И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 517.518

М.В. БУЛАТОВ

РЕДУКЦИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА К СИСТЕМАМ 2-ГО РОДА

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегральных уравнений типа Вольтерра

$$W(x(t)) = Ax(t) + \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $A, K(u)$ — $n\times n$-матрицы, $f(t)$ — достаточно гладкая известная, $x(t)$ — непрерывная искомая n-мерные вектор-функции, $u = t - \tau$.

Системы вида (1), у которых $A = 0$, принято называть системами первого рода, системы, у которых $\det A \neq 0$, — второго рода [1].

В данной работе рассмотрены системы вида (1), у которых $A \neq 0$ и $\det A \neq 0$. Такие системы будем называть вырожденными. Предполагается, что входные данные исходной задачи обладают той гладкостью, которая необходима для дальнейших рассуждений. Целью работы является выявление свойств матриц A, $K(u)$ и вектор-функции $f(t)$ задачи (1) таких, что

а) исходная задача имеет единственное решение в классе непрерывных функций;

б) существует линейный дифференциальный оператор степени m

$$\mathcal{P}_m = \sum_{i=0}^{m} (d/dt)^i p_i = \sum_{i=0}^{m} p_i (d/dt)^i, \tag{2}$$

где p_i — $n \times n$-матрицы, такой, что система уравнений

$$\mathcal{P}_m\Big(Ax(t) + \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau\Big) = \overline{A}x(t) + \int_0^t \overline{K}(t-\tau)x(\tau)d\tau = \mathcal{P}_m f(t), \quad t \in [0,1], \tag{3}$$

является системой второго рода.

Отметим,что такие системы второго рода при $K(u), f(t) \in C$ имеют единственное непрерывное решение [1]. Поясним вышесказанное на примере

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(t-\tau) \end{pmatrix} x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что данная задача имеет единственное непрерывное решение $x(t) = (\exp(-t), f''(t)/a)^\top$ тогда и только тогда, когда

$$f(t) \in C^2, \quad a \neq 0, \quad f(0) = f'(0) = 0.$$

Если $f(0) \neq 0$, или $f'(0) \neq 0$, или $a = 0$ и $f(t) \not\equiv 0$, то такая система не имеет непрерывного решения.

Если $a = 0$ и $f(t) \equiv 0$, то система (4) имеет множество решений вида $x(t) = (\exp(-t), v(t))^\top$, где $v(t)$ — произвольная функция.

Существует множество операторов $\mathcal{P}_m$ степени не ниже двух, которые преобразуют этот пример к системе второго рода. В частности, $\mathcal{P}_2$ можно выбрать как

$$(d/dt)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где α и β — произвольные, отличные от нуля, числа. Легко показать, что оператора $\mathcal{P}_1$ вида $\frac{d}{dt}p_0 + p_1$, преобразующего данный пример к системе второго рода, не существует.

В заключение параграфа заметим, что существуют другие подходы к исследованию системы (1) на предмет единственности решения. В частности, используя интегральное преобразование Лапласа [1] для системы (1), можно перейти от исходной задачи к системе линейных уравнений в пространстве изображений, а затем решить вопрос о существовании и единственности решения полученной системы. Отметим,что для преобразования Лапласа необходимо точно вычислять ряд интегралов, что является весьма затруднительной задачей.

Другие преобразования, позволяющие проводить исследования по поводу единственности решения задачи (1), предложены в [2]. Эти преобразования предназначены для более широкого класса задач, и их непосредственное применение к уравнению (1) является довольно-таки сложной задачей.

В [3] предложен метод редукции исходной задачи к системе второго рода. Для осуществления такой редукции необходимо исследовать k-расширенную систему размером $(kn \times (k+1)n)$.

2. Свойства полуобратных матриц и λ-матриц

Определение 1 ([4]). Матрица, обозначаемая в дальнейшем как A^-, называется полуобратной к матрице A, если она удовлетворяет матричному уравнению

$$AA^-A = A.$$

Лемма 1 ([4]). *Система линейных уравнений $By = c$ имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$(E - BB^-)c = 0.$$

Лемма 2 ([5]). *Пусть $n\times n$-матрица A имеет ранг r, а неособенная $n\times n$-матрица L имеет блочный вид*

$$LA = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $(A_1 A_2)$ — $r \times n$-матрица и $\operatorname{rank}(A_1 A_2) = r$. Тогда матрица $L(E - AA^-)L^{-1}$ имеет блочный вид

$$L(E - AA^-)L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Здесь и всюду далее через E_s будем обозначать единичную матрицу размерности s.

Определение 2 ([6]). Матрица вида

$$A(\lambda) = \lambda^k A_0 + \lambda^{k-1} A_1 + \cdots + A_k,$$

где $A_0, A_1, \dots, A_k$ — постоянные матрицы одинаковых размеров, λ — скаляр, $A_0 \neq 0$, называется λ-матрицей степени k.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что все матрицы квадратные, если не оговорено противное.

Определение 3 ([6]). Матрица $A(\lambda)$ называется регулярной, если $\det A(\lambda) \not\equiv 0$.

Определение 4 ([3]). Допустим, что пучок матриц $\lambda A_0 + A_1$ удовлетворяет критерию "ранг–степень" (имеет простую структуру), если

$$\deg\det(\lambda A_0 + A_1) = \operatorname{rank} A_0.$$

Здесь и всюду в дальнейшем $\deg(\cdot)$ означает показатель степени многочлена $(\cdot)$.

Лемма 3. *Пучок матриц $\lambda(E - AA^-) + E$ имеет простую структуру.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{rank} A = r$ и матрица L та же, что и в лемме 2, тогда в силу леммы 2 $\operatorname{rank}(E - AA^-) = n - r$ и степень многочлена

$$\det(\lambda(E - AA^-) + E) = \det(\lambda L(E - AA^-)L^{-1} + E) = \det\left[\lambda\begin{pmatrix}0 & S\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}\right]$$

также равна $n - r$. $\square$

Определение 5. Будем говорить, что λ-матрица

$$A(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^{k-i} A_i, \quad A_0 \neq 0,$$

обладает доминантным свойством (ДС), если

$$\deg\det A(\lambda) \geq k \operatorname{rank} A_0.$$

Например, матрица $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ не обладает этим свойством, а матрица $\left(\begin{smallmatrix}\lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ при $d \neq 1$ обладает.

Отметим, что ввиду ограниченности объема статьи некоторые результаты и свойства λ-матриц приведены без доказательства.

Свойство 1. Если $A(\lambda)$ — регулярная матрица, не обладающая ДС, то существует целое положительное число l такое, что матрица $\lambda^l A(\lambda)$ обладает ДС.

Свойство 2. Если степень λ-матрицы $A(\lambda)$ равна k, то и степень λ-матрицы $(\lambda(E - A_0 A_0^-) + E)A(\lambda)$ также равна k.

Свойство 3. Если матрица $A(\lambda)$ обладает ДС, то и матрица $(\lambda(E - A_0 A_0^-) + E)A(\lambda)$ также обладает ДС.

Свойство 4. $\deg\det A(\lambda) \leq kn$. При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $\det A_0 \neq 0$.

Образуем цепочку матриц по рекуррентному соотношению

$$A^{(i)}(\lambda) = (\lambda(E - A_0^{(i-1)} A_0^{(i-1)-}) + E)A^{(i-1)}(\lambda), \tag{5}$$

где $A_0^{(0)} = A_0$, $A^{(0)}(\lambda) = A(\lambda)$, $A_0^{(i-1)} A_0^{(i-1)-} A_0^{(i-1)} = A_0^{(i-1)}$, а верхний индекс у постоянных матриц означает номер итерации.

В дальнейшем изложении важную роль играет следующий результат.

Теорема 1. *Пусть матрица $A(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda^{k-1} A_i$ обладает ДС и $\operatorname{rank} A_0 = r < n$. Тогда у матрицы $A^{(k)}(\lambda)$, определенной по рекуррентной формуле* (5), $\det A_0^{(k))} \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\deg\det A(\lambda) = kr + S \geq kr$. Тогда в силу леммы 3 и свойства 3 справедливо

$$\deg\det A^{(1)}(\lambda) = kr + S + n - r \geq k(r + s_1),$$

где $r + s_1 = \operatorname{rank} A_0^{(1)}$. Продолжая эту цепочку неравенств, получим

$$\deg\det A^{(i)}(\lambda) = kr + S + (n-r) + (n-r-s_1) + \cdots + (n - r - s_1 - \cdots - s_{i-1}) \geq \\ \geq k(r + s_1 + s_2 + \cdots + s_i), \quad (6)$$

где $r + s_1 + s_2 + \cdots + s_i = \operatorname{rank} A_0^{(i)}$. Вычитая из i-го неравенства (6) $(i-1)$-е, найдем

$$s_i \leq (n - (r + s_1 + s_2 + \cdots + s_{i-1}))/k \leq (n-r)/k. \quad (7)$$

Подставляя в правую часть неравенства (6) значения $i = k$, $s_j \leq (n-r)/k$, $j = 1, 2, \ldots, k$, получим

$$\deg\det A^{(k)}(\lambda) \geq k(r + s_1 + s_2 + \cdots + s_k) \geq kn. \quad (8)$$

Из свойства 4 вытекает, что $\det A_0^{(k)} \neq 0$. $\square$

3. Редукция вырожденных систем

Опишем редукцию исходного уравнения (1) к системе интегральных уравнений второго рода. Так как $\det A = 0$, то существует ненулевая матрица p_0 такая, что $p_0 A = 0$. Продифференцируем систему (1) и умножим ее на матрицу p_0. Получим

$$p_0 K(0) x(t) + \int_0^t p_0 K_t'(t-\tau) x(\tau) d\tau = p_0 f'(t), \quad t \in [0,1]. \quad (9)$$

Умножим равенство (1) на некоторую матрицу p_1 и сложим его с уравнением (9). В результате имеем

$$(p_0 K(0) + p_1 A) x(t) + \int_0^t (p_0 K_t'(t-\tau) + p_1 K(t-\tau)) x(\tau) d\tau = p_0 f'(t) + p_1 f(t), \quad t \in [0,1], \quad (10)$$

т. е. фактически подействуем на тождество (1) оператором $\frac{d}{dt} p_0 + p_1 = p_0 \frac{d}{dt} + p_1$, где p_0 и p_1 — некоторые $n \times n$-матрицы и $p_0 A = 0$. Полученное уравнение (10) может оказаться "лучше" исходного (быть второго рода), а может и "хуже" (иметь множество решений). Поясним это на простом примере

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad f_2(t) \in C^1, \quad f_2(0) = 0, \quad f_1(t) \in C^1, \quad (11)$$

решением которого является вектор-функция

$$x(t) = (f_1(t), f_2'(t))^\top.$$

Действуя на уравнение (11) оператором $\frac{d}{dt} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $(c \neq 0,\ d \neq 0)$, получим систему

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\, f_1(t) \\ c\, f_2'(t) \end{pmatrix},$$

которая попадает в класс интегральных уравнений второго рода.

Если в качестве оператора $\frac{d}{dt} p_o + p_1$ взять оператор

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d \neq 0,$$

то получим систему

$$\begin{pmatrix} d & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\, f_1 + f_2'(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

которая имеет множество решений вида $x(t) = ((d\, f_1(t) + f_2'(t) - v(t))/d, v(t))^\top$, где $v(t)$ — произвольная функция.

Выбирая матрицы p_0 и p_1 как $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ соответственно, вновь получим вырожденную систему интегральных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} f_1(t) + f_2'(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Может оказаться так, что не существует матриц p_0 и p_1 таких, что уравнение вида

$$\left(\frac{d}{dt} p_0 + p_1\right) \left(Ax(t) + \int_0^t K(t-\tau) x(\tau) d\tau\right) = p_0 f'(t) + p_1 f(t), \quad t \in [0,1],$$

будет системой второго рода (см. (4)), но существует линейный дифференциальный оператор степени $k > 1$ вида (2), который обладает свойством (3).

Перед формулировкой основного результата приведем известный факт (см. напр., [4]).

Лемма 4. *Задача*

$$B_0 x'(t) + B_1 x(t) = 0, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = 0,$$

где B_0 и B_1 — $n \times n$-постоянные матрицы, имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда пучок матриц $\lambda B_0 + B_1$ регулярный.

Обозначим через

$$A_0 = A, \quad A_i = K^{(i-1)}_{t^{i-1}}(0), \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{12}$$

где A и $K(u)$ — те же матрицы, что и в исходном уравнении (1).

Определение 6. Минимальное число k, при котором матрица $A(\lambda)$ обладает ДС, где A_i, $i = 0, 1, \dots, k$, определены по формуле (12) , назовем индексом системы (1).

Образуем цепочку уравнений

$$A^{(i)} x(t) + \int_0^t K_i(t-\tau) x(\tau) d\tau = f_i(t), \quad t \in [0,1], \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered} A^{(i)} = A^{(i-1)} + V_{i-1} K_{i-1}(0), \\ K_i(u) = K_{i-1}(u) + V_{i-1} K'_{i-1}(u), \quad u = t - \tau, \\ f_i(t) = f_{i-1}(t) + V_{i-1} f'_{i-1}(t), \\ V_{i-1} = E - A^{(i-1)} A^{(i-1)-}, \quad A^{(i-1)} A^{(i-1)-} A^{(i-1)} = A^{(i-1)}, \\ A^{(0)} = A, \quad K_0(u) = K(u), \quad f_0(t) = f(t). \end{gathered}$$

Теорема 2. *Пусть*

1) *индекс системы* (1) *равен k;*
2) $K(u), f(t) \in C^k$;
3) $V_i f_i(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Тогда система (13) *при $i = k$ является системой второго рода, и исходная задача* (1) *имеет единственное непрерывное решение.*

Доказательство. Опуская выкладки, заметим, что из формулы (5) следует

$$\begin{aligned}A_0^{(k)} &= A_0 + (V_0 + V_1 + \dots + V_{k+1})A_1 + \\ &+ (V_{k-1}V_{k-2} + V_{k-1}V_{k-3} + \dots + V_{k-1}V_0 + V_{k-2}V_{k-3} + \dots + V_{k-2}V_0 + \dots + V_1V_0)A_2 + \\ &+ (V_{k-1}V_{k-2}V_{k-3} + V_{k-1}V_{k-2}V_{k-4} + \dots + V_{k-1}V_{k-2}V_0 + V_{k-2}V_{k-3}V_{k-4} + \\ &+ V_{k-2}V_{k-3}V_{k-5} + \dots + V_{k-2}V_{k-3}V_0 + \dots + V_2V_1V_0)A_3 + \dots + V_{k-1}V_{k-2}V_{k-3}\dots V_0A_k, \end{aligned} \quad (14)$$

где $V_i = E - A_0^{(i)}A_0^{(i)-}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. По теореме 1 $\det A_0^{(k)} \neq 0$, если матрица $A(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{k} \lambda^{k-i}A_i$ обладает ДС. Учитывая (12), заметим, что матрица в (13) совпадает с матрицей $A_0^{(k)}$ в (14). Итак, в силу условия 1) теоремы система (13) при $i = k$ является системой второго рода.

Будем смотреть на i-е уравнение (13) как на суперпозицию операторов

$$G_{i-1}(x) = \left(\frac{d}{dt}V_{i-1} + E\right)x(t) = V_{i-1}x'(t) + x(t), \quad x(0) = 0$$

и

$$W_{i-1}(x) = A^{(i-1)}x(t) + \int_0^t K_{i-1}(t-\tau)x(\tau)d\tau = f_{i-1}(t), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Подставляя в равенства (13) значение $t = 0$, получим

$$A^{(i)}x(0) = f_i(0), \quad i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (15)$$

По лемме 1 системы (15) имеют решение только в том случае, когда выполнено условие 3) теоремы. В силу леммы 4 операторные уравнения $G_{i-1}(x) = 0$ имеют только тривиальное решение.

Итак, исходное уравнение (1) при выполнении условий 1) и 3) теоремы имеет то же решение, что и уравнение (13). Но, как было показано выше, уравнение (13) при $i = k$ является системой уравнений второго рода, а такие системы при выполнении условия 2) теоремы имеют единственное непрерывное решение [1]. □

Для иллюстрации данного результата приведем пример.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & d(t-\tau)\end{pmatrix}x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix}, \quad d \in R. \quad (16)$$

Опуская несложные выкладки, нетрудно показать, что данная система имеет единственное непрерывное решение $x_1 = f_2' - d(f_1 - f_2')/(1-d)$, $x_2 = (f_1' - f_2'')/(1-d)$ только в том случае, когда $d \neq 1$, $f_2(0) = 0$, $f_1(0) = f_2'(0)$, $f_2 \in C^2$, $f_1 \in C^1$.

Проверим условия теоремы. Найдем индекс системы (16). Матрица $\lambda A + K(0) = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ не обладает ДС, а матрица $\lambda^2 + \lambda K(0) + K'(0) = \left(\begin{smallmatrix}\lambda^2 & \lambda\\ \lambda & d\end{smallmatrix}\right)$ $(d \neq 1)$ — обладает. Значит, индекс этой системы равен двум.

Шаг 1.
Условие 3) теоремы дает $\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}f_1(0)\\ f_2(0)\end{smallmatrix}\right) = 0$, т. е. $f_2(0) = 0$.

Система $A^{(1)}x(t) + \int\limits_0^t K_1(t-\tau)x(\tau)d\tau = f_1(t)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & d(t-\tau+1)\end{pmatrix}x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix}f_1\\ f_2 + f_2'\end{pmatrix}.$$

(Здесь для простоты вычислений в качестве полуобратных матриц взяты псевдообратные.)

Шаг 2.

$$V_1 = E - A^{(1)}A^{(1)-} = \begin{pmatrix}0.5 & -0.5\\ -0.5 & 0.5\end{pmatrix}.$$

Условие 3) теоремы дает

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) + f_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2'(0) \end{pmatrix} = 0,$$

т. е. $f_1(0) = f_2'(0)$.
Система

$$A^{(2)}x(t) + \int_0^t K_2(t-\tau)x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} 0.5 & (1-d)/2 \\ 1.5 & (d-1)/2 \end{pmatrix} x(t) +$$
$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1-d/2 \\ 1 & d(t-\tau+1.5) \end{pmatrix} x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} f_1 + 0.5\, f_1' - 0,5(f_2'' + f_2') \\ f_2 + 1.5\, f_2' - 0.5(f_1' - f_2'') \end{pmatrix}$$

является системой второго рода. Непосредственной проверкой убеждаемся, что ее решение совпадает с решением системы (16).

4. Вырожденные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу

$$\sum_{i=0}^{p} B_i x^{(p-i)}(t) = g(t), \quad t \in [0,1], \tag{17}$$

$$x^{(j)}(0) = a_j, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{18}$$

где B_i, $i = 0, 1, \ldots, p$, — $n \times n$-постоянные матрицы, $g(t)$ — n-мерная достаточно гладкая вектор-функция, $\det B_0 = 0$. Вводя обозначение $y(t) = (x^{(p-1)}(t), x^{(p-2)}(t), \ldots, x(t))^\top$, запишем задачу (17), (18) в виде

$$\beta_0 y'(t) + \beta_1 y(t) = q(t), \quad t \in [0,1], \tag{19}$$

$$y(0) = \alpha, \tag{20}$$

где β_0 и β_1 — $np \times np$-постоянные матрицы вида

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_0 & B_1 & B_2 & \ldots & B_{p-1} \end{pmatrix}, \qquad \beta_1 = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -E & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & B_p \end{pmatrix},$$

$$q(t) = (0, 0, \ldots, 0, g(t))^\top, \quad \alpha = (a_{p-1}, a_{p-2}, \ldots, a_0)^\top.$$

Из леммы 4 следует, что если задача (19), (20) имеет решение, то оно единственно тогда и только тогда, когда пучок матриц $\lambda\beta_0 + \beta_1$ регулярный. Опуская выкладки, можно показать, что пучок $\lambda\beta_0 + \beta_1$ регулярный тогда и только тогда, когда матрица $\sum\limits_{i=0}^{p} \lambda^{p-i} B_i$ регулярная. Таким образом, если задача (17), (18) имеет решение, то оно единственно тогда и только тогда, когда матрица $\sum\limits_{i=0}^{p} \lambda^{p-i} B_i$ регулярная.

Положим, если потребуется, $B_j = 0$, $j = p+1, p+2, \ldots, k$.

Определение 7. Пусть матрица $B(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{p} \lambda^{p-i} B_i$ у системы (17) регулярная. Тогда индексом этой системы назовем минимальное число k, при котором матрица $\sum\limits_{i=0}^{k} \lambda^{k-i} B_i$ обладает ДС.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 3. *Пусть индекс системы* (17) *равен* k *и* $g(t) \in C^k$. *Тогда, действуя на систему* (17) *оператором*

$$\mathcal{P}_k = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{d}{dt}(E - B_0^{(k-i)} B_0^{(k-i)-}) + E \right),$$

получим систему

$$\sum_{i=0}^{p} B_i^{(k)} x^{(p-i)}(t) = g_k(t), \quad t \in [0, 1],$$

с невырожденной матрицей перед старшей производной.

Здесь

$$B_j^{(i)} = B_j^{(i-1)} + (E - B_0^{(i-1)} B_0^{(i-1)-}) B_{j+1}^{(i-1)}, \quad B_j^{(0)} = B_j.$$

Приведем значение индекса системы (17), у которой матрица $B(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{p} \lambda^{p-i} B_i$ регулярная и не обладает ДС. Опуская рассуждения, получим

$$k = \begin{cases} \dfrac{np - s}{n - r}, & np - s \text{ кратно } n - r; \\ \left[\dfrac{np - s}{n - r} \right] + 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{21}$$

где [ ] — целая часть числа, $s = \deg \det B(\lambda)$, $r = \operatorname{rank} B_0$.

В заключение статьи отметим, что при изучении систем первого порядка вида (17) важную роль играет индекс пучка $\lambda B_0 + B_1$, т. е. минимальное целое неотрицательное число k, при котором справедливо равенство [4]

$$\operatorname{rank}((\lambda B_0 + B_1)^{-1} B_0)^k = \operatorname{rank}((\lambda B_0 + B_1)^{-1} B_0)^{k+1}.$$

Формула (21) дает другой, более простой способ вычисления индекса пучка $\lambda B_0 + B_1$, а именно

$$k = \begin{cases} \dfrac{n - s}{n - r}, & n - s \text{ кратно } n - r; \\ \left[\dfrac{n - s}{n - r} \right] + 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $s = \deg \det(\lambda B_0 + B_1)$, $r = \operatorname{rank} B_0$.

Литература

1. Краснов М.Л. *Интегральные уравнения*; *введение в теорию.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
2. Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. *Обобщенные решения вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах* // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. – Новосибирск, 1987. – С. 308–318.
3. Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* – Новосибирск: Наука, 1996. – 278 с.
4. Бояринцев Ю.Е. *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
5. Булатов М.В. *О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 3. – С. 360–372.
6. Ланкастер П. *Теория матриц.* – М: Наука, 1982. – 270 с.

Иркутский Вычислительный центр
Сибирского отделения
Российской Академии наук

Поступила
18.11.1996