ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.755

М.А. АКИВИС, В.В. ГОЛЬДБЕРГ

МНОГООБРАЗИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ГАУССОВЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ С КРАТНЫМИ ФОКУСАМИ И СКРУЧЕННЫЕ КОНУСЫ

0. Введение

Гладкое n-мерное многообразие X проективного пространства $\mathbb{P}^N$ называется *тангенциально вырожденным* или *многообразием с вырожденным гауссовым отображением*, если ранг его гауссова отображения $\gamma : X \to \mathbb{G}(n, N)$ меньше n, $0 \leq r = \operatorname{rank} \gamma < n$. Здесь $x \in X$, $\gamma(x) = T_x(X)$, $T_x(X)$ — касательное подпространство к многообразию X в точке x, рассматриваемое как n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}^n$. Число r называется также *рангом* многообразия X, $r = \operatorname{rank} X$. Случай $r = 0$ является тривиальным: в этом случае многообразие является n-плоскостью.

Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — n-мерное гладкое многообразие с вырожденным гауссовым отображением. Предположим, что $0 < \operatorname{rank} \gamma = r < n$. Обозначим через L слой гауссова отображения, $L = \gamma^{-1}(T_x) \subset X$; $\dim L = n - r = l$. Число l называется *гауссовым дефектом* многообразия X (см. [1], с. 89; [2], с. 52) или *индексом относительной дефектности* многообразия X ([3]).

Многообразие с вырожденным гауссовым отображением ранга r расслаивается на плоские слои L размерности l, вдоль которых касательное подпространство $T_x(X)$ не изменяется. Слоение на многообразии X со слоями L называется *слоением Монжа–Ампера* (см., напр., [4]–[6]).

Однако в отличие от традиционного определения слоения слои слоения Монжа–Ампера имеют особенности. Поэтому в общем случае слои такого слоения не являются диффеоморфными стандартному слою. В этой работе предполагается, что особые точки принадлежат слою L, и, следовательно, слой является l-мерным подпространством пространства $\mathbb{P}^N$.

Касательное подпространство $T_x(X)$ не изменяется, когда точка x пробегает множество регулярных точек слоя L. По этой причине касательное подпространство обозначается следующим образом: T_L, $L \subset T_L$. Пара (L, T_L) на многообразии X зависит от r параметров.

Многообразия ранга $r < n$ являются многомерными аналогами развертывающихся поверхностей трехмерного евклидова пространства. Впервые они рассматривались Э. Картаном в связи с изучением метрических деформаций гиперповерхностей [7] и изучением многообразий постоянной кривизны [8], [9]. В последнее время многообразия с вырожденным гауссовым отображением ранга $r < n$ интенсивно изучаются как с проективной точки зрения, так и с евклидовой.

Изложение основных результатов, относящихся к геометрии многообразий с вырожденным гауссовым отображением, а также библиографию работ по этой тематике можно найти в ([10], гл. 4; [11]).

В ([12], § 2, с. 383–393) рассмотрены многообразия с вырожденным гауссовым отображением с точки зрения алгебраической геометрии. Следуя [12], Ландсберг опубликовал книгу [2], которая в некотором смысле представляет собой новую версию работы [12]. Раздел 5 (с. 47–50) этой книги посвящен многообразиям с вырожденным гауссовым отображением.

В частности, в [12] сформулирована структурная теорема для многообразий с вырожденным гауссовым отображением, утверждается, что такие многообразия "строятся из конусов и развертывающихся поверхностей", и приводится доказательство этого утверждения в случае

$n = 2$. Этот результат оказался полным в случае многообразий, гауссовы отображения которых имеют одномерные слои. Однако для тангенциально вырожденных гиперповерхностей, гауссовы отображения которых имеют слои размерности, большей единицы, это утверждение является неполным, т. к. оно не охватывает случай гиперповерхностей. В [11] было показано, что существуют гиперповерхности с вырожденным гауссовым отображением, которые не могут быть построены из конусов и развертывающихся многообразий.

В данной работе определяются и изучаются новые типы многообразий с вырожденным гауссовым отображением, а именно, многообразия с кратными плоскими фокусами и, в частности, — скрученные конусы.

1. Основные уравнения гиперповерхности ранга r с r-кратными фокальными гиперплоскостями

В [13] в проективном пространстве $\mathbb{P}^N$ рассматривались n-мерные многообразия X с вырожденным гауссовым отображением, имеющие ранг r и обладающие двумя свойствами:

(i) фокусные гиперповерхности F_L многообразия X вырождаются в r-кратные гиперплоскости;

(ii) система вторых фундаментальных форм многообразия X содержит по крайней мере две формы, λ-уравнение которых имеет r различных корней.

Было доказано, что такие многообразия X представляют собой конусы в пространстве $\mathbb{P}^N$ с вершиной размерности $l-1$, где $l = n - r$.

В данной работе также рассматриваются многообразия X с вырожденным гауссовым отображением размерности n и ранга r с r-кратными фокальными гиперплоскостями, однако предполагается, что у рассматриваемых многообразий все вторые фундаментальные формы пропорциональны, т. е. что λ-уравнение любой пары вторых фундаментальных форм имеет одинаковые собственные значения.

Поскольку предполагается, что $r \geq 2$, из теоремы Сегре ([10], теорема 2.2, с. 55) следует, что такие многообразия являются гиперповерхностями в подпространстве $\mathbb{P}^{n+1}$. Как будет показано далее, такие гиперповерхности могут не являться конусами.

Рассмотрим гиперповерхность X с вырожденным гауссовым отображением, имеющую размерность n и ранг r, фокусные гиперповерхности F_L которой являются r-кратными гиперплоскостями размерности $l-1$, где $l = n - r$ — размерность слоения Монжа–Ампера на X. Свяжем с гиперповерхностью X расслоение реперов $\{A_u\}$, $u = 0, 1, \dots, n+1$, такое, что точка $A_0 = x$ — регулярная точка образующей L, точки A_a, $a = 1, \dots, l$, принадлежат r-кратной фокусной гиперплоскости $F_L \subset L$, точки A_p, $p = l+1, \dots, n$, лежат в касательной гиперплоскости $T_L(X)$, а точка A_{n+1} расположена вне этой гиперплоскости.

Уравнения инфинитезимального смещения подвижного репера $\{A_u\}$ имеют вид

$$dA_u = \omega_u^v A_v, \quad u, v = 0, 1, \dots, n+1,$$

где ω_u^v — 1-формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства $\mathbb{P}^N$:

$$d\omega_u^v = \omega_u^w \wedge \omega_w^v, \quad u, v, w = 0, 1, \dots, n+1.$$

В результате указанной выше специализации подвижного репера получаются следующие основные уравнения гиперповерхности X:

$$\omega_0^{n+1} = 0, \quad \omega_a^{n+1} = 0, \quad a = 1, \dots, l, \tag{1}$$

$$\omega_p^{n+1} = b_{pq}\omega^q, \quad \omega_a^p = c_{aq}^p \omega^q, \quad p, q = l+1, \dots, n, \tag{2}$$

и

$$b_{sq} c_{ap}^s = b_{sp} c_{aq}^s, \tag{3}$$

где $\omega^q := \omega_0^q$ — базисные формы гиперповерхности X, а $B = (b_{pq})$ — невырожденная симметрическая $(r \times r)$-матрица ([10], § 4.1).

Обозначим через C_a $(r \times r)$-матрицы, входящие в уравнения (2):

$$C_a = (c_{aq}^p).$$

Вводя для единичной $(r \times r)$-матрицы обозначение $C_0 = (\delta_q^p)$ и предполагая, что индекс i пробегает значения $0, 1, \dots, l$ (т. е. $\{i\} = \{0, a\}$), уравнения $b_{pq} = b_{qp}$ и (3) можно объединить и переписать следующим образом:

$$(BC_i)^T = BC_i, \tag{4}$$

что означает симметричность матриц $H_i = BC_i = (b_{qs}c_{ip}^s)$.

Поскольку точки A_a, $a = 1, \dots, l$, принадлежат r-кратной фокусной $(l-1)$-плоскости F_L, эта $(l-1)$-плоскость имеет уравнение $(x^0)^r = 0$. Но в общем случае фокусная гиперповерхность F_L образующей L определяется уравнением $\det(\delta_q^p x^0 + c_{aq}^p x^a) = 0$ ([10], уравнение (4.19), с. 117). Ввиду этого для рассматриваемой гиперповерхности X имеем $\det(\delta_q^p x^0 + c_{aq}^p x^a) = (x^0)^r$. Отсюда следует, что каждая из матриц C_a имеет r-кратное собственное значение 0 и, следовательно, является нильпотентной. Будем предполагать, что эти матрицы имеют следующий вид:

$$C_a = (c_{aq}^p), \quad \text{где} \;\; c_{aq}^p = 0 \;\; \text{при} \;\; p \geq q. \tag{5}$$

Обозначим через r_1 максимальный ранг матрицы пучка $C = x^a C_a$, $r_1 \leq r - 1$.

Очевидно, этот вид является достаточным для того, чтобы все фокальные гиперповерхности F_L являлись r-кратными гиперплоскостями. В [14] (см. также [15], [16]) доказано, что условие (5) является также необходимым для $r = 2, 3, 4$ и различных значений максимального ранга r_1 матриц пучка $x^a C_a$. Заметим, что условие (5) является необходимым также для того, чтобы при $r \leq 4$ фокусные гиперповерхности $F_L \subset L$ были r-кратными гиперплоскостями. Однако в [14] приведен также контрпример, показывающий, что при $r > 4$ вид (5) не является необходимым для того, чтобы фокусные гиперповерхности F_L были r-кратными гиперплоскостями.

Единственная вторая фундаментальная форма гиперповерхности X в его регулярной точке $x = A_0$ может быть записана в виде

$$\Phi_0 = b_{pq}\omega^p\omega^q.$$

Эта форма имеет ранг r. В сингулярных точках A_a, принадлежащих r-кратной фокальной гиперплоскости F_L, вторая фундаментальная форма гиперповерхности X имеет вид

$$\Phi_a = b_{ps}c_{aq}^s\omega^p\omega^q,$$

где $(b_{ps}c_{aq}^s)$ — симметрическая матрица. Максимальный ранг матриц пучка $\Phi = x^a\Phi_a$ также равен $r_1 \leq r - 1$.

2. Гиперповерхности с вырожденным гауссовым отображением ранга r с одномерным слоением Монжа–Ампера и r-кратными фокусами

Пусть A_0A_1 — слой слоения Монжа–Ампера, A_0 — регулярная точка этого слоя, а A_1 — его r-кратный фокус. В этом случае в уравнениях (2) индексы принимают следующие значения: $a, b = 1$; $p, q = 2, \dots, n$, а сами уравнения (2) принимают вид

$$\omega_p^{n+1} = b_{pq}\omega^q, \quad \omega_1^p = c_q^p\omega^q. \tag{6}$$

Согласно предположению (5) матрица $C = (c_q^p)$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_3^2 & \dots & c_n^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & c_n^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где элементы $c_{p+1}^p \neq 0$. Что касается матрицы $B = (b_{pq})$, то из соотношения

$$(BC)^T = BC \tag{8}$$

(см. (4)) следует, что эта матрица имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{2,n} \\ 0 & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,2} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

и $\operatorname{rank} C = n-2$, $\operatorname{rank} B = n-1$. Кроме того, из условия (8) следует, что элементы матриц B и C связаны некоторыми билинейными соотношениями.

Согласно (6), (7) и (9) на гиперповерхности X имеет место уравнение $\omega_1^n = 0$. Поскольку на гиперповерхности X также имеет место уравнение (1), дифференциалы точек A_0 и A_1 принимают вид

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \dots + \omega_0^{n-1} A_{n-1} + \omega_0^n A_n, \\ dA_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \dots + \omega_1^{n-1} A_{n-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Формы $\omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^{n-1}$, входящие в уравнения (10), линейно независимы, и в соответствии с (6) и (7) эти формы выражаются только через базисные формы $\omega^3, \dots, \omega^n$. Могут представиться следующие три случая:

1) 1-форма ω_1^0 не зависит от форм $\omega^3, \dots, \omega^n$ и, следовательно, от форм $\omega_1^2, \dots, \omega_1^{n-1}$, т. е. r-кратный фокус A_1 прямолинейной образующей L описывает фокальное многообразие G размерности $r = n-1$. Многообразие G имеет коразмерность два в пространстве $\mathbb{P}^{n+1}$, в которое вложена гиперповерхность X. Касательное подпространство $T_{A_1}(G)$ определяется точками $A_1, A_0, A_2, \dots, A_{n-1}$. В точке A_1 многообразие G имеет две независимые вторые фундаментальные формы. Для определения этих форм вычислим второй дифференциал точки A_1: $d^2 A_1 \equiv \omega_1^p \omega_p^n A_n + \omega_1^p \omega_p^{n+1} A_{n+1} \pmod{T_{A_1}(G)}$. Отсюда $\Phi_1^n = \omega_1^p \omega_p^n$, $\Phi_1^{n+1} = \omega_1^p \omega_p^{n+1}$. Вторая из этих форм совпадает со второй фундаментальной формой Φ_1 гиперповерхности X в точке A_1. В соответствии с (7), если $\omega^3 = \dots = \omega^n = 0$, то 1-формы $\omega_1^p = 0$. Следовательно, квадратичные формы Φ_1^n и Φ_1^{n+1} обращаются в нуль на фокальном многообразии G. Поэтому направление $A_1 \wedge A_0$ является асимптотическим направлением на G.

2) 1-форма ω_1^0 является линейной комбинацией форм $\omega_1^2, \dots, \omega_1^{n-1}$ и, следовательно, линейной комбинацией форм $\omega^3, \dots, \omega^n$. В этом случае фокус A_1 прямолинейной образующей L описывает фокальное многообразие G размерности $n-2$, касательное подпространство которого $T_{A_1}(G)$ является гиперплоскостью в пространстве $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}$. При $\omega_1^2 = \dots = \omega_1^{n-1} = 0$ точка A_1 неподвижна, а прямая $L = A_1 \wedge A_0$ описывает двумерный конус с вершиной A_1. Этот конус называется *слоевым конусом.* Гиперповерхность X расслаивается на $(n-2)$-параметрическое семейство таких слоевых конусов. Такая гиперповерхность называется *скрученным конусом с прямолинейными образующими.*

Далее, в § 3 будет доказано, что при $n = 3$ слоевой конус является пучком прямых линий. Весьма вероятно, что это верно и для любого n.

3) Предположим, что $(n-2)$-мерное фокальное многообразие G гиперповерхности X принадлежит гиперплоскости $\mathbb{P}^n$ пространства $\mathbb{P}^{n+1}$. Можно принять эту гиперплоскость за бесконечно удаленную гиперплоскость $\mathbb{P}^n_\infty$ пространства $\mathbb{P}^{n+1}$. При этом пространство $\mathbb{P}^{n+1}$ становится аффинным пространством $\mathbb{A}^{n+1}$. В этом случае гиперповерхность X становится *скрученным цилиндром* в $\mathbb{A}^{n+1}$, который расслаивается на $(n-2)$-параметрическое семейство двумерных цилиндров с прямолинейными образующими. Гиперповерхность X с вырожденным гауссовым отображением не является цилиндром в $\mathbb{A}^{n+1}$ и не имеет особенностей в этом пространстве. Таким образом, X — аффинно-полная гиперповерхность в $\mathbb{A}^{n+1}$, не являющаяся цилиндром. Пример такой гиперповерхности в пространстве A^4 рассматривался Сакстедером и Бургейном (см. [5], [6], [17]–[20]).

Следует отметить, что гиперповерхности с вырожденным гауссовым отображением в пространстве $\mathbb{P}^{n+1}$, рассмотренные в этом параграфе, являются *светоподобными гиперповерхностями*, которые изучались авторами в [21]–[24].

3. Гиперповерхности с вырожденным гауссовым отображением с двойными фокусами в пространстве $\mathbb{P}^4$

В качестве примера рассмотрим гиперповерхности X с вырожденным гауссовым отображением ранга $r = 2$ в пространстве $\mathbb{P}^4$, которые имеют единственный двойной фокус F на каждой прямолинейной образующей L. Основные уравнения гиперповерхности X по отношению к реперу первого порядка имеют вид

$$\omega_0^4 = 0, \quad \omega_1^4 = 0.$$

Базисными формами гиперповерхности X являются формы ω_0^2 и ω_0^3. В соответствии с (2) и (9) по отношению к реперу второго порядка имеем

$$\begin{aligned} &\omega_2^4 = b_{23}\omega_0^3, && \omega_1^2 = c_3^2\omega_0^3, \\ &\omega_3^4 = b_{32}\omega_0^2 + b_{33}\omega_0^3, && \omega_1^3 = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $b_{23} = b_{32} \neq 0$ и $c_3^2 \neq 0$. Таким образом,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c_3^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дифференциалы точек A_0 и A_1 имеют вид (см. (10))

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, \\ dA_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2. \end{aligned}$$

Точка $A_1 = F_L$ является единственным фокусом прямолинейной образующей L.

Внешнее дифференцирование уравнений (11) дает следующие внешние квадратичные уравнения:

$$-2b_{23}\omega_2^3 \wedge \omega_0^2 + \Delta b_{23} \wedge \omega_0^3 = 0, \tag{12}$$

$$\Delta b_{23} \wedge \omega_0^2 + \Delta b_{33} \wedge \omega_0^3 = 0, \tag{13}$$

$$-(\omega_1^0 + c_3^2\omega_2^3) \wedge \omega_0^2 + \Delta c_3^2 \wedge \omega_0^3 = 0, \tag{14}$$

$$(\omega_1^0 - c_3^2\omega_2^3) \wedge \omega_0^3 = 0, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta b_{23} &= db_{23} + b_{23}(\omega_0^0 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4) - b_{33}\omega_2^3, \\ \Delta b_{33} &= db_{33} + b_{33}(\omega_0^0 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + b_{32}c_3^2\omega_0^1 - b_{32}\omega_3^2, \\ \Delta c_3^2 &= dc_3^2 + c_3^2(\omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3). \end{aligned}$$

Из уравнений (12) и (15) следует, что формы ω_2^3 и ω_1^0 являются линейными комбинациями базисных форм ω_0^2 и ω_0^3. Возможны три случая.

1) $\omega_1^0 \wedge \omega_0^3 \neq 0$. Из уравнений (11) следует $\omega_1^0 \wedge \omega_1^2 \neq 0$, и, значит, фокус A_1 описывает двумерную фокальную поверхность G^2. Касательной плоскостью к G^2 в точке A_1 будет плоскость $T_{A_1}(G) = A_1 \wedge A_0 \wedge A_2$, и прямая $L = A_0 \wedge A_1$ касается G^2 в этой точке.

2)

$$\omega_1^0 \wedge \omega_0^3 = 0. \tag{16}$$

Точка A_1 описывает фокальную кривую G^1, а прямая $L = A_0 \wedge A_1$ пересекает кривую G^1 в точке A_1. Гиперповерхность X расслаивается на однопараметрическое семейство двумерных конусов и представляет собой скрученный конус.

3) Соприкасающаяся гиперплоскость кривой G^1 является неподвижной.

Рассмотрим подробно указанные три случая.

1) Докажем теорему существования, применяя критерий Картана (напр., [25]).

Теорема 1. *Гиперповерхности X ранга два в пространстве $\mathbb{P}^4$, для которых единственный фокус прямолинейной образующей L описывает двумерную поверхность, существуют, и общее решение системы, определяющей такие гиперповерхности, зависит от одной функции двух переменных. Направление $A_1 \wedge A_0$ является асимптотическим направлением на поверхностях G^2, и гиперповерхность X образована асимптотическими касательными к поверхностям G^2.*

Доказательство. На рассматриваемой гиперповерхности имеют место неравенство $\omega_1^0 \wedge \omega_0^3 \neq 0$ и внешние квадратичные уравнения (12)–(15). Указанные уравнения содержат пять форм: ω_2^3, Δb_{23}, Δb_{33}, ω_1^0 и Δc_3^2, которые отличны от базисных форм ω_0^2 и ω_0^3. Таким образом, имеем $q = 5$.

Характер s_1 исследуемой системы равен числу независимых внешних квадратичных уравнений (12)–(15). Таким образом, имеем $s_1 = 4$. Второй характер этой системы равен $s_2 = q - s_1 = 1$. Отсюда находим число Картана $Q = s_1 + 2s_2 = 6$.

Вычислим теперь число S параметров, от которых зависит наиболее общий интегральный элемент исследуемой системы (т. е. размерность S пространства интегральных элементов, проходящих через точку). Применяя лемму Картана к уравнениям (12) и (13), получаем

$$\begin{cases} -2b_{23}\omega_2^3 = b_{222}\omega^2 + b_{223}\omega^3, \\ \Delta b_{23} = b_{232}\omega^2 + b_{233}\omega^3, \\ \Delta b_{33} = b_{332}\omega^2 + b_{333}\omega_0^3. \end{cases} \tag{17}$$

Поскольку коэффициенты при базисных формах в правых частях соотношений (17) симметричны по нижним индексам, число независимых коэффициентов равно 4, $S_1 = 4$.

Из уравнения (15) следует

$$\omega_1^0 = c_3^2\omega_2^3 + \lambda\,\omega_0^3. \tag{18}$$

Подставим это выражение в уравнение (14). В результате получим

$$-2(c_3^2\omega_2^3 + \lambda\,\omega_0^3) \wedge \omega_0^2 + \Delta c_3^2 \wedge \omega_0^3 = 0. \tag{19}$$

В силу (19) 1-форма

$$\Delta c_3^2 = \mu\omega_0^2 + \nu\omega_0^3 \tag{20}$$

является линейной комбинацией базисных форм. Так как $b_{23} \neq 0$, то из первого уравнения (17) можем найти форму ω_2^3. Подставляя полученное выражение и (20) в (19), находим

$$\left(\frac{c_3^2 b_{223}}{b_{23}} - \lambda\right)\omega_0^3 \wedge \omega_0^2 + \mu\,\omega_0^2 \wedge \omega_0^3 = 0.$$

Отсюда следует

$$\mu = \frac{c_3^2 b_{223}}{b_{23}} - \lambda.$$

Таким образом, имеются только два независимых коэффициента в разложениях (18) и (20), $S_2 = 2$. В результате получаем $S = S_1 + S_2 = 6$ и $S = Q$. Таким образом, согласно критерию Картана исследуемая система находится в инволюции и ее общее решение зависит от одной функции двух переменных.

Далее, найдем вторые фундаментальные формы двумерной фокальной поверхности G^2 гиперповерхности X с вырожденным гауссовым отображением. Для этого вычислим

$$d^2 A_1 \equiv (\omega_1^0\omega_0^3 + \omega_1^2\omega_2^3)A_3 + \omega_1^2\omega_2^4 A_4 \pmod{T_{A_1}(G^2)}.$$

Таким образом, вторые фундаментальные формы поверхности G^2 имеют вид

$$\Phi_1^3 = \omega_1^0 \omega_0^3 + \omega_1^2 \omega_2^3, \quad \Phi_1^4 = \omega_1^2 \omega_2^4.$$

Направление $A_1 \wedge A_0$ на поверхности G_2 определяется уравнениями $\omega_1^2 = 0$. В соответствии с (11) это уравнение эквивалентно уравнению $\omega_0^3 = 0$. Таким образом, $\Phi_1^3 \equiv 0 \pmod{\omega_0^3}$, $\Phi_1^4 \equiv 0 \pmod{\omega_0^3}$, и, следовательно, направление $A_1 \wedge A_0$ является асимптотическим направлением фокальной поверхности G^2. $\square$

2) Докажем следующую теорему существования для скрученных конусов.

Теорема 2. *Если условие* (16) *выполнено, то двойной фокус A_1 образующей $A_0 \wedge A_1$ многообразия X описывает фокальную кривую, и X является скрученным конусом. В пространстве $\mathbb{P}^4$ скрученные конусы существуют, и общее решение системы, определяющей скрученные конусы, зависит от пяти функций одной переменной.*

Доказательство. В этом случае точка A_1 описывает фокальную кривую G^1. В силу (16) система (11) должна быть расширена посредством добавления уравнения

$$\omega_1^0 = a\,\omega_0^3. \tag{21}$$

Уравнение (21) эквивалентно (16). 1-форма ω_0^3 является базисной на фокальной кривой G^1. В соответствии с (21) уравнение (15) принимает вид

$$\omega_2^3 \wedge \omega_0^3 = 0,$$

эквивалентный уравнению (16). Отсюда

$$\omega_2^3 = b\,\omega_0^3. \tag{22}$$

Теперь (12) и (14) принимают вид

$$(\Delta b_{23} + 2b_{23}\, b\,\omega_0^2) \wedge \omega_0^3 = 0, \tag{23}$$

$$(\Delta c_3^2 + (a + b\,c_3^2)\,\omega^2) \wedge \omega_0^3 = 0. \tag{24}$$

Уравнение (13) при этом не меняется.

Дифференцируя внешним образом уравнения (21) и (22), получаем внешние квадратичные уравнения

$$(da + a(2\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_3^3) + c_3^2\omega_2^0 + ab\omega_0^2) \wedge \omega_0^3 = 0, \tag{25}$$

$$(db + b(\omega_0^0 - \omega_2^2) + b_{23}\omega_4^3 + b\omega_0^2) \wedge \omega_0^3 = 0. \tag{26}$$

Теперь имеем систему внешних квадратичных уравнений, состоящую из независимых уравнений (13), (23)–(26). Таким образом, $s_1 = 5$. Кроме базисных форм ω_0^2 и ω_0^3, эти внешние уравнения содержат формы Δb_{23}, Δb_{33}, Δc_3^2, Δa и Δb, где

$$\Delta a = da + a(2\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_3^3) + c_3^2\omega_2^0 \tag{27}$$

и

$$\Delta b = db + b(\omega_0^0 - \omega_2^2) + b_{23}\omega_4^3.$$

Число этих форм равно $q = 5$. Таким образом, $s_2 = q - s_1 = 0$, и число Картана равно $Q = s_1 = 5$. Находя формы Δb_{23}, Δb_{33}, Δc_3^2, Δa и Δb из системы уравнений (13), (23)–(26), мы видим, что наиболее общий интегральный элемент исследуемой системы (т. е. размерность S пространства интегральных элементов, проходящих через точку) зависит от $S = 5$ параметров. Таким образом, $S = Q$, исследуемая система находится в инволюции, и ее общее решение зависит от пяти функций одной переменной. $\square$

Рассмотрим фокальную кривую G^1 скрученного конуса $X^3 \subset P^4$, описываемую точкой A_1. Имеем
$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + (c_3^2 A_2 + aA_0)\,\omega_0^3.$$
Точки $\widetilde{A}_2 = c_3^2 A_2 + aA_0$ и A_1 определяют касательную к G^1. Можно специализировать подвижной репер, выбирая в качестве его вершины A_2 точку $\widetilde{A}_2$ и нормируя репер посредством условия $c_3^2 = 1$. В этом случае получим $dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_0^3 A_2$. При этом выполняются условия $a = 0$, $c_3^2 = 1$. Из этих условий, а также из уравнений (11), (21), (24) и (27) следует
$$\omega_1^2 = \omega_0^3, \quad \omega_1^0 = 0,$$
$$\Delta c_3^2 = \omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3,$$
$$\Delta a = \omega_2^0.$$
После указанной специализации прямая $A_1 \wedge A_2$ становится касательной к фокальной кривой G^1. Уравнения (24) и (25) теперь принимают вид
$$(\omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 + b\,\omega_0^2) \wedge \omega_0^3 = 0,$$
$$\omega_2^0 \wedge \omega_0^3 = 0.$$
Из последнего уравнения следует
$$\omega_2^0 = c\,\omega_0^3. \tag{28}$$
Поскольку $b_{23} \neq 0$, то из уравнения (26) следует, что, специализируя подвижный репер посредством преобразования репера, определяемого формой ω_4^3, величину b можно обратить в нуль. В результате уравнения (22) и (26) принимают соответственно вид
$$\omega_2^3 = 0 \tag{29}$$
и
$$\omega_4^3 \wedge \omega_0^3 = 0. \tag{30}$$
Из уравнения (30) следует
$$\omega_4^3 = f\,\omega_0^3. \tag{31}$$
Дифференцируя точку A_2 и применяя соотношения (11), (28) и (29), получим
$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^1 A_1 + (cA_0 + b_{23}A_4)\omega_0^3.$$
2-плоскость $\alpha = A_1 \wedge A_2 \wedge (cA_0 + b_{23}A_4)$ является *соприкасающейся плоскостью* кривой G^1 в точке A_1. Поместим точку A_4 подвижного репера в плоскость α и осуществим нормировку $b_{23} = 1$. В результате получим $c = 0$ и
$$\omega_2^0 = 0, \quad \omega_2^4 = \omega_0^3. \tag{32}$$
Теперь плоскость α определяется следующим образом: $\alpha = A_1 \wedge A_2 \wedge A_4$, а дифференциал точки A_2 принимает вид
$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^1 A_1 + \omega_0^3 A_4.$$
Дифференцируя внешним образом первое из уравнений (32), получаем
$$\omega_4^0 \wedge \omega_0^3 = 0,$$
откуда
$$\omega_4^0 = g\omega_0^3. \tag{33}$$
Учитывая уравнения (29) и (33), находим
$$dA_4 = \omega_4^4 A_4 + \omega_4^1 A_1 + \omega_4^2 A_2 + (fA_3 + gA_0)\,\omega_0^3. \tag{34}$$

Уравнения (34) означают, что 3-плоскость

$$\beta = A_1 \wedge A_2 \wedge A_4 \wedge (fA_3 + gA_0)$$

является *соприкасающейся гиперплоскостью* фокальной кривой G^1.

Дифференцируя внешним образом уравнения (31) и (33), получаем внешние квадратичные уравнения

$$(df + f(\omega_0^0 - \omega_4^4)) \wedge \omega_0^3 = 0 \tag{35}$$

и

$$(dg + g(2\omega_0^0 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - f\omega_3^0) \wedge \omega_0^3 = 0. \tag{36}$$

Так же, как это было осуществлено выше, посредством преобразования репера, определяемого вторичными формами $\omega_0^0 - \omega_4^4$ и ω_3^0, можно специализировать подвижной репер таким образом, что будут выполняться соотношения $f = 1$, $g = 0$. При этом уравнения (31) и (33) примут вид

$$\omega_4^3 = \omega_0^3, \quad \omega_4^0 = 0, \tag{37}$$

а соприкасающаяся гиперплоскость β фокальной кривой G^1 будет определяться следующим образом: $\beta = A_1 \wedge A_2 \wedge A_4 \wedge A_3$.

Подставляя значения $f = 1$ и $g = 0$ в (35) и (36), получим

$$(\omega_0^0 - \omega_4^4) \wedge \omega_0^3 = 0 \tag{38}$$

и

$$\omega_3^0 \wedge \omega_0^3 = 0. \tag{39}$$

Отметим, что уравнения (38) и (39) могут также быть получены внешним дифференцированием уравнений (37).

В результате указанной выше специализации подвижного репера получаем следующую систему уравнений, определяющую скрученные конусы X в пространстве $\mathbb{P}^4$:

$$\begin{cases} \omega_2^4 = \omega_0^3, & \omega_3^4 = \omega^2, \\ \omega_1^2 = \omega_0^3, & \omega_1^3 = 0, \\ \omega_1^0 = 0, & \omega_2^3 = 0, \\ \omega_2^0 = 0, & \omega_2^4 = \omega^3, \\ \omega_4^3 = \omega_0^3, & \omega_4^0 = 0. \end{cases} \tag{40}$$

Заметим, что в дополнение ко всем осуществленным выше специализациям в уравнениях (40) была осуществлена еще одна специализация $b_{33} = 0$, которая достигается посредством преобразования репера, определяемого вторичной формой $\omega_0^1 - \omega_3^2$ (см. третье из уравнений (17)).

Дифференцируя внешним образом уравнения (40), получаем следующие внешние квадратичные уравнения:

$$\begin{cases} (\omega_0^0 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4) \wedge \omega_0^3 = 0, \\ (\omega_0^0 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4) \wedge \omega_0^2 + (\omega_0^1 - \omega_3^2) \wedge \omega_0^3 = 0, \\ (\omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) \wedge \omega_0^3 = 0, \\ (\omega_0^0 - \omega_4^4) \wedge \omega_0^3 = 0, \\ \omega_3^0 \wedge \omega_0^3 = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Внешнее дифференцирование оставшихся пяти уравнений системы (40) приводит к тождествам.

Система уравнений (41) эквивалентна системе (13), (23)–(26), из которой (41) получается в результате специализации подвижного репера. Для системы уравнений (41), так же, как и для исходной системы уравнений (13), (23)–(26), имеем $q = 5$, $s_1 = 5$, $s_2 = 0$, $Q = S = 5$. Эта система находится в инволюции, и ее общее решение существует и зависит от пяти функций одной переменной.

Исследуем теперь строение слоевых конусов скрученного конуса $X \subset \mathbb{P}^4$. Слоевой конус C на X определяется уравнением

$$\omega_0^3 = 0. \tag{42}$$

Из (42) и (40) следует

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2. \tag{43}$$

Следовательно, плоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ касается C вдоль его образующей $L = A_0 \wedge A_1$. В соответствии с (42) и (40) имеем

$$dA_2 = \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2, \tag{44}$$

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1. \tag{45}$$

Уравнения (43)–(45) показывают, что касательная плоскость $\gamma = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2$ к C не изменяется при движении образующей $L = A_0 \wedge A_1$ вдоль C. Отсюда следует, что C представляет собой пучок прямых линий с центром в точке A_1, расположенный в плоскости γ.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Скрученный конус X в пространстве $\mathbb{P}^4$ расслаивается на однопараметрическое семейство пучков прямых линий с центрами на фокальной кривой G^1 конуса X, расположенных в касательных плоскостях к G^1.*

Именно такую картину можно увидеть в примере Сакстедера–Бургейна ([20]). Однако здесь эта теорема доказана для общего случая.

Теперь докажем обратное утверждение: гладкое однопараметрическое семейство двумерных плоскостей $\gamma(t)$ общего вида в пространстве $\mathbb{P}^4$ образует трехмерный скрученный конус X. Действительно, это семейство огибает кривую G^1, образованную общими точками A плоскостей $\gamma(t)$ и $\gamma(t + dt)$, т.е. $A(t) = \gamma(t) \cap \gamma(t + dt)$. Точка $A(t)$ и плоскость $\gamma(t)$ определяют пучок $(A, \gamma)(t)$ прямых линий с центром $A(t)$, расположенный в плоскости $\gamma(t)$. Множество пучков $(A, \gamma)(t)$ образует трехмерную линейчатую поверхность X, прямолинейные образующие L которой принадлежат этим пучкам. Кроме того, касательное пространство $T(X)$ постоянно вдоль прямолинейной образующей L. Следовательно, ранг многообразия X равен двум.

Поскольку размерность грассманиана $\mathbb{G}(2, 4)$, состоящего из двумерных плоскостей пространства $\mathbb{P}^4$, равна шести ([10], § 1.4, с. 297), то однопараметрическое семейство таких плоскостей зависит от пяти функций одной переменной. С таким же произволом определяются и скрученные конусы в $\mathbb{P}^4$, что было установлено нами ранее при изучении системы уравнений, задающей скрученный конус (см. теорему 2).

3) Определим, при каком условии скрученный конус становится скрученным цилиндром. Это условие эквивалентно условию, при котором соприкасающаяся гиперплоскость β фокальной кривой G^1 не изменяется при движении точки A_1 вдоль G^1. Поскольку $\beta = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ и

$$dA_3 = \omega_3^0 A_0 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4,$$

то определяемое условие имеет вид

$$\omega_3^0 = 0. \tag{46}$$

Если принять постоянную соприкасающуюся гиперплоскость β кривой G^1 за бесконечно удаленную гиперплоскость H_∞ пространства $\mathbb{P}^4$, то $\mathbb{P}^4$ превращается в аффинное пространство $\mathbb{A}^4$. При этом гиперповерхность X становится скрученным цилиндром $\widetilde{X}$, который по теореме 3 *расслаивается на однопараметрическое семейство плоских пучков параллельных прямых линий.* Гиперповерхность X не имеет особенностей в пространстве $\mathbb{A}^4$ и является *полной гладкой нецилиндрической гиперповерхностью ранга два.*

Нетрудно доказать существование скрученных цилиндров в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$.

Теорема 4. *Скрученные цилиндры в пространстве $\mathbb{A}^4$ существуют, и общее решение системы уравнений, определяющей такие цилиндры, зависит от четырех функций одной переменной.*

Доказательство. Действительно, скрученный цилиндр в $\mathbb{A}^4$ определяется системой уравнений (40) и (46). Из (46) следует, что последнее из уравнений (41) становится тождеством. Внешнее дифференцирование уравнения (46) также приводит к тождеству. Таким образом, в системе внешних квадратичных уравнений (43) только четыре уравнения являются независимыми. Следовательно, $s_1 = 4$, и уравнения (41) содержат только четыре 1-формы, отличные от базисных форм. Отсюда $q = 4$. Поэтому $s_2 = q - s_1 = 0$, $Q = s_1 + 2s_2 = 4$. Из уравнений (41) также следует $S = 4$. Поскольку $Q = S$, то система находится в инволюции, и ее общее решение зависит от четырех функций одной переменной. $\square$

В заключение укажем конструкцию, определяющую скрученные цилиндры общего вида в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$. Пусть $\mathbb{P}^3$ — произвольная гиперплоскость в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$, G^1 — произвольная кривая в $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим семейство плоскостей $\gamma(t)$, которые касаются кривой G^1, но не принадлежат $\mathbb{P}^3$, такое, что две бесконечно близкие плоскости $\gamma(t)$ и $\gamma(t + dt)$ этого семейства не лежат в трехмерном подпространстве пространства $\mathbb{P}^4$. Тогда эти две плоскости имеют только одну общую точку $A(t) = \gamma(t) \cap \gamma(t + dt)$, принадлежащую G^1, и плоскости $\gamma(t)$ образуют скрученный конус в пространстве $\mathbb{P}^4$. Если принять гиперплоскость $\mathbb{P}^3$ за бесконечно удаленную гиперплоскость пространства $\mathbb{P}^4$, то пространство $\mathbb{P}^4$ превращается в аффинное пространство $\mathbb{A}^4$, а скрученные конусы, образованные плоскостями $\gamma(t)$, становятся скрученными цилиндрами пространства A^4. Такая конструкция рассматривалась в [26].

Литература

1. Fischer G., Piontkowski J. *Ruled varieties. An introduction to algebraic differential geometry* // Advanced Lect. Math. – Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 2001. – 142 p.
2. Landsberg J.M. *Algebraic geometry and projective differential geometry* // Lect. Notes Series. – Seoul National Univ. – 1999. – № 45. – 85 p.
3. Chern S.S., Kuiper N.H. *Some theorems on isometric imbeddings of compact Riemannian manifolds in Euclidean space* // Ann. Math. Ser. 2. – 1952. – V. 56. – P. 422–430.
4. Delanoë Ph. *L'opérateur de Monge–Ampère réel t la géométrie des sous-varoétés.* – In: Morvan J.M., Verstraelen L. (Eds.). *Geometry and Topology of Submanifolds* // World Sci. – 1989. – P. 49–72.
5. Ishikawa G. *Developable hypersurfaces and algebraic homogeneous spaces in real projective space.* – In: *Homogeneous structures and theory of submanifolds.* – Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku. – Kyoto, 1998. – № 1069. – P. 92–104.
6. Ishikawa G. *Developable hypersurfaces and homogeneous spaces in a real projective space* // Lobachevskii J. Math. – 1999. – V. 3. – P. 113–125.
7. Cartan É. *La deformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien reel à n dimensions* // Bull. Soc. Math. France. – 1919. – V. 44. – P. 65–99.
8. Cartan É. *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien* // Bull. Soc. Math. France. – 1919. – V. 47. – P. 125–160.
9. Cartan É. *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien* // Bull. Soc. Math. France. – 1920. – V. 48. – P. 132–208.
10. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Projective differential geometry of submanifolds.* – Amsterdam: North-Holland, 1993. – 362 p.

11. Akivis M.A., Goldberg V.V. *On the structure of submanifolds with degenerate Gauss maps* // Geom. Dedic. – 2001. – V. 86. – № 1–3. – P. 205–226.
12. Griffiths P.A., Harris J. *Algebraic geometry and local differential geometry* // Ann. Sci. École Norm. Sup. Ser. 4. – 1979. – V. 12. – P. 355–452.
13. Akivis M.A., Goldberg V.V. *An affine analogue of the Hartman–Nirenberg cylinder theorem* // Math. Ann. – 2002. – V. 323. – № 3. – P. 573–582.
14. Wu H., Zheng F. *On complete developable submanifolds in complex Euclidean spaces* // Comm. Anal. Geom. – 2002. – V. 10. – № 3. – P. 611–646.
15. Piontkowski J. *Developable varieties with all singularities at infinity* // Manuscr. Math. – 2001. – V. 106. – P. 75–99.
16. Piontkowski J. *Affinely smooth developable varieties of Gauss rank* 3 *and* 4. – Preprint. – 2001. – 19 p.
17. Sacksteder R. *On hypersurfaces with no negative sectional curvature* // Amer. J. Math. – 1960. – V. 82. – № 3. – P. 609–630.
18. Wu H. *Complete developable submanifolds in real and complex Euclidean spaces* // Intern. J. Math. – 1995. – V. 6. – № 3. – P. 461–489.
19. Ishikawa G. *Singularities of developable surfaces.* – In: Singularity Theory (Liverpool. – 1996) // London Math. Soc. Lecture Note Ser. – Cambridge Univ. Press. – 1999. – V. 263. – P. 403–418.
20. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Local equivalence of Sacksteder and Bourgain hypersurfaces* // Hokkaido Math. J. – 2001. – V. 30. – № 3. – P. 661–670.
21. Akivis M.A. , Goldberg V.V. *The geometry of lightlike hypersurfaces of the de Sitter space* // Acta Appl. Math. – 1998. – V. 53. – № 3. – P. 297–328.
22. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Singular points of lightlike hypersurfaces of the de Sitter space* // Publ. Inst. Math. N. S. (Beograd). – 1998. – V. 63. – № 77. – P. 81–101.
23. Akivis M.A., Goldberg V.V. *The geometry of lightlike hypersurfaces on manifolds endowed with a conformal structure of Lorentzian signature.* – In: Differential Geometry and Applications. 1998. – Berlin–Brno. – Brno, Mazaryk Univ. – 1999. – P. 161–170.
24. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Lightlike hypersurfaces on manifolds endowed with a conformal structure of Lorentzian signature* // Acta Appl. Math. – 1999. – V. 57. – № 3. – P. 255–285.
25. Bryant R.L., Chern S.S., Gardner R.B., Goldsmith H.L., Griffiths P.A. *Exterior differential systems.* – New York: Springer-Verlag, 1991. – 475 p.
26. Акивис М.А. *О многомерных строго параболических поверхностях* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 5. – С. 3–10.

Иерусалимский технологический институт (Израиль)

Технологический институт (Ньюарк, штат Нью-Джерси, США)

Поступила
08.01.2003