t\tau}(t,\tau)v(t,\tau))d\tau\, dt + \varpi(x,y),\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}\varpi(x,y) = \alpha_1(x,0)\psi(x) + \alpha_1(0,y)\varphi(y) - \alpha_1(0,0)\varphi(0) - \\ - \int_0^y (\alpha_{1\tau}(0,\tau)\varphi(\tau) + \alpha_{2\tau}(0,\tau)\psi(\tau))d\tau - \\ - \int_0^x (\alpha_{1t}(t,0)\psi(t) + \alpha_{2t}(t,0)\varphi(t))dt + \alpha_2(x,0)\varphi(x) + \alpha_2(0,y)\psi(y) - \alpha_2(0,0)\varphi(0).\end{aligned}$$

Сформулированные перед постановкой задачи условия гладкости коэффициентов уравнения (1) и его правой части обеспечивают законность проведенных при выводе (5) действий и непрерывность в $\overline{D}$ функции $\varpi(x,y)$.

Обозначим правую часть (5) через $g(x,y)$. Тогда это соотношение с учетом (2) примет вид

$$\alpha_1(x,y)u(x,y) + \alpha_2(x,y)v(x,y) = g(x,y). \tag{6}$$

Положив в (6) $x = y$, $y = x$ и учитывая свойство

$$v(y,x) = u(x,y), \tag{7}$$

получим

$$\alpha_1(y,x)v(x,y) + \alpha_2(y,x)u(x,y) = g(y,x). \tag{8}$$

Соотношения (6), (8) есть система линейных алгебраических уравнений для нахождения u, v. Ее определитель равен

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} \alpha_1(x,y) & \alpha_2(x,y) \\ \alpha_2(y,x) & \alpha_1(y,x) \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Если $\Delta(x,y) \neq 0$, то по формулам Крамера получаем

$$\Delta(x,y)u(x,y) = \alpha_1(y,x)g(x,y) - \alpha_2(x,y)g(y,x), \tag{10}$$

$$\Delta(x,y)v(x,y) = \alpha_1(x,y)g(y,x) - \alpha_2(y,x)g(x,y). \tag{11}$$

Из (9) на основании свойства (7) следует $\Delta(x,y) = \Delta(y,x)$. Поэтому если в (11) положить $y = x$, $x = y$, а также учесть свойство (7) и правило (2), то получим (10). Итак, формулы (10), (11) дают одно и то же решение. Следовательно, уравнение (8) оказалось однозначно разрешимым в явном виде (10). Подставляя теперь в (10) значение $g(x,y)$, т. е. правую часть (5), и разделив обе части уравнения на $\Delta(x,y)$, имеем

$$\begin{gathered}
u(x,y) = \frac{\alpha_1(y,x)}{\Delta(x,y)}\bigg(\int_0^x\int_0^y f(t,\tau,u,u_t(t,\tau),u_\tau(t,\tau),v(t,\tau),v_t(t,\tau),v_\tau(t,\tau))d\tau\,dt+ \\
+\int_0^y(\alpha_{1\tau}(x,\tau)u(x,\tau)+\alpha_{2\tau}(x,\tau)u(\tau,x))d\tau+\int_0^x(\alpha_{1t}(t,y)u(t,y)+\alpha_{2t}(t,y)u(y,t))dy- \\
-\int_0^x\int_0^y(\alpha_{1t\tau}(t,\tau)u(t,\tau)+\alpha_{2t\tau}(t,\tau)u(\tau,t))d\tau\,dt\bigg)- \\
-\frac{\alpha_2(x,y)}{\Delta(x,y)}\bigg(\int_0^y\int_0^x f(t,\tau,u,u_t(t,\tau),u_\tau(t,\tau),v(t,\tau),v_t(t,\tau),v_\tau(t,\tau))d\tau\,dt+ \\
+\int_0^x(\alpha_{1\tau}(y,\tau)u(y,\tau)+\alpha_{2\tau}(y,\tau)u(\tau,y))d\tau+\int_0^y(\alpha_{1t}(t,x)u(t,x)+\alpha_{2t}(t,x)u(x,t))dt- \\
-\int_0^y\int_0^x(\alpha_{1t\tau}(t,\tau)u(t,\tau)+\alpha_{2t\tau}(t,\tau)v(t,\tau))d\tau\,dt\bigg)+\frac{F(x,y)}{\Delta(x,y)}, \qquad (12) \\
F(x,y) = \alpha_1(y,x)\varpi(x,y) - \alpha_2(x,y)\varpi(y,x).
\end{gathered}$$

Решение (12) можно получить, применив метод последовательных приближений

$$\begin{gathered}
u_n(x,y) = \frac{\alpha_1(y,x)}{\Delta(x,y)}\bigg(\int_0^x\int_0^y f(t,\tau,u_{n-1},u_{n-1t}(t,\tau),u_{n-1\tau}(t,\tau),v_{n-1}(t,\tau), \\
v_{n-1t}(t,\tau),v_{n-1\tau}(t,\tau))d\tau\,dt+\int_0^y(\alpha_{1\tau}(x,\tau)u_{n-1}(x,\tau)+\alpha_{2\tau}(x,\tau)u_{n-1}(\tau,x))d\tau+ \\
+\int_0^x(\alpha_{1t}(t,y)u_{n-1}(t,y)+\alpha_{2t}(t,y)u_{n-1}(y,t))dy- \\
-\int_0^x\int_0^y(\alpha_{1t\tau}(t,\tau)u_{n-1}(t,\tau)+\alpha_{2t\tau}(t,\tau)u_{n-1}(\tau,t))d\tau\,dt\bigg)- \\
-\frac{\alpha_2(x,y)}{\Delta(x,y)}\bigg(\int_0^y\int_0^x f(t,\tau,u_{n-1},u_{n-1t}(t,\tau),u_{n-1\tau}(t,\tau),v_{n-1}(t,\tau),v_{n-1t}(t,\tau),v_{n-1\tau}(t,\tau))d\tau\,dt+ \\
+\int_0^x(\alpha_{1\tau}(y,\tau)u_{n-1}(y,\tau)+\alpha_{2\tau}(y,\tau)u_{n-1}(\tau,y))d\tau+\int_0^y(\alpha_{1t}(t,x)u_{n-1}(t,x)+\alpha_{2t}(t,x)u_{n-1}(x,t))dt- \\
-\int_0^y\int_0^x(\alpha_{1t\tau}(t,\tau)u_{n-1}(t,\tau)+\alpha_{2t\tau}(t,\tau)v_{n-1}(t,\tau))d\tau\,dt\bigg)+\frac{F(x,y)}{\Delta(x,y)},
\end{gathered}$$

$n = 1,2,\dots$, $u_0(x,y) \equiv v_0(x,y) \equiv 0$.

Обозначим $w_n(x,y) = u_{n+1}(x,y) - u_n(x,y)$, $n = 1,2,\dots$, $k = \max\limits_{i=1,\dots,5}\{k_i\}$, $p = \max\limits_{\overline{D}}\big\{|u_1|$, $\big|\frac{\partial u_1}{\partial x}\big|$, $\big|\frac{\partial u_1}{\partial y}\big|$, $|v_1|$, $\big|\frac{\partial v_1}{\partial x}\big|$, $\big|\frac{\partial v_1}{\partial y}\big|\big\}$, $m_1 = \max\limits_{\overline{D}}\big\{\frac{|\alpha_1(y,x)|}{|\Delta(x,y)|}, \frac{|\alpha_2(x,y)|}{|\Delta(x,y)|}\big\}$, $m_2 = \max\{|\alpha_{1y}(x,y)|, |\alpha_{2y}(x,y)|$, $|\alpha_{1x}(x,y)|$, $|\alpha_{2x}(x,y)|$, $|\alpha_{1xy}(x,y)|$, $|\alpha_{2xy}(x,y)|$, $|\alpha_{1x}(y,x)|$, $|\alpha_{2x}(y,x)|$, $|\alpha_{1y}(y,x)|$, $|\alpha_{2y}(y,x)|$, $|\alpha_{1yx}(y,x)|, |\alpha_{2yx}(y,x)|\}$.

Тогда можно получить оценки

$$|w_n(x,y)| < p(m_1m_2\max\{k,1\}\cdot 24)^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},\ \ |w_{nx}(x,y)| < p(m_1m_2\max\{k,1\}\cdot 24)^n\frac{(x+y)^{n}}{n!},$$

$$|w_{ny}(x,y)| < p(m_1m_2\max\{k,1\}\cdot 24)^n\frac{(x+y)^{n}}{n!}.$$

При этом если поменяем аргументы, оценки все равно сохранятся. А это означает, что упомянутые оценки выполняются и для

$$v_{n+1}(x,y)-v_n(x,y)=u_{n+1}(y,x)-u_n(y,x).$$

Из полученных неравенств следует равномерная сходимость последовательности $\{u_n\}$ вместе с производными первого порядка. Это обстоятельство обеспечивает существование решения задачи Гурса.

Подстановка этого решения в (12) превращает его в тождество, влекущее за собой в силу способа своего получения обращение в тождество соотношения (5), полученного путем непосредственного интегрирования уравнения (1) с учетом условий (3), (4). Поэтому к (5) возможно применение обратной операции $\partial^2/\partial x\partial y$, которое приводит к тождественному выполнению (1).

Докажем теперь, что задача (12), (3), (4) (а значит, и (1), (3), (4)) имеет единственное решение. Пусть, напротив, $u(x,y)$ и $h(x,y)$ — два решения задачи (12), (3), (4). Тогда их разность $U(x,y)=u(x,y)-h(x,y)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned}
U(x,y)=\frac{\alpha_1(y,x)}{\Delta(x,y)}\Bigg(&\int_0^x\int_0^y(f(t,\tau,u,u_t(t,\tau),u_\tau(t,\tau),u(\tau,t),u_t(\tau,t),u_\tau(\tau,t))-\\
&-f(t,\tau,h,h_t(t,\tau),h_\tau(t,\tau),h(\tau,t),h_t(\tau,t),h_\tau(\tau,t)))d\tau\,dt+\\
&+\int_0^y(\alpha_{1\tau}(x,\tau)U(x,\tau)+\alpha_{2\tau}(x,\tau)U(\tau,x))d\tau+\int_0^x(\alpha_{1t}(t,y)U(t,y)+\alpha_{2t}(t,y)U(y,t))dt-\\
&-\int_0^x\int_0^y(\alpha_{1t\tau}(t,\tau)U(t,\tau)+\alpha_{2t\tau}(t,\tau)U(\tau,t))d\tau\,dt\Bigg)-\\
-\frac{\alpha_2(x,y)}{\Delta(x,y)}\Bigg(&\int_0^y\int_0^x(f(t,\tau,u(t,\tau),u_t(t,\tau),u_\tau(t,\tau),u(\tau,t),u_t(\tau,t),u_\tau(\tau,t))-\\
&-f(t,\tau,h(t,\tau),h_t(t,\tau),h_\tau(t,\tau),h(\tau,t),h_t(\tau,t),h_\tau(\tau,t)))d\tau\,dt+\\
&+\int_0^x(\alpha_{1\tau}(y,\tau)U(y,\tau)+\alpha_{2\tau}(y,\tau)U(\tau,y))d\tau+\int_0^y(\alpha_{1t}(t,x)U(t,x)+\alpha_{2t}(t,x)U(x,t))dt-\\
&-\int_0^y\int_0^x(\alpha_{1t\tau}(t,\tau)U(t,\tau)+\alpha_{2t\tau}(t,\tau)U(\tau,t))d\tau dt\Bigg)
\end{aligned}\tag{13}$$

с однородными условиями на характеристиках. В силу свойства 2) функции f имеем

$$|U|\le m_1m_2p\max\{k,1\}\cdot 24\frac{(x+y)^2}{2!},\tag{14}$$

$$|U_x|\le m_1m_2p\max\{k,1\}\cdot 24(x+y),\quad |U_y|\le m_1m_2p\max\{k,1\}\cdot 24(x+y).$$

Основываясь на (13) и (14) снова получаем

$$|U|\le p(m_1m_2\max\{k,1\}\cdot 24)^3\frac{(x+y)^3}{3!},$$

$$|U_x|\le p(m_1m_2\max\{k,1\}\cdot 24)^2\frac{(x+y)^2}{2!},\quad |U_y|\le p(m_1m_2\max\{k,1\}\cdot 24)^2\frac{(x+y)^2}{2!}.$$

Продолжая процесс, заключаем, что $|U| \leq p(m_1 m_2 \max\{k,1\} \cdot 24)^n \frac{(x+y)^n}{n!}$ для любого натурального n. Следовательно, $U(x,y)=0$, а значит, $u(x,y)=h(x,y)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Если определяемая с помощью* (9) *функция* $\Delta(x,y)$ *не обращается при* $\Delta(x,y) \in \overline{D}$ *в нуль, то решение задачи существует и является единственным.*

2. Теперь рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=0}^{1} \alpha_{ij}^1(x,y)\frac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} + \sum_{i,j=0}^{1} \alpha_{ij}^2(x,y)\frac{\partial^{i+j}v(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} = \\ = f(x,y,\beta_{10}^1 u_x, \beta_{01}^1 u_y, \beta_{00}^1 u, \beta_{10}^2 v_x, \beta_{01}^2 v_y, \beta_{00}^2 v), \quad (15)$$

где β_{ij}^k — непрерывные в $\overline{D}$ функции, $\alpha_{ij}^k \in C^{i,j}(\overline{D})$. Это частный случай уравнения (1), который допускает выделение линейной части из f. При этом нелинейная составляющая имеет определенную структуру.

Далее речь пойдет о задачах для (15), в которых хотя бы одно из условий (3), (4) заменяется на соответствующую нормальную производную искомой функции из набора

$$u_x(0,y) = \varphi_1(y), \quad \varphi_1 \in C^1[0,1], \quad (16)$$

$$u_y(x,0) = \psi_1(x), \quad \psi_1 \in C^1[0,1]. \quad (17)$$

Обсуждаемые задачи соотносятся с задачей Г так же, как задача Неймана с задачей Дирихле в теории эллиптических уравнений [8] или как задачи с нормальными производными в граничных условиях в теории гиперболических и псевдопараболических уравнений с задачей Гурса (см., например, библиографию к [1] и [10]–[14]). Изучаемые задачи решаются редукцией к задаче Гурса, которая для (15), как и для (1), имеет единственное решение при выполнении условия

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^1(x,y) & \alpha_{11}^2(x,y) \\ \alpha_{11}^2(y,x) & \alpha_{11}^1(y,x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом существенно опираемся на результат из [5]. Подробно рассмотрим одну из упомянутых задач.

Задача ΓN. *Найти решение* $u \in C^{1,1}(D) \cap C(\overline{D})$ *уравнения* (15), *удовлетворяющее условиям* (4), (16).

Определим $\varphi(y)$. Для этого заменим в (15) y на η и проинтегрируем по η от ε до y. Затем устремим x и ε к нулю. Тогда получим

$$\alpha_{01}^1(0,y)\varphi(y) + \alpha_{11}^2(0,y)\psi_1(y) = \int_0^y (-\alpha_{01\eta}^1(0,\eta) + \alpha_{00}^1(0,\eta))\varphi(\eta)d\eta + \\ + \int_0^y (-\alpha_{11\eta}^2(0,\eta) + \alpha_{10}^2(0,\eta))\psi_1(\eta)d\eta = r(y) + \int_0^y f(0,\eta,\beta_{10}^1(0,\eta)\varphi_1(\eta), \quad (18) \\ \beta_{01}^1(0,\eta)\varphi'(\eta), \beta_{00}^1(0,\eta)\varphi(\eta), \beta_{10}^2(0,\eta)\psi_1(\eta), \beta_{01}^2(0,\eta)\psi'(\eta), \beta_{00}^2(0,\eta)\psi(\eta)),$$

$$r(y) = -\alpha_{11}^1(0,y)\varphi_1(y) - \int_0^y (-\alpha_{11\eta}^1(0,\eta) + \alpha_{10}^1(0,\eta))\varphi_1(\eta)d\eta + \alpha_{11}^1(0,0)u_x(0,0) + \\ + (\alpha_{01}^1(0,0) + \alpha_{01}^2(0,0))\psi(0) + \alpha_{11}^2(0,0)u_y(0,0) + \alpha_{01}^2(0,y)\psi(y).$$

Здесь функция ψ_1 пока неизвестна. Применим теперь к (15) преобразование (7). Получим

$$\sum_{i,j=0}^{1} \alpha_{ij}^2(y,x)\frac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} + \sum_{i,j=0}^{1} \alpha_{ij}^1(y,x)\frac{\partial^{i+j}v(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} =$$
$$= f(y,x,\beta_{10}^1(y,x)v_x(x,y),\beta_{01}^1(y,x)v_y(x,y),\beta_{00}^1(y,x)v(x,y), \quad (19)$$
$$\beta_{10}^2(y,x)u_x(x,y),\beta_{01}^2(y,x)u_y(x,y),\beta_{00}^2(y,x)u(x,y)).$$

После этого заменим в (19) y на η, проинтегрируем по η от ε до y и устремим x и ε к нулю. Получим

$$\alpha_{01}^2(y,0)\varphi(y) + \alpha_{11}^1(y,0)\psi_1(y) =$$
$$= r_1(y) + \int_0^y (-\alpha_{01\eta}^2(\eta,0) + \alpha_{00}^2(\eta,0))\varphi(\eta)d\eta + \int_0^y (-\alpha_{11\eta}^1(\eta,0) + \alpha_{10}^1(\eta,0))\psi_1(\eta)d\eta +$$
$$+ \int_0^y f(\eta,0,\beta_{10}^1(\eta,0)\psi_1(\eta),\beta_{01}^1(\eta,0)\psi'(\eta),\beta_{00}^1(\eta,0)\psi(\eta),\beta_{10}^2(\eta,0)\varphi_1(\eta),$$
$$\beta_{01}^2(\eta,0)\varphi'(\eta),\beta_{00}^2(\eta,0)\varphi(\eta)), \quad (20)$$

$$r_1(y) = -\alpha_{11}^2(y,0)\varphi_1(y) - \int_0^y (-\alpha_{11\eta}^2(\eta,0) + \alpha_{10}^2(\eta,0))\varphi_1(\eta)d\eta + \alpha_{11}^2(0,0)u_x(0,0) +$$
$$+ (\alpha_{01}^1(0,0) + \alpha_{01}^2(0,0))\psi(0) + \alpha_{11}^1(0,0)u_y(0,0) + \alpha_{01}^1(y,0)\psi(y).$$

Получили систему уравнений Вольтерра (18), (20) относительно двух неизвестных функций $\varphi(y)$, $\psi_1(y)$. Если определитель матрицы этой системы

$$\Delta_1(x,y) = \begin{vmatrix} \alpha_{01}^1(0,y) & \alpha_{11}^2(0,y) \\ \alpha_{01}^2(y,0) & \alpha_{11}^1(y,0) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (21)$$

то по формулам Крамера определим $\varphi(y)$. Потребуем выполнение условий

$$\beta_{01}^1(0,y) \equiv \beta_{00}^1(0,y) \equiv \beta_{10}^2(0,y) \equiv \beta_{10}^1(y,0) \equiv \beta_{01}^2(y,0) \equiv \beta_{00}^2(y,0) \equiv 0. \quad (22)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Задача* ΓN *однозначно редуцируется к задаче Гурса при выполнении условий* (21), (22).

Задача, в которой (4) заменяется на (17), в силу симметричности уравнения и заданных условий, рассматривается аналогично. Для задачи, в которой заменены оба условия (3), (4), сформулируем только ее постановку и условия редукции к задаче Гурса.

Задача NN. *Найти решение* $u \in C^{1,1}(D) \cap C(\overline{D})$ *уравнения* (15), *удовлетворяющее условиям* (16), (17).

Теорема 3. *Задача* NN *однозначно редуцируется к задаче Гурса при выполнении условий*

$$\begin{vmatrix} \alpha_{01}^1(0,y) - \alpha_{01}^2(y,0) & \alpha_{01}^2(0,y) - \alpha_{01}^1(y,0) \\ \alpha_{10}^1(x,0) - \alpha_{10}^2(0,x) & \alpha_{10}^2(x,0) - \alpha_{10}^1(0,x) \end{vmatrix} \neq 0,$$
$$\beta_{01}^i(y,0) \equiv \beta_{00}^i(y,0) \equiv \beta_{01}^i(0,y) \equiv \beta_{00}^i(0,y) \equiv 0,$$
$$\beta_{10}^i(x,0) \equiv \beta_{00}^i(x,0) \equiv \beta_{10}^i(0,x) \equiv \beta_{00}^i(0,x) \equiv 0, \quad i = 1,2.$$

Литература

[1] Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. *Уравнения с доминирующей частной производной* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2014).

[2] Зарубин А.Н. *Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом.* Учебн. пособие (ОГУ, Орел, 1997).

[3] Андреев А.А. *Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом*, Дифференц. уравнения **40** (5), 1126–1128 (2004).

[4] Уткина Е.А. *Характеристическая граничная задача для уравнения третьего порядка с псевдопараболическим оператором и со смещением аргументов искомой функции*, Изв. вузов. Матем., № 2, 54–60 (2014).

[5] Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Задачи с нормальными производными в граничных условиях для гиперболического уравнения со смещением аргументов искомой функции*, Дифференц. уравнения **50** (2), 223–228 (2014).

[6] Уткина Е.А. *Характеристическая граничная задача для уравнения четвертого порядка с псевдопараболическим оператором с смещением аргументов искомой функции*, Дифференц. уравнения **51** (3), 421–424 (2015).

[7] Уткина Е.А. *Характеристическая граничная задача для функционально-дифференциального уравнения третьего порядка с оператором Бианки*, Дифференц. уравнения **51** (12), 1641–1646 (2015).

[8] Бицадзе А.В. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1982).

[9] Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных* (Ин. лит., М, 1957).

[10] Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Трехмерные характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях*, Дифференц. уравнения **36** (6), 833–836 (2000).

[11] Уткина Е.А. *О задачах Гурса с дополнительными нормальными производными в краевых условиях*, Изв. вузов. Матем., № 4, 61–65 (2004).

[12] Уткина Е.А. *Повышение порядка нормальных производных в граничных условиях задачи Гурса*, Изв. вузов. Матем., № 4, 79–83 (2007).

[13] Utkina Ye.A., Maher A. *On problems reduced to the Goursat problem for a third order equation*, Iranian J. Sci. & Technology, Transaction A **30** (A3), 271–277 (2006).

[14] Maher A., Utkina A.Ye. *On problems reducing to the Goursat problem for fourth order equation*, Iranian J. Sci. & Technology, Transaction A **31** (A2), 163–170 (2007).

Е.А. Уткина

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: eutkina1@yandex.ru

E.A. Utkina

On one functional-differential quasilinear hyperbolic equation

Abstract. For functional-differential quasilinear hyperbolic equation not investigated earlier, we consider problems with conditions on characteristics and obtain conditions of solvability.

Keywords: quasilinear hyperbolic equation, Goursat problem, problem with normal derivatives in boundary conditions, equation with shift of arguments in sought-for function.

E.A. Utkina

Kazan Federal University,
18 Kemlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: eutkina1@yandex.ru