ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 4 (491)

УДК 517.927

Ю.Н. СМОЛИН

К ВОПРОСУ ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем рассматривать уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in [0, \infty[, \tag{1}$$

в котором A — измеримая и ограниченная в существенном на $[0,\infty[$ почти периодическая (п. п.) $n \times n$-матрица. Под его решением будем понимать локально абсолютно непрерывную на $[0,\infty[$ n-мерную вектор-функцию x, удовлетворяющую (1) почти всюду (п. в.) на этом промежутке.

Установим достаточный признак экспоненциальной устойчивости уравнения (1).

Определение. Матрицу $A = (a_{ij})$ ($a_{ij} : [0,\infty[\to R$) назовем τ-периодической, если существует относительно плотное множество $\{\tau_k\}$ ([1], с. 7) такое, что $A(t) = A(t-\tau_k)$ при п. в. $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[$ $(k = 0, 1, \dots)$.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует τ-периодическая матрица A_ε такая, что*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\infty[} \|A(t) - A_\varepsilon(t)\| < r\varepsilon, \tag{2}$$

где r — некоторое натуральное число.

Доказательство. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. Так как A — п. п. матрица, то существует относительно плотное множество $\{\tau_k\}$ $(k = 0, 1, \dots)$ такое, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\infty[} \|A(t+\tau_k) - A(t)\| < \varepsilon. \tag{3}$$

По фигурирующему здесь множеству $\{\tau_k\}$ построим τ-периодическую матрицу

$$A_\varepsilon(t) = \begin{cases} A(t), & t \in [0, \tau_1[; \\ A(t-\tau_k), & t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[\ \ (k = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Пусть $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[$. Тогда существует множество $\{\tau_{ki}\} \subset \{\tau_k\}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ такое, что

$$\tau_0 \le \tau_{k1} < \dots < \tau_{kr} = \tau_k, \quad t - \tau_k - \dots - \tau_{k1} \in [0, \tau_1[$$

и

$$A_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t-\tau_k) = \dots = A_\varepsilon(t - \tau_{kr} - \dots - \tau_{k1}) = A(t - \tau_{kr} - \dots - \tau_{k1}).$$

С использованием этих соотношений и (3) получаем r неравенств

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[\tau_k,\tau_{k+1}[} \|A(t - \tau_{k(r-1)} - \dots - \tau_{k1}) - A_\varepsilon(t)\| < \varepsilon,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[\tau_k,\tau_{k+1}[} \|A(t - \tau_{k(r-2)} - \dots - \tau_{k1}) - A(t - \tau_{k(r-1)} - \dots - \tau_{k1})\| < \varepsilon, \dots,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[\tau_k,\tau_{k+1}[} \|A(t) - A(t-\tau_{k1})\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[\tau_k,\tau_{k+1}[} \|A(t)-A_\varepsilon(t)\| < r\varepsilon,$$

и ввиду произвола в выборе k имеем (2). $\square$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$, и пусть A_ε — матрица, удовлетворяющая неравенству (2). Это дает возможность рассматривать (1) как уравнение

$$\dot{x} = A_\varepsilon x + (A - A_\varepsilon)x$$

с постоянно действующим возмущением $A - A_\varepsilon$, и, следовательно, при наличии оценки

$$\|C_\varepsilon(t,s)\| \le c\exp(\alpha(t-s)), \quad 0 \le s \le t < \infty, \tag{4}$$

где $\alpha < 0$, $C_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ — матрица Коши уравнения

$$\dot{x} = A_\varepsilon x, \tag{5}$$

можно надеяться на экспоненциальную устойчивость уравнения (1). Получим эту оценку.

Обозначим символом X_ε нормальную фундаментальную матрицу уравнения (5).

Теорема 1. *Пусть существуют числа $\beta > 0$, $\gamma > 0$ такие, что*

$$k\beta - \gamma < \tau_k \le k\beta \quad (k = 0, 1, \dots) \tag{6}$$

и

$$\max_k \|X_\varepsilon(\tau_{k+1} - \tau_k)\| \le \rho < 1. \tag{7}$$

Тогда имеет место оценка (4), где

$$\alpha = \frac{1}{\beta}\ln\rho, \quad c = a_*^2\rho^{-1-\gamma/\beta}, \tag{8}$$

$$a_* = \exp\int_0^{\tau_*}\|A_\varepsilon(s)\|ds, \quad \tau_* = \sup_k(\tau_{k+1} - \tau_k).$$

Доказательство. Ввиду τ-периодичности матрицы A_ε на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1}[$ матрица $X_\varepsilon((\cdot) - \tau_k)$ наряду с X_ε является решением матричного аналога уравнения (5). Поэтому

$$X_\varepsilon(t) = X_\varepsilon(t - \tau_k)X_\varepsilon(\tau_k), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[, \tag{9}$$

откуда следует, что при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[$, $s \in [\tau_l, \tau_{l+1}[$ $(l \le k)$

$$\|C_\varepsilon(t,s)\| \le \|X_\varepsilon(t - \tau_k)\|\,\|X_\varepsilon(\tau_k)X_\varepsilon^{-1}(\tau_l)\|\,\|X_\varepsilon^{-1}(s - \tau_l)\|. \tag{10}$$

По лемме Гронуолла–Беллмана первый и третий сомножители в правой части (10) не превосходят a_*. А поскольку ввиду непрерывности X_ε из (9) следует

$$X_\varepsilon(\tau_k) = \prod_{i=k-1}^{0} X_\varepsilon(\tau_{i+1} - \tau_i),$$

то

$$X_\varepsilon(\tau_k)X_\varepsilon^{-1}(\tau_l) = \prod_{i=k-1}^{l} X_\varepsilon(\tau_{i+1} - \tau_i) \quad (l \le k)$$

и в силу (7)

$$\|X_\varepsilon(\tau_k)X_\varepsilon^{-1}(\tau_l)\| \le \rho^{k-l}.$$

Ввиду (10) при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[$, $s \in [\tau_l, \tau_{l+1}[$ $(l \le k)$

$$\|C_\varepsilon(t,s)\| \le a_*^2\rho^{k-l}.$$

В силу (6) $k+1 \geq \tau_{k+1}/\beta$, $l < \tau_l/\beta + \gamma/\beta$, и при указанных t, s

$$\|C_\varepsilon(t,s)\| \leq a_*^2 \rho^{-1-\gamma/\beta} \rho^{\tau_{k+1}/\beta} \rho^{-\tau_l/\beta}.$$

Поскольку $s \geq \tau_l$, $t < \tau_{k+1}$ и l, k ($l \leq k$) произвольны, получаем оценку (4), где α, c определены в (8). $\square$

Замечание. Из (6) следует, что $\beta = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\tau_k}{k}$, а $\gamma = \sup\limits_k (k\beta - \tau_k)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *причем матрица* A_ε *удовлетворяет неравенству* (2). *Тогда, если* $r\varepsilon < -\alpha/c$, *то уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство проводится стандартным образом ([2], с. 182).

Распространенные примеры п. п. функций доставляют произведения и суммы периодических функций с несоизмеримыми периодами. В заключение работы остановимся на произведениях. Суммы рассматриваются аналогично.

Пусть $A = A_1 A_2$, где $n \times m$-матрица A_1 периодична с периодом $\omega > 0$ и непрерывна на $[0, \omega]$, а $m \times n$-матрица A_2 периодична с периодом $\theta > 0$, измерима и ограничена в существенном на $[0, \theta]$; $\omega = \alpha_0 \theta$, α_0 иррационально.

Разложим α_0 в цепную дробь $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ ([3], с. 16) и для некоторого n положим

$$\beta_n = [a_{n+2}; a_{n+3}, \dots], \quad \tau_k = (kp_n + [k\beta_n]p_{n+1})\theta, \quad \xi_k = (kq_n + [k\beta_n]q_{n+1})\omega \quad (k = 0, 1, \dots),$$

где p_n, q_n — числитель и знаменатель n-й подходящей дроби в разложении α_0, $[k\beta_n]$ — целая часть $k\beta_n$.

Замечание. Множество $\{\tau_k\}$ разбивает $[0, \infty[$ на промежутки двух видов (длин τ_1 и $\tau_* = \tau_1 + p_{n+1}\theta$) и потому относительно плотно.

Аналогом леммы 1 является

Лемма 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* τ*-периодическая матрица* A_ε *такая, что*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\infty[} \|A(t) - A_\varepsilon(t)\| < \varepsilon. \tag{11}$$

Доказательство. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности на $[0, \infty[$ матрицы A_1 существует $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ выполняется неравенство

$$\sup_{t\in[0,\infty[} \|A_1(t+h) - A_1(t)\| < \frac{\varepsilon}{2a_2}, \tag{12}$$

где $a_2 = \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{t\in[0,\infty[} \|A_2(t)\|$.

Несложно найти n, а по нему — τ_k, ξ_k такие, что

$$|\tau_k - \xi_k| < \delta \quad (k = 0, 1, \dots),$$

и ввиду периодичности A_1 с периодом ω из (12) получаем

$$\sup_{t\in[0,\infty[} \|A_1(t+\tau_k) - A_1(t)\| < \frac{\varepsilon}{2a_2}. \tag{13}$$

Построим по фигурирующему здесь множеству $\{\tau_k\}$, как и в лемме 1, τ-периодическую матрицу A_1^ε. Тогда из (13) будет следовать (11), где $A_\varepsilon = A_1^\varepsilon A_2$. $\square$

Пусть $C_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ — матрица Коши, а X_ε — нормальная фундаментальная матрица уравнения (5), где $A_\varepsilon = A_1^\varepsilon A_2$. Заметим, что в рассматриваемом случае матрицы $X_\varepsilon(\tau_{k+1} - \tau_k)$ могут быть лишь двух видов: $X_\varepsilon(\tau_1)$ и $X_\varepsilon(\tau_*)$. Явный вид множества $\{\tau_k\}$ позволяет уточнить теорему 1.

Теорема 3. *Если*

$$\max\{\|X(\tau_1)\|, \|X(\tau_*)\|\} \leq \rho < 1,$$

то имеет место оценка (4), *где*

$$\alpha = \frac{\ln \rho}{(p_n + \beta_n p_{n+1})\theta}, \quad c = a_*^2 \rho^{-1-p_{n+1}/(p_n+\beta_n p_{n+1})}.$$

Доказательство вытекает из теоремы 1 при

$$\beta = (p_n + \beta_n p_{n+1})\theta, \quad c = p_{n+1}\theta.$$

Литература

1. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* – М.: МГУ, 1978. – 204 с.
2. Барбашин Е.А. *Введение в теорию устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 223 с.
3. Хинчин А.Я. *Цепные дроби.* – М.: Гостехиздат, 1948. – 158 с.

Магнитогорский государственный университет

Поступила 06.05.2002