ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 517.43

Я.Г. БУЧАЕВ

ОЦЕНКИ НОРМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $q(x) \in L_1(0,1)$, $\lambda > 0$, $0 < m < \rho(x) < M < \infty$, $\rho(x) \in L_1(0,1)$, $x \in [0,1]$. Рассмотрим *задачу* (A) на собственные значения

$$-y'' + q(x)y = \lambda\rho(x)y, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

$$\int_0^1 \rho(x)|y(x)|^q dx = 1, \quad q \geq 1. \tag{3}$$

В пространстве $W_p^\theta[0,1]$ норму определим при целых θ как

$$\|f(x)\|_{W_p^\theta[0,1]} = \|f(x)\|_{L_p[0,1]} + \|f^{(\theta)}(x)\|_{L_p[0,1]}, \quad \theta = 0,1,2,$$
$$\|f(x)\|_{W_p^{-1}[0,1]} = \inf_{g(x)} \|g(x)\|_{L_p[0,1]},$$

где $g(x)$ — функции, удовлетворяющие соотношению $f(x) = g'(x)$, производная понимается в обобщенном смысле, а при дробных θ определяется либо с помощью операторов дробного дифференцирования, либо с помощью интерполяции (см., напр., [1]).

Условие (3) влечет эквивалентность $\|y_n(x)\|_{L_q}$ единице, что означает ограниченность переменной величины снизу и сверху константой, не зависящей от n.

В данной статье получены оценки для собственных функций $y_n(x)$ задачи (A) в пространствах $W_p^\theta[0,1]$ при $-1 \leq \theta \leq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, и в других пространствах, как, например, в $C^{\nu,\alpha}[0,1]$. Полученные вспомогательные утверждения о собственных функциях рассматриваемой задачи могут представлять и самостоятельный интерес.

Подобные задачи рассматривались в [2]–[5]. Однако это было сделано для норм в пространстве $C[0,1]$ при различных ограничениях на гладкость весовой функции.

Основным результатом работы является

Теорема. 1) *Пусть* $0 \leq \theta \leq 2$. *Тогда существуют константы* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *такие, что*

$$\|y_n(x)\|_{W_p^\theta[0,1]} \leq c_1 \lambda_n^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}} \quad \text{при} \ \ 1 \leq q < p \leq \infty;$$
$$\|y_n(x)\|_{W_p^\theta[0,1]} \leq c_2 \lambda_n^{\frac{\theta}{2}} \quad \text{при} \ \ 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

2) *Пусть* $-1 \leq \theta \leq 0$. *Тогда существуют константы* $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ *такие, что*

$$\|y_n(x)\|_{W_p^\theta[0,1]} \leq c_3 \lambda_n^{\frac{1+\theta}{2q}-\frac{1+\theta}{2p}} \quad \text{при} \ \ 1 \leq q < p \leq \infty;$$
$$\|y_n(x)\|_{W_p^\theta[0,1]} \leq c_4 \quad \text{при} \ \ 1 \leq p \leq q \leq \infty,$$

где $y_n(x)$ — *собственная функция задачи* (A), *соответствующая собственному числу* λ_n.

Сформулируем и докажем некоторые утверждения, которые необходимы для доказательства основной теоремы.

Рассматривая уравнение (1) с начальными условиями $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 1$, получим задачу Коши, которую будем называть *задачей* (B). Если $y(x,\lambda)$ — решение задачи (B) с $q(x) \equiv 0$, то справедливо

Утверждение 1. *Пусть z_1, z_2 — последовательные нули $y(x,\lambda)$, $h = \max\limits_{x\in[z_1,z_2]} |y(x,\lambda)|$. Тогда*

1) $\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda M}} \le z_2 - z_1 \le \dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda m}}$,

2) $\dfrac{\max(|y'(z_1,\lambda)|, |y'(z_2,\lambda)|)}{\sqrt{\lambda M}} \le h \le \dfrac{\min(|y'(z_1,\lambda)|, |y'(z_2,\lambda)|)}{\sqrt{\lambda m}}$,

3) $\sqrt{\dfrac{m}{M}} \le \left|\frac{y'(z_2,\lambda)}{y'(z_1,\lambda)}\right| \le \sqrt{\dfrac{M}{m}}$.

Доказательство. Рассмотрим следующие задачи Коши:
а) $-y''(x,\lambda) = \lambda\rho(x)y(x,\lambda)$, $y(z_i) = 0$, $y'(z_i) = \alpha_i$;
б) $-y_0''(x,\lambda) = \lambda M y_0(x,\lambda)$, $y_0(z_i) = 0$, $y_0'(z_i) = \alpha_i$;
в) $-y_1''(x,\lambda) = \lambda m y_1(x,\lambda)$, $y_1(z_i) = 0$, $y_1'(z_i) = \alpha_i$.

Пусть z_{i+1}^0 и z_{i+1}^1 — первые из нулей $y_0(x,\lambda)$ и $y_1(x,\lambda)$ соответственно, бо́льших, чем z_i. Тогда по теоремам сравнения Штурма [6] имеют место неравенства $z_{i+1}^0 \le z_{i+1} \le z_{i+1}^1$, $\max\limits_{x\in[z_i,z_{i+1}^0]} |y_0(x,\lambda)| \le \max\limits_{x\in[z_i,z_{i+1}]} |y(x,\lambda)| \le \max\limits_{x\in[z_i,z_{i+1}^1]} |y_1(x,\lambda)|$, т. к. $m \le \rho(x) \le M$. Решения задач б) и в) находятся в явном виде $y_0(x,\lambda) = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda M}} \sin\sqrt{\lambda M}(x-z_i)$, $y_1(x,\lambda) = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda m}} \sin\sqrt{\lambda m}(x-z_i)$. Поэтому $\max|y_0(x,\lambda)| = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda M}}$, $\max|y_1(x,\lambda)| = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda m}}$ и $z_{i+1}^0 = z_i + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda M}}$, $z_{i+1}^1 = z_i + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda m}}$. Следовательно,

$$z_i + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda M}} \le z_{i+1} \le z_i + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda m}} \tag{4}$$

и

$$\frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda M}} \le \max_{x\in[z_i,z_{i+1}]} |y(x,\lambda)| \le \frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda m}}, \tag{5}$$

а потому из (4) получим неравенство 1). Неравенство

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\sqrt{\lambda M}} \le \max_{x\in[z_i,z_{i+1}]} |y(x,\lambda)| \le \frac{\alpha_{i+1}}{\sqrt{\lambda m}} \tag{6}$$

может быть получено аналогично, если вместо задач а), б), в) рассмотреть задачи с теми же весовыми функциями, но поставленными в точке z_{i+1} с начальными условиями 0 и α_{i+1}. Тогда из (5) и (6) следует неравенство 2).

Из доказанного неравенства 2) следует $\frac{\max(\alpha_i,\alpha_{i+1})}{\sqrt{\lambda M}} \le \frac{\min(\alpha_i,\alpha_{i+1})}{\sqrt{\lambda m}}$, поэтому $\frac{\max(\alpha_i,\alpha_{i+1})}{\min(\alpha_i,\alpha_{i+1})} \le \sqrt{\frac{M}{m}}$, но левая часть этого неравенства не меньше, чем $\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}$ и $\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}$ (равно их максимуму). Значит, $\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \le \sqrt{\frac{M}{m}}$ и $\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \le \sqrt{\frac{M}{m}}$. Аналогично из неравенства $\frac{\min(\alpha_i,\alpha_{i+1})}{\max(\alpha_i,\alpha_{i+1})} \le \sqrt{\frac{m}{M}}$ вытекает $\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \ge \sqrt{\frac{m}{M}}$ и $\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \ge \sqrt{\frac{m}{M}}$. Таким образом, доказано неравенство 3). $\square$

Лемма 1. *Пусть z_1 и z_2 — два последовательных нуля решения $y(x,\lambda)$ задачи* (B). *Тогда существуют константы $c_i > 0$, $i = \overline{1,4}$, не зависящие от λ такие, что*

1) $\dfrac{c_1}{\sqrt{\lambda}} \le z_2 - z_1 \le \dfrac{c_2}{\sqrt{\lambda}}$,

2) $c_3 \le \left|\dfrac{y'(z_2,\lambda)}{y'(z_1,\lambda)}\right| \le c_4$, $c_3 \le 1$, $c_4 \ge 1$.

Доказательство. Обозначим $f(x) = q(x)y(x)$ и запишем уравнение (1) в виде $y''(x) + \lambda\rho(x)y(x) = f(x)$. Пусть x_1 — точка экстремума $y(x,\lambda)$ на промежутке (z_1, z_2), а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — решения уравнения $y''(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$ с начальными условиями $\varphi(x_1) = 0$, $\varphi'(x_1) = 1$ и $\psi(x_1) = 1$, $\psi'(x_1) = 0$. Тогда, применяя метод вариации произвольных постоянных, получим соотношение

$$y(x,\lambda) = [a\varphi(x) + b\psi(x)] + \int_{x_1}^{x} [\varphi(x)\psi(t) - \psi(x)\varphi(t)]f(t)dt,$$

из $f(t) = q(t)y(t,\lambda)$ и $y'(x_1,\lambda) = 0$ следует

$$y(x,\lambda) = y(x_1,\lambda)\psi(x) + \int_{x_1}^{x} q(t)[\varphi(x)\psi(t) - \psi(x)\varphi(t)]y(t,\lambda)dt,$$

дифференцируя это соотношение, получим

$$y'(x,\lambda) = y(x_1,\lambda)\psi'(x) + \int_{x_1}^{x} q(t)[\varphi'(x)\psi(t) - \psi'(x)\varphi(t)]y(t,\lambda)dt.$$

Обозначим через z_0', z_1', z_2' и z_4' четыре последовательных нуля $\psi(x)$ таких, что $z_1' < x_1 < z_2'$, а через z_1'' и z_2'' — нули $\varphi(x)$ такие, что числа z_1'', x_1, z_2'' являются тремя последовательными нулями. Тогда из теоремы о чередовании нулей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следует, что $z_0' < z_1'' < z_1' < x_1 < z_2' < z_2'' < z_3'$, при этом на участках $[z_0', z_1'')$ и $(z_2'', z_3']$ нет нулей $\varphi(x)$.

Применяя первое неравенство из утверждения 1 к парам нулей z_0' и z_1', z_1' и z_2', z_2' и z_3' функции $\psi(x)$, получим $\frac{3\pi}{\sqrt{\lambda M}} \le (z_3' - z_2') + (z_2' - z_1') + (z_1' - z_0') \le \frac{3\pi}{\sqrt{\lambda m}}$ или $\frac{3\pi/\sqrt{M}}{\sqrt{\lambda}} \le z_3' - z_0' \le \frac{3\pi/\sqrt{m}}{\sqrt{\lambda}}$.

Если показать, что при всех достаточно больших значениях λ имеют место неравенства $z_0' \le z_1 < z_2 \le z_3'$, то правая часть первого неравенства леммы будет доказана (т. к. нули — монотонные, непрерывные функции λ, то, взяв достаточно малое число $c_1 > 0$ и большое число $c_2 > 0$, добьемся выполнения первого неравенства и при малых значениях λ).

Применяя к $\varphi(x)$ неравенство 3) утверждения 1 и учитывая, что $\varphi'(x_1) = 1$, получим $\sqrt{\frac{m}{M}} \le |\varphi'(z_1'')| \le \sqrt{\frac{M}{m}}$ и $\sqrt{\frac{m}{M}} \le |\varphi'(z_2'')| \le \sqrt{\frac{M}{m}}$. Таким образом, в силу неравенства 2) утверждения 1 имеем $\max\limits_{x\in[z_0',z_3']} |\varphi(x)| \le \frac{\sqrt{M}}{m\sqrt{\lambda}}$, а применив неравенство 2) к функции $\psi(x)$ на участках $[z_0', z_1']$, $[z_1', z_2']$, $[z_2', z_3']$, получим $\max\limits_{x\in[z_0',z_1']} |\psi(x)| \le \frac{|\psi'(z_1',\lambda)|}{\sqrt{\lambda m}}$; $1 = \max\limits_{x\in[z_1',z_2']} |\psi(x)| \ge \frac{|\psi'(z_1')|}{\sqrt{\lambda M}}$, $1 \ge \frac{|\psi'(z_2')|}{\sqrt{\lambda M}}$; $\max\limits_{x\in[z_2',z_3']} |\psi(x)| \le \frac{|\psi'(z_2')|}{\sqrt{\lambda m}}$, откуда следует $|\psi'(z_1')| \le \sqrt{\lambda M}$ и $|\psi'(z_2')| \le \sqrt{\lambda M}$. Поэтому

$$\max_{x\in[z_0',z_1']} |\psi(x)| \le \frac{|\psi'(z_1')|}{\sqrt{\lambda m}} \le \frac{\sqrt{\lambda M}}{\sqrt{\lambda m}} = \sqrt{\frac{M}{m}}, \quad \max_{x\in[z_2',z_3']} |\psi(x)| \le \frac{|\psi'(z_2')|}{\sqrt{\lambda m}} \le \frac{\sqrt{\lambda M}}{\sqrt{\lambda m}} = \sqrt{\frac{M}{m}},$$

следовательно, $\max\limits_{x\in[z_0',z_3']} |\psi(x)| \le \sqrt{\frac{M}{m}}$.

Из полученных неравенств для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следует

$$|\varphi(x)\psi(t) - \psi(x)\varphi(t)| \le |\varphi(x)|\,|\psi(t)| + |\psi(x)|\,|\varphi(t)| \le \frac{\sqrt{M}}{m\sqrt{\lambda}}\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{M}{m}}\frac{\sqrt{M}}{m\sqrt{\lambda}} = \frac{2M}{m\sqrt{\lambda m}}.$$

Используя это неравенство, из интегрального соотношения для $y(x,\lambda)$ получим оценки

$$|y(x,\lambda) - y(x_1,\lambda)\psi(x)| \le \left| \int_{x_1}^{x} q(t)\frac{2M}{m\sqrt{m\lambda}} y(t,\lambda)dt \right|.$$

Так как $\max|y(t,\lambda)| = |y(x_1,\lambda)|$ на участке $[\overline{z}_1, \overline{z}_2] = [z_1, z_2] \cap [z_0', z_3']$, то

$$|y(x,\lambda) - y(x_1,\lambda)\psi(x)| \le \left| \int_{x_1}^{x} q(t)\frac{2M}{m\sqrt{m\lambda}} y(x_1,\lambda)dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x} q(t)dt \right| |y(x_1,\lambda)| \frac{2M}{m\sqrt{\lambda m}},$$

или, т. к. $q(t)$ — суммируемая функция,

$$|y(x,\lambda)-y(x_1,\lambda)\psi(x)|\le\frac{c|y(x_1,\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\quad\text{или}\quad\left|\frac{y(x,\lambda)}{y(x_1,\lambda)}-\psi(x)\right|\le\frac{c}{\sqrt{\lambda}}.$$

Если $[z_1,z_2]$ не содержится в $[z'_0,z'_3]$, то имеет место хотя бы одно из неравенств $z_1<z'_0$ или $z_2<z'_3$. Предположим для определенности, что $z_1<z'_0$. Тогда $\overline{z}_1<z'_0$ и $[z'_0,x_1]\subset[\overline{z}_1,\overline{z}_2]$. Пусть x_0 — точка экстремума $\psi(x)$ на $[z'_0,z'_1]$. Применяя неравенство 2) утверждения 1, можно показать, что $|\psi(x_0)|\ge\sqrt{\frac{m}{M}}$ (точно так же, как было показано, что $|\psi(x_0)|\le\sqrt{\frac{M}{m}}$), а т. к. $x_0\in(z'_0,z'_1)\subset[z'_0,x_1]\subset[\overline{z}_1,\overline{z}_2]$, то

$$\left|\frac{y(x_0,\lambda)}{y(x_1,\lambda)}-\psi(x_0)\right|\le\frac{c}{\sqrt{\lambda}}.\tag{7}$$

Поскольку $\psi(x_1)=1>0$, то $\psi(x_0)<0$, поэтому $\psi(x_0)=-|\psi(x_0)|$. Отсюда $\left|\frac{y(x_0,\lambda)}{y(x_1,\lambda)}-|\psi(x_0)|\right|<\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ или $-|\psi(x_0)|-\frac{c}{\sqrt{\lambda}}<\frac{y(x_0,\lambda)}{y(x_1,\lambda)}<-|\psi(x_0)|+\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$. Следовательно, $\frac{y(x_0,\lambda)}{y(x_1,\lambda)}<-\sqrt{\frac{m}{M}}+\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$, и при больших λ $y(x_0,\lambda)$ и $y(x_1,\lambda)$ имеют разные знаки, что противоречит отсутствию нуля $y(x,\lambda)$ на $[z'_0,x_1]$.

Отсюда $z_2-z_1\le\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$, и осталось показать, что $\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}}\le z_2-z_1$.

Пусть t_1 и t_2 — корни уравнения $\psi(x)=\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$, принадлежащие $[z'_1,z'_2]$ (таких корней ровно два, т. к. $\psi(x)$ выпукла на $[z'_1,z'_2]$ и $\psi(z'_1)=\psi(z'_2)=0$, $\psi(x_1)=1$ и λ достаточно большое). Ввиду (7) $y(x,\lambda)$ не имеет корней на интервале (t_1,t_2).

Оценим длину промежутка $[t_1,t_2]$ снизу, для чего проведем прямые, проходящие через точки $A(z'_1,0)$, $B(x_1,1)$ и $C(z'_2,0)$, $B(x_1,1)$ (см. рис. 1).

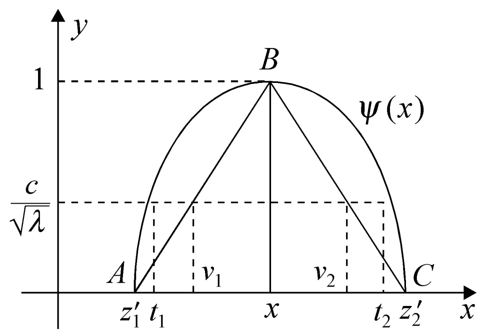

Рис. 1

Так как $\psi(x)$ выпукла на $[z'_1,z'_2]$, то $t_1<v_1$, а $t_2>v_2$, где v_1 и v_2 — абсциссы пересечения прямых (AB) и $y=\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ и (CB) и $y=\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ соответственно. Найдем v_1 и v_2. Прямая (AB) задается уравнением $\frac{y}{x-z'_1}=\frac{1}{x_1-z'_1}$, v_1 удовлетворяет уравнению $\frac{c}{\sqrt{\lambda}(v_1-z'_1)}=\frac{1}{x_1-z'_1}$, отсюда $v_1=z'_1+\frac{c(x_1-z'_1)}{\sqrt{\lambda}}$. Прямая (CB) задается уравнением $\frac{y}{x-z'_2}=\frac{1}{x_1-z'_2}$, v_2 удовлетворяет уравнению $\frac{c}{\sqrt{\lambda}(v_2-z'_2)}=\frac{1}{x_1-z'_2}$, отсюда $v_2=z'_2+\frac{c(x_1-z'_2)}{\sqrt{\lambda}}$. Следовательно, $v_2-v_1=z'_2-z'_1+\frac{c(x_1-z'_2)}{\sqrt{\lambda}}-\frac{c(x_1-z'_1)}{\sqrt{\lambda}}=z'_2-z'_1+\frac{c(z'_1-z'_2)}{\sqrt{\lambda}}$ или $v_2-v_1=(z'_2-z'_1)\big(1-\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\big)$. Отсюда, учитывая неравенство 1) утверждения 1, $z_2-z_1>v_2-v_1\ge\frac{\pi}{\sqrt{\lambda M}}\big(1-\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\big)$ и неравенство 1) леммы доказано.

Из оценок, полученных ранее для $|\varphi'(z''_1)|$ и $|\varphi'(z''_2)|$, следует $\max\limits_{x\in[z'_0,z'_3]}|\varphi'(x)|\le\sqrt{\frac{M}{m}}$. Из оценок $|\psi'(z'_1)|\le\sqrt{\lambda M}$, $|\psi'(z'_2)|\le\sqrt{\lambda M}$ и неравенства 3) утверждения 1 следует $|\psi'(z'_0)|\le\sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{\lambda M}=$

$\frac{M}{\sqrt{m}}\sqrt{\lambda}$ и $|\psi'(z_3')| \leq \frac{M}{\sqrt{m}}\sqrt{\lambda}$. Поэтому $\max\limits_{x\in[z_0',z_3']}|\psi'(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{m}}\sqrt{\lambda}$. Таким образом,

$$\varphi'(x)\psi(t) - \psi'(x)\varphi(t) \leq |\varphi'(x)|\,|\psi(t)| + |\psi'(x)|\,|\varphi(t)| \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{\frac{M}{m}} + \frac{M}{\sqrt{m}}\sqrt{\lambda}\frac{\sqrt{M}}{m\sqrt{\lambda}} = \frac{M}{m} + \frac{M}{m}\sqrt{\frac{M}{m}} = \frac{M}{m}\Big(1 + \sqrt{\frac{M}{m}}\Big).$$

Подставляя полученное неравенство в интегральное соотношение для $y'(x,\lambda)$, получим оценки

$$|y'(x,\lambda) - y(x_1,\lambda)\psi'(x)| \leq \Big|\int_{x_1}^{x} q(t)\frac{M}{m}\Big(1+\sqrt{\frac{M}{m}}\Big)y(t,\lambda)dt\Big|.$$

Так как на участке $[z_1, z_2]$ $\max|y(t,\lambda)| = |y(x_1,\lambda)|$, то на этом участке

$$|y'(x,\lambda) - y(x_1,\lambda)\psi'(x)| \leq \Big|\int_{x_1}^{x} q(t)\frac{M}{m}\Big(1+\sqrt{\frac{M}{m}}\Big)y(x_1,\lambda)dt\Big| = \frac{M}{m}\Big(1+\sqrt{\frac{M}{m}}\Big)|y(x_1,\lambda)|\Big|\int_{x_1}^{x} q(t)dt\Big|,$$

а т. к. $q(t)$ — суммируемая функция, то $|y'(x,\lambda) - y(x_1,\lambda)\psi'(x)| \leq c|y(x_1,\lambda)|$, или $\left|\frac{y'(x,\lambda)}{y(x_1,\lambda)} - \psi'(x)\right| \leq c$, или $\psi'(x) - c \leq \frac{y'(x,\lambda)}{y(x_1,\lambda)} \leq \psi'(x) + c$.

Как было показано при доказательстве неравенства 1), $|z_i - z_i'| \leq \frac{c}{\sqrt{\lambda}}$, $i = 1, 2$, поэтому ввиду непрерывности $\psi'(x)$ существует константа $\overline{c}$ такая, что $|\psi'(z_i) - \psi'(z_i')| < \overline{c}$ или $\psi'(z_i') - \overline{c} < \psi'(z_i) < \psi'(z_i') + \overline{c}$. Отсюда и из неравенства $\psi'(x) - c \leq \frac{y'(x,\lambda)}{y(x_1,\lambda)} \leq \psi'(x) + c$, взятого при $x = z_1$ и $x = z_2$, следует

$$\frac{|\psi'(z_2')| + c + \overline{c}}{|\psi'(z_1')| - c - \overline{c}} \geq \left|\frac{y'(z_2,\lambda)}{y'(z_1,\lambda)}\right| \geq \frac{|\psi'(z_2)| - c - \overline{c}}{|\psi'(z_1)| + c + \overline{c}}.$$

Из утверждения 1 следует $\psi'(z_i') > c\sqrt{\lambda}$, потому при достаточно больших λ

$$2\left|\frac{\psi'(z_2')}{\psi'(z_1')}\right| \geq \left|\frac{y'(z_2,\lambda)}{y'(z_1,\lambda)}\right| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{\psi'(z_2)}{\psi'(z_1)}\right|.$$

Отсюда и из неравенства 3) утверждения 1 следует неравенство 2) леммы. □

Утверждение 2. *Пусть* $0 < c_0 \leq g(x) \leq c_1$, $g(x)$ *суммируема на* $[a,b]$, $f(x)$ *— выпуклая, неотрицательная, непрерывная функция на* $[a,b]$. *Тогда имеют место неравенства*

$$c_0\frac{[\max f(x)]^q}{q+1}(b-a) \leq \int_a^b g(x)f^q(x)dx \leq c_1[\max f(x)]^q(b-a).$$

Доказательство. Подставляя в интеграл c_1 вместо $q(x)$ и $\max f(x)$ вместо $f(x)$, получим правую часть неравенства. Пусть x_0 — точка, в которой достигается $\max f(x) = h$ (см. рис. 2). Тогда имеют место неравенства

$$\frac{h}{x_0 - a}(x-a) \leq f(x) \quad \text{при} \quad a \leq x \leq x_0, \tag{8}$$

$$\frac{h}{b - x_0}(b-x) \leq f(x) \quad \text{при} \quad x_0 \leq x \leq b. \tag{9}$$

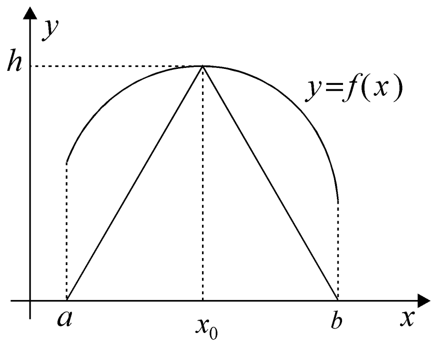

Рис. 2

Из (8), (9) получим

$$\int_a^b g(x)f^q(x)dx = \int_a^{x_0} g(x)f^q(x)dx + \int_{x_0}^b g(x)f^q(x)dx \geq \int_a^{x_0} c_0\left[\frac{h}{x_0-a}(x-a)\right]^q dx +$$

$$+\int_{x_0}^b c_0\left[\frac{h}{b-x_0}(b-x)\right]^q dx = c_0\frac{h^q}{(x_0-a)^q}\int_a^{x_0}(x-a)^q dx + c_0\frac{h^q}{(b-x_0)^q}\int_{x_0}^b (b-x)^q dx =$$

$$c_0\frac{h^q}{(x_0-a)^q}\left[\frac{(x-a)^{q+1}}{q+1}\Big|_a^{x_0}\right] + c_0\frac{h^q}{(b-x_0)^q}\left[\frac{-(b-x)^{q+1}}{q+1}\Big|_{x_0}^b\right] =$$

$$= c_0\frac{h^q}{q+1}(x_0-a) + c_0\frac{h^q}{q+1}(b-x_0) = c_0\frac{h^q}{q+1}(b-a). \quad \square$$

Продолжим решение задачи (B) на $[-\infty,+\infty]$, считая $q(x)\equiv 0$, если $x<0$ или $x>1$, а $\rho(x)\equiv\rho(0)$, если $x<0$, и $\rho(x)\equiv\rho(1)$, если $x>1$.

Лемма 2. *Пусть $z_0, z_1, \ldots, z_m$ — нули решения $y(x,\lambda)$ задачи* (B) *такие, что $z_0\leq 0\leq z_1\leq z_2\leq\cdots\leq z_{m-1}<1\leq z_m$ ($y(x,\lambda)$ продолжена на $[-\infty,+\infty]$, $h_i=\max\limits_{x\in[z_i,z_{i+1}]}|y(x,\lambda)|$, x_i — точка экстремума: $h_i=|y(x_i,\lambda)|$, $1\leq p<\infty$). Тогда имеют место неравенства*

1) $\left(\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{i=0}^{m-1}h_i^p\right)^{1/p}\leq\left(\int_0^1|y(x,\lambda)|^p dx\right)^{1/p}\leq\left(\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{i=0}^{m-1}h_i^p\right)^{1/p}$;

2) $\left(\int_0^1|y'(x,\lambda)|^p dx\right)^{1/p}\leq\sqrt{\lambda}\left(\frac{c_3}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{i=0}^{m-1}h_i^p\right)^{1/p}$, *где c_1, c_2, c_3 — константы, не зависящие от λ.*

Доказательство. Рассмотрим два последовательных нуля z_i, z_{i+1}. На участке $[z_i,z_{i+1}]$, как было показано при доказательстве леммы 1, имеет место неравенство $|\frac{y(x,\lambda)}{h_i}-\psi(x)|<\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$, где $\psi(x)$ — решение задачи Коши $\{-y''(x)=\lambda\rho(x)y(x),\ y'(x_i)=0,\ y(x_i)=1\}$. Следовательно, для $\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}}|y(x,\lambda)|^p dx = h_i^p\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}}|\frac{y(x,\lambda)}{h_i}|^p dx$ имеют место оценки

$$h_i^p\int_{z_i'}^{z_{i+1}'}\left|\psi(x)-\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\right|^p dx<\int_{z_i}^{z_{i+1}}|y(x,\lambda)|^p dx<h_i^p\int_{z_i}^{z_{i+1}}\left|\psi(x)+\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\right|^p dx,$$

где z_i', z_{i+1}' — нули $\psi(x)-\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$, находящиеся на $[z_i,z_{i+1}]$. Так как $\psi(x)$, а значит, и $\psi(x)\pm\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ выпуклые, то для оценки левой и правой частей полученного неравенства можно применить утверждение 2. Таким образом, имеют место неравенства

$$h_i^p c_0(z_{i+1}'-z_i')\left(1-\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\right)^p<\int_{z_i}^{z_{i+1}}|y(x,\lambda)|^p dx<h_i^p(z_{i+1}-z_i)\left(1+\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\right)^p$$

(при выводе неравенства учтено, что $\max|\psi(x)-\frac{c}{\sqrt{\lambda}}|=1-\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$, а $\max|\psi(x)+\frac{c}{\sqrt{\lambda}}|=1+\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$).

При доказательстве леммы 1 было показано, что $z'_{i+1}-z'_i>v_2-v_1>c_1(z_{i+1}-z_i)$, где $0<c_1<1$, и потому

$$h_i^p c_0 c_1 (z_{i+1}-z_i)\left(1-\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\right)^p<\int_{z_i}^{z_{i+1}}|y(x,\lambda)|^p dx<h_i^p(z_{i+1}-z_i)\left(1+\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\right)^p.$$

Учитывая, что при больших λ справедливы неравенства $(1-\frac{c}{\sqrt{\lambda}})^p>\frac{1}{2}$, $(1+\frac{c}{\sqrt{\lambda}})^p<2$, и обозначая константы, не зависящие от λ, через c_i, получим

$$c_1 h_i^p(z_{i+1}-z_i)<\int_{z_i}^{z_{i+1}}|y(x,\lambda)|^p dx<c_2 h_i^p(z_{i+1}-z_i).$$

Далее, учитывая неравенство 1) леммы 1 и снова обозначая константы, не зависящие от λ, через c_i, получим

$$\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}}h_i^p<\int_{z_i}^{z_{i+1}}|y(x,\lambda)|^p dx<\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}}h_i^p.$$

Очевидно,

$$\int_{z_1}^{z_{m-1}}|y(x,\lambda)|^p dx<\int_0^1|y(x,\lambda)|^p dx\le\int_{z_0}^{z_m}|y(x,\lambda)|^p dx$$

или

$$\sum_{i=1}^{m-2}\int_{z_i}^{z_{i+1}}|y(x,\lambda)|^p dx<\int_0^1|y(x,\lambda)|^p dx\le\sum_{i=0}^{m-1}\int_{z_i}^{z_{i+1}}|y(x,\lambda)|^p dx.$$

Учитывая неравенства для интегралов под знаками сумм, из последнего неравенства получим

$$\sum_{i=1}^{m-2}\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}}h_i^p<\int_0^1|y(x,\lambda)|^p dx<\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}}h_i^p.$$

Так как при больших λ справедливы неравенства $\frac{h_0}{h_1}<2\sqrt{\frac{M}{m}}$ и $\frac{h_{m-1}}{h_{m-2}}<2\sqrt{\frac{M}{m}}$, то в левую часть можно добавить члены с $i=0$ и $i=m-1$ (при этом c_1 несколько уменьшится). В результате получим

$$\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}}h_i^p<\int_0^1|y(x,\lambda)|^p dx<\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}}h_i^p.$$

Вынося из-под знаков суммы величины $\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}}$ и $\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}}$, не зависящие от индекса суммирования, и возводя получившееся неравенство в степень $\frac{1}{p}$, получим неравенство 1) леммы.

Теперь покажем справедливость неравенства 2). Как показано при доказательстве леммы 1, на отрезке $[z_i,z_{i+1}]$ имеет место неравенство $|\frac{y'(x,\lambda)}{h_i}-\psi'(x)|<c$ и при этом $\max|\psi'(x)|=\max(|\psi'(\overline{z}_i)|,|\psi'(\overline{z}_{i+1})|)$, где $\overline{z}_i$, $\overline{z}_{i+1}$ — нули $\psi(x)$. Так как в силу утверждения 1 $\max(|\psi'(\overline{z}_i)|,|\psi'(\overline{z}_{i+1})|)<c_0\sqrt{\lambda}$, то для всех $x\in[z_i,z_{i+1}]$ $|\frac{y'(x,\lambda)}{h_i}|<|\psi'(x)|+c<c_0\sqrt{\lambda}+c<\overline{c}_0\sqrt{\lambda}$ (при больших λ очевидно, $c_0\sqrt{\lambda}+c<\overline{c}_0\sqrt{\lambda}$ для $\overline{c}_0>c_0$), получим $|y'(x,\lambda)|<\overline{c}_0\sqrt{\lambda}h_i$, и

$$\int_0^1|y'(x,\lambda)|^p dx\le\int_{z_0}^{z_m}|y'(x,\lambda)|^p dx=\sum_{i=0}^{m-1}\int_{z_i}^{z_{i+1}}|y'(x,\lambda)|^p dx<$$

$$<\sum_{i=0}^{m-1}\int_{z_i}^{z_{i+1}}|\overline{c}_0\sqrt{\lambda}h_i|^p dx=\sum_{i=0}^{m-1}\overline{c}_0^p(\sqrt{\lambda})^p h_i^p(z_{i+1}-z_i),$$

или, оценивая по неравенству 1) леммы 1 разность $z_{i+1}-z_i$, имеем

$$\int_0^1|y'(x,\lambda)|^p dx<(\sqrt{\lambda})^p\frac{c_3}{\sqrt{\lambda}}\sum_{i=0}^{m-1}h_i^p.$$

Возводя последнее неравенство в степень $\frac{1}{p}$, получим неравенство 2) леммы. $\square$

Доказательство теоремы при целых значениях $\theta = 0, 1, 2$. Так как неравенства 1) леммы 2 доказаны при произвольном $p \geq 1$, то они справедливы, в частности, при $p = q$. Поэтому для отношения $\|y(x,\lambda)\|_{L_p} / \|y(x,\lambda)\|_{L_q}$ имеем

$$\Big(\int_0^1 |y(x,\lambda)|^p dx\Big)^{1/p} \Big/ \Big(\int_0^1 |y(x,\lambda)|^q dx\Big)^{1/q} \leq \Big(\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=0}^{m-1} h_i^p\Big)^{1/p} \Big/ \Big(\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=0}^{m-1} h_i^q\Big)^{1/q} =$$
$$= c\Big(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^p\Big)^{1/p} \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^q\Big)^{1/q} \lambda^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}}$$

(числитель оценен сверху, а знаменатель снизу).

Известно [7], что если $p < q$, то $\left(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^p\right)^{1/p} \Big/ \left(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^q\right)^{1/q} < m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. Поскольку из неравенства 1) леммы 1 следует $\frac{c(m-2)}{\sqrt{\lambda}} < \sum_{i=0}^{m-2}(z_{i+1} - z_i) < 1$, то $m < c\sqrt{\lambda}$. Имеем $\left(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^p\right)^{1/p} \Big/ \left(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^q\right)^{1/q} < c\lambda^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}}$, отсюда $\Big(\int\limits_0^1 |y(x,\lambda)|^p dx\Big)^{1/p} \Big/ \Big(\int\limits_0^1 |y(x,\lambda)|^q dx\Big)^{1/q} < c\lambda^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \lambda^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}} = c.$

Покажем, что если $p \geq q$, то $\left(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^p\right)^{1/p} \Big/ \left(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^q\right)^{1/q} \leq 1$, и потому
$\Big(\int\limits_0^1 |y(x,\lambda)|^p dx\Big)^{1/p} \Big/ \Big(\int\limits_0^1 |y(x,\lambda)|^q dx\Big)^{1/q} < c\lambda^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}}$.

Для этого рассмотрим функцию $F(x) = \Big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} h_i^x\Big)^{1/x}$. Пусть $h = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} h_i$. Так как $a^x = e^{x \ln a}$, то $F(x) = \Big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} e^{x \ln h_i}\Big)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{x \ln h_i}\right)}$. Найдем

$$F'(x) = \Big[-\frac{1}{x}\ln\Big(\sum_{i=0}^{n-1} e^{x\ln h_i}\Big) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} e^{x\ln h_i}\ln h_i}{\sum_{i=0}^{n-1} e^{x\ln h_i}}\Big]\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{x \ln h_i}\right)}.$$

Учитывая, что $e^{x \ln a} = a^x$, получим

$$F'(x) = \Big[-\frac{1}{x}\ln\Big(\sum_{i=0}^{n-1} h_i^x\Big) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} h_i^x \ln h_i}{\sum_{i=0}^{n-1} h_i^x}\Big]\frac{1}{x}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} h_i^x\Big)^{1/x}.$$

Таким образом, знак $F'(x)$ зависит от знака выражения в квадратных скобках. Заметим, что

$$-\frac{1}{x}\ln\Big(\sum_{i=0}^{n-1} h_i^x\Big) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} h_i^x \ln h_i}{\sum_{i=0}^{n-1} h_i^x} = -\frac{1}{x}\ln\Big(h^x \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_i^x}{h^x}\Big) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(\frac{h_i}{h}h\right)h_i^x}{\sum_{i=0}^{n-1} h_i^x} =$$
$$= -\frac{1}{x}\ln\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_i^x}{h^x}\Big) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(\frac{h_i}{h}\right)h_i^x}{\sum_{i=0}^{n-1} h_i^x}. \quad (10)$$

По выбору h для некоторого j верно $\frac{h_j^x}{h^x} = 1$ $(h_j = h)$, а для остальных i верно $\frac{h_i^x}{h^x} > 0$, значит, $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{h_i^x}{h^x} > 1$, отсюда $\ln\Big(\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{h_i^x}{h^x}\Big) > 0$. Таким образом, первое слагаемое в (10) отрицательное. Так как $\frac{h_i}{h} \leq 1$, то $\ln(\frac{h_i}{h}) \leq 0$, а потому и второе слагаемое в (10) не положительное. Отсюда следует, что $F'(x) \leq 0$ и $F(x)$ монотонно убывает с ростом x. Если $p \geq q$, то $\Big(\sum\limits_{i=0}^{m-1} h_i^p\Big)^{1/p} \Big/ \Big(\sum\limits_{i=0}^{m-1} h_i^q\Big)^{1/q} \leq 1$, что доказывает оценку $\Big(\int\limits_0^1 |y(x,\lambda)|^p dx\Big)^{1/p} \Big/ \Big(\int\limits_0^1 |y(x,\lambda)|^q dx\Big)^{1/q} < c\lambda^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}}$ при $p \geq q$.

Оценивая в отношении $\|y'(x,\lambda)\|_{L_p}/\|y(x,\lambda)\|_{L_q}$ числитель согласно неравенству 2) леммы 2, а знаменатель снизу согласно неравенству 1) леммы 2, получим

$$\left(\int_0^1 |y'(x,\lambda)|^p dx)^{1/p}\right) \Big/ \left(\int_0^1 |y(x,\lambda)|^q dx)^{1/q}\right) \le$$
$$\le \sqrt{\lambda}\left(\frac{c_3}{\sqrt{\lambda}}\sum_{i=0}^{m-1} h_i^p\right)^{1/p} \Big/ \left(\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{i=0}^{m-1} h_i^q\right)^{1/q} = c\left(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^p\right)^{1/p} \Big/ \left(\sum_{i=0}^{m-1} h_i^q\right)^{1/q} \lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}}.$$

В точности повторяя вышеприведенные рассуждения, получим

а) если $p<q$, то $\left(\int\limits_0^1 |y'(x,\lambda)|^p dx\right)^{1/p} \Big/ \left(\int\limits_0^1 |y(x,\lambda)|^q dx\right)^{1/q} < c\lambda^{1/2}$;

б) если $p \ge q$, то $\left(\int\limits_0^1 |y'(x,\lambda)|^p dx\right)^{1/p} \Big/ \left(\int\limits_0^1 |y(x,\lambda)|^q dx\right)^{1/q} < c\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}}$.

Так как имеет место вложение $W_p^1[0,1] \subset C[0,1] \subset L_p[0,1]$, где $W_p^1[0,1] \subset C[0,1]$ компактно, то, применяя лемму 16.4 ([8]), из уравнения (1) получим

$$\|y''(x,\lambda)\|_{L_p} \le \lambda\|\rho(x)y(x,\lambda)\|_{L_p} + \|q(x)y(x,\lambda)\|_{L_p} \le c\lambda\|y(x,\lambda)\|_{L_p} + \|q(x)y(x,\lambda)\|_{L_p}.$$

Оценим норму $\|q(x)y(x,\lambda)\|_{L_p}$, используя ту же лемму из [8]

$$\|q(x)y(x,\lambda)\|_{L_p} \le |y(x,\lambda)|\,\|q(x)\|_{L_1} \le \|y(x,\lambda)\|_C\|q(x)\|_{L_1} \le c(\varepsilon\|y(x,\lambda)\|_{W_p^1} + c_1(\varepsilon)\|y(x,\lambda)\|_{L_p}),$$

где ε можно брать произвольным (напр., 1/2 или 1/4). Тогда

$$\|y''(x,\lambda)\|_{L_p} \le c\lambda\|y(x,\lambda)\|_{L_p} + c(\varepsilon\|y(x,\lambda)\|_{W_p^1} + c_1(\varepsilon)\|y(x,\lambda)\|_{L_p}). \tag{11}$$

Ввиду (11), а также оценок, полученных выше, имеем

$$\text{а)}\quad \text{если } p<q, \text{ то}\quad \left(\int_0^1 |y''(x,\lambda)|^p dx\right)^{1/p} \Big/ \left(\int_0^1 |y(x,\lambda)|^q dx\right)^{1/q} < c\lambda; \tag{12}$$

$$\text{б)}\quad \text{если } p\ge q, \text{ то}\quad \left(\int_0^1 |y''(x,\lambda)|^p dx\right)^{1/p} \Big/ \left(\int_0^1 |y(x,\lambda)|^q dx\right)^{1/q} < c\lambda^{1+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}}. \tag{13}$$

Так как при больших λ оценки (12), (13) больше оценок соответствующих норм для $y(x,\lambda)$, то, учитывая условие (3) для $x_0=0$ и $y_n(x)=cy(x,\lambda_n)$, получим, что п. 1) теоремы при значениях $\theta=0,1,2$ доказан.

Докажем п. 1) теоремы при произвольном $0\le\theta\le 2$. В случае $1<q<p<\infty$ получить оценки для собственных функций задачи (A) в пространствах $W_p^\theta[0,1]$ при любом $0<\theta<2$ можно, используя методы интерполяции пространств [9].

По теореме Соболева имеет место вложение пространств $W_p^2[0,1] \subset W_q^{2\theta}[0,1] \subset W_q^0[0,1]$, $0<\theta<1$. Применяя к ним интерполяционные теоремы 1.1.1 и 6.4.5 из [9], получим $\|y_n(x)\|_{W_q^{2\theta}} \le c\|y_n(x)\|_{W_q^0}^{1-\theta}\|y_n(x)\|_{W_q^2}^{\theta}$.

По условию (3) $\|y_n(x)\|_{L_q}$ эквивалентна единице. Оценим норму $\|y_n(x)\|_{W_q^2}$. Так как имеет место вложение $W_q^2[0,1] \subset C[0,1] \subset L_q[0,1]$, где $W_q^2[0,1] \subset C[0,1]$ компактно, то по лемме 16.4 из [8] из уравнения (1) следует

$$\|y_n''(x)\|_{L_q} \le \lambda_n\|\rho(x)y_n(x)\|_{L_q} + \|q(x)y_n(x)\|_{L_q} \le \lambda_n M\|y_n(x)\|_{L_q} + |y_n(x)|\,\|q(x)\|_{L_1} \le$$
$$\le c_1\lambda_n + c_2\|y_n(x)\|_C \le c_1\lambda_n + c_2(\varepsilon\|y_n(x)\|_{W_q^2} + c_3(\varepsilon)\|y_n(x)\|_{L_q}),$$

откуда $\|y_n(x)\|_{W_q^2} \le c\lambda_n$. Переобозначая константы, получим оценку $\|y_n(x)\|_{W_q^{2\theta}} \le c\lambda_n^\theta$, где $0<\theta<1$.

Согласно теореме 6.5.1 ([9]) имеет место вложение $W_q^{2\theta}[0,1] \subset W_p^{2\theta_1}$, где $1<q<p<\infty$, $0<\theta<1$, $0<\theta_1<1$, $2\theta-2\theta_1=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$, отсюда $\|y_n(x)\|_{W_p^{2\theta_1}} \le c\|y_n(x)\|_{W_q^{2\theta}} \le c\lambda_n^{(2\theta_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})\frac{1}{2}} = c\lambda_n^{\theta_1+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}}$.

Переобозначая $2\theta_1 \equiv \theta$, где $0 < \theta < 2$, получим $\|y_n(x)\|_{W_p^\theta} \le c\lambda_n^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}}$, где $1 < q < p < \infty$, $0 < \theta < 2$.

Следует отметить, что данная оценка получена с использованием уравнения (1) и условия нормировки (3), поэтому краевые условия задачи (A) могут иметь и другой вид, отличный от (2), например, распадающиеся краевые условия $\alpha_1 y(0)+\beta_1 y'(0) = 0$, $\alpha_2 y(1)+\beta_2 y'(1) = 0$. Однако вышеприведенный метод не позволяет оценить собственные функции задачи (A) в пространствах $W_p^\theta[0,1]$ при любом $0 < \theta < 2$ для случая $p \le q$, что возможно сделать, используя результаты теоремы для дискретных значений θ и интерполяционные теоремы. В этом случае также получим оценки и для $1 \le q < p \le \infty$, что позволит получить оценки собственных функций задачи (A) в пространстве существенно ограниченных функций.

По теореме Соболева имеет место вложение пространств $W_p^2[0,1] \subset W_p^{2\theta_1}[0,1] \subset W_p^0[0,1]$, $0 < \theta_1 < 1$. Применяя к этим пространствам интерполяционные теоремы 1.1.1 и 6.4.5 [9] и п. 1) теоремы при дискретных значениях $\theta = 0, 1, 2$, для случая $1 \le q < p \le \infty$ имеем

$$\|y_n(x)\|_{W_p^{2\theta_1}} \le c\|y_n(x)\|_{W_p^0}^{1-\theta_1}\|y_n(x)\|_{W_p^2}^{\theta_1} \le c\lambda_n^{(\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p})(1-\theta_1)}\lambda_n^{(1+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p})\theta_1} = c\lambda_n^{\theta_1+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}}, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Переобозначая $2\theta_1 \equiv \theta$, где $0 < \theta < 2$, получим $\|y_n(x)\|_{W_p^\theta} \le c\lambda_n^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}}$, где $1 \le q < p \le \infty$, $0 < \theta < 2$. Учитывая результаты п. 1) теоремы при $\theta = 0$ и $\theta = 2$, имеем $\|y_n(x)\|_{W_p^\theta} \le c\lambda_n^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}}$, где $1 \le q < p \le \infty$, $0 \le \theta \le 2$.

Пусть $p \le q$, тогда, учитывая результаты п. 1) теоремы при дискретных значениях $\theta = 0, 1, 2$ и интерполяционные теоремы, получим оценку $\|y_n(x)\|_{W_p^{2\theta_1}} \le c\|y_n(x)\|_{W_p^0}^{1-\theta_1}\|y_n(x)\|_{W_p^2}^{\theta_1} \le c\lambda_n^{(1-\theta_1)}$, где $0 < \theta_1 < 2$, и опять, переобозначая $2\theta_1 \equiv \theta$, где $0 < \theta < 2$, получим $\|y_n(x)\|_{W_p^\theta} \le c\lambda_n^{\frac{\theta}{2}}$, где $1 \le p \le q \le \infty$, $0 < \theta < 2$.

Учитывая результаты теоремы, имеем при $\theta = 0$ и $\theta = 2$ эту же оценку.

Приступим к доказательству п. 2) теоремы при целом значении $\theta = -1$. Из определения нормы $\|y(x,\lambda)\|_{W_p^{-1}} = \inf\limits_{g(x)} \|g(x)\|_{L_p}$, где $g'(x) = y(x,\lambda)$, следует

$$\|y(x,\lambda)\|_{W_p^{-1}} = \inf_c \left\| c + \int_0^x y(t,\lambda)dt \right\|_{L_p} = \inf_c \left(\int_0^1 \left| c + \int_0^x y(t,\lambda)dt \right|^p dx \right)^{1/p} \le \left(\int_0^1 \left| \int_0^x y(t,\lambda)dt \right|^p dx \right)^{1/p}$$

(т. к. inf берется по всем $c \in R$, в частности, $c = 0$ возможно). С другой стороны,

$$\left| \int_0^x y(t,\lambda)dt \right| \le \int_0^x |y(t,\lambda)|dt \le \int_0^1 |y(t,\lambda)|dt = \|y(x,\lambda)\|_{L_1} = \frac{1}{2}\|y(x,\lambda)\|_{W_1^0},$$

поэтому

$$\|y(x,\lambda)\|_{W_p^{-1}} \le \left(\int_0^1 \left| \int_0^x y(t,\lambda)|dt \right|^p dx \right)^{1/p} \le \left(\int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}\|y(x,\lambda)\|_{W_1^0}\right)^p dx \right)^{1/p} = \tfrac{1}{2}\|y(x,\lambda)\|_{W_1^0}.$$

Так как $1 \le q$, то из п. 1) теоремы следует $\|y(x,\lambda)\|_{W_1^0} \le c\|y(x,\lambda)\|_{L_q}$. Переобозначая константу, получим $\|y(x,\lambda)\|_{W_p^{-1}} \le c\|y(x,\lambda)\|_{L_q}$. Таким образом, п. 2) теоремы при целом значении $\theta = -1$ доказан.

Докажем п. 2) теоремы при произвольном $-1 \le \theta \le 0$. По теореме Соболева имеет место вложение пространств $W_p^0[0,1] \subset W_p^\theta[0,1] \subset W_p^{-1}[0,1]$, $-1 < \theta < 0$. Применяя к этим пространствам интерполяционные теоремы 1.1.1 и 6.4.5 из [9], получим $\|y_n(x)\|_{W_p^\theta} \le c\|y_n(x)\|_{W_p^{-1}}^{-\theta}\|y_n(x)\|_{W_p^0}^{1+\theta}$, где $-1 < \theta < 0$. При $1 \le q < p \le \infty$, учитывая полученные оценки для $\|y_n(x)\|_{W_p^0}$ и $\|y_n(x)\|_{W_p^{-1}}$, вытекает $\|y_n(x)\|_{W_p^\theta} \le c\lambda_n^{\frac{1+\theta}{2q}-\frac{1+\theta}{2p}}$, где $-1 \le \theta \le 0$. При $1 \le p \le q \le \infty$, учитывая полученные оценки для $\|y_n(x)\|_{W_p^0}$ и $\|y_n(x)\|_{W_p^{-1}}$, получим $\|y_n(x)\|_{W_p^\theta} \le c$, где $-1 \le \theta \le 0$. $\square$

Отметим следующий интересный факт. Если $v = 0, 1$, $v \le k$ и $1 < (k - v)p$, то имеет место вложение $W_p^k[0,1] \subset C^{v,\alpha}[0,1]$ при значениях $\alpha = k - v - \frac{1}{p}$, если $k - v - \frac{1}{p} < 1$, при $\alpha < 1$, если $k - v - \frac{1}{p} = 1$, и $\alpha = 1$, если $k - v - \frac{1}{p} > 1$ (теорема вложения Соболева в общем случае из [10]). Отсюда следует, что $\|y_n(x)\|_{C^{v,\alpha}} \le c\|y_n(x)\|_{W_p^k}$.

Автор выражает благодарность профессорам Г.А. Айгунову и А.А. Шкаликову за поставленную задачу и ценные советы.

Литература

1. Гехтман М.М., Загиров Ю.М., Якубов В.Я. *Об асимптотическом поведении собственных функций спектральной задачи Штурма–Лиувилля* // Функц. анализ и его прилож. – 1983. – Т. 17. – № 3. – С. 71–72.
2. Гехтман М.М. *Об асимптотическом поведении нормированных собственных функций спектральной задачи Штурма–Лиувилля на конечном отрезке* // Матем. сб. – 1987. – Т. 133. – № 2. – С. 184–199.
3. Трикоми Ф. *Дифференциальные уравнения.* – М.: Ин. лит., 1962. – 351 с.
4. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
5. Айгунов Г.А. *К вопросу об асимптотике нормированных собственных функций оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке* // УМН. – 1997. – Т. 52. – Вып. 6. – С. 147–148.
6. Якубов В.Я. *Точные оценки для нормированных в L_2 собственных функций эллиптического оператора* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 331. – № 3. – С. 286–287.
7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.
8. Берг Й., Лёфстрём Й. *Интерполяционные пространства.* – М.: Мир, 1980. – 264 с.
9. Байокки К., Капело А. *Вариационные и квазивариационные неравенства.* – М.: Наука, 1988. – 448 с.
10. Коровкин П.П. *Неравенства.* – М.: Наука, 1983. – 71 с.

Дагестанский государственный
институт народного хозяйства

Поступила
24.05.2002