ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 514.765

С.Г. КОНОНОВ

АЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТНЫХ АФФИНОРОВ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ ТИПА A_l С РЕГУЛЯРНЫМИ ПОДГРУППАМИ ИЗОТРОПИИ

В работе, следуя [1], для однородных пространств $M=\widetilde{G}/G$ вычисляем алгебры $\mathrm{End}_{\widetilde{G}}\,T(M)$ инвариантных аффиноров (т. е. тензорных полей типа (1.1) или эндоморфизмов касательного расслоения) в случае, когда $\widetilde{G}$ — одна из простых вещественных групп Ли типа A_l, а G — связная регулярная полупростая подгруппа группы $\widetilde{G}$. Алгебра $\mathrm{End}_{\widetilde{G}}\,T(M)$ является важной характеристикой пространства M, ее знание позволяет, например, выделить те пространства указанного выше типа, которые допускают инвариантные почти комплексную, почти кватернионную и другие часто встречающиеся в геометрии аффинорные структуры.

1. Регулярные подалгебры и подгруппы

Подалгебра $\mathfrak{g}$ вещественной полупростой алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{g}}$ называется *регулярной* [2], если существует подалгебра Картана $\widetilde{\mathfrak{h}}$ алгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}$ такая, что комплексификация $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ алгебры $\mathfrak{g}$ нормализуется подалгеброй Картана $\widetilde{\mathfrak{h}}^{\mathbb{C}}$ комплексной полупростой алгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$, т. е. $[\widetilde{\mathfrak{h}}^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}]\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Если потребовать дополнительно полупростоту алгебры $\mathfrak{g}$, то ее регулярность означает, что

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\sum_{\alpha\in R_0}\left([\widetilde{\mathfrak{g}}^{\alpha},\widetilde{\mathfrak{g}}^{-\alpha}]+\widetilde{\mathfrak{g}}^{\alpha}\right)$$

для некоторой регулярной (т. е. замкнутой относительно сложения и симметричной) подсистемы R_0 системы корней R алгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ относительно подалгебры Картана $\widetilde{\mathfrak{h}}^{\mathbb{C}}$; здесь $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\alpha}$ — корневое подпространство в $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$, отвечающее корню $\alpha\in R$. Подгруппа G вещественной полупростой группы Ли $\widetilde{G}$ называется *регулярной*, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G является регулярной подалгеброй алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{g}}$ группы $\widetilde{G}$.

Полупростые регулярные подалгебры комплексных простых алгебр Ли классифицированы в [2]. Основываясь на методе классификации регулярных подалгебр в вещественном случае, предложенном в [1], опишем полупростые регулярные подалгебры вещественных форм алгебры Ли $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$.

Пусть σ — антиинволюция комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, задающая вещественную форму $\mathfrak{g}^{\sigma}$, и пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ такая, что $\sigma(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$. Тогда преобразование σ^* пространства $\mathfrak{h}^*$, заданное формулой

$$(\sigma^*\lambda)(H)=\overline{\lambda(\sigma(H))}\quad\forall H\in\mathfrak{h},\ \ \lambda\in\mathfrak{h}^*,$$

индуцирует автоморфизм второго порядка Φ системы корней $R=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Каждой полупростой подалгебре алгебры $\mathfrak{g}^{\sigma}$, регулярной относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}^{\sigma}$ алгебры $\mathfrak{g}^{\sigma}$, соответствует регулярная подсистема R_0 системы корней R, для которой $\Phi(R_0)=R_0$. Если две такие регулярные подалгебры сопряжены в $\mathfrak{g}^{\sigma}$, то соответствующие им регулярные подсистемы переводятся друг в друга элементами группы Вейля $W=W(R)$, перестановочными с Φ, т. е. принадлежащими централизатору $Z_W(\Phi)$.

Пусть $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{l+1}$ — канонический базис пространства $\mathbb{R}^{l+1}$, $R=\{\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\mid 1\leqslant i<j\leqslant l+1\}$ — система корней типа A_l. Известно, что группа Вейля $W(R)$ отождествляется с симметрической группой S_{l+1}, при этом автоморфизм $f_s\in W$, соответствующий подстановке $s\in S_{l+1}$, определяется формулой $f_s(\varepsilon_i-\varepsilon_j)=\varepsilon_{s(i)}-\varepsilon_{s(j)}$. Отсюда следует, что каждый изоморфизм второго порядка системы корней R типа A_l W-сопряжен единственному автоморфизму $\Phi=\pm w(k,m)$, где

$$w(k,m)=(1,k+1)(2,k+2)\cdots(k,2k),\quad 2k+m=l+1,$$

является произведением k независимых транспозиций.

Каждая регулярная подсистема R_0 системы корней R есть конечная сумма неприводимых подсистем вида $A(T)=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\mid i\neq j,\ i,j\in T\}$ для некоторого набора попарно не пересекающихся подмножеств T множества $\{1,\dots,l+1\}$; $|T|\geqslant 2$ [1]. Если $|T|=s+1$, то подсистема $A(T)$ имеет тип A_s. Обозначим через $A_s^{(u,v)}$ подсистему вида $A(T)$ такую, что

$$|T\cap\{1,\dots,k\}|=u,\quad |T\cap\{2k+1,\dots,l+1\}|=v,$$
$$T\cap\{k+1,\dots,2k\}=\{i+k\mid i\in T\cap\{1,\dots,k\}\}.$$

Легко видеть, что любая неприводимая регулярная Φ-инвариантная подсистема совпадает с $A_s^{(u,v)}$. Произвольная регулярная Φ-инвариантная подсистема есть сумма неприводимых Φ-инвариантных, а также пар регулярных неприводимых подсистем R_0+R_0' таких, что $\Phi(R_0)=R_0'$, $\Phi(R_0')=R_0$, где $R_0=A(T)$, $T\subset\{1,\dots,k\}$, $R_0'=A(T')$, $T'=\{i+k\mid i\in T\}$. Обозначим такую пару A_t+A_t', если $|T|=t+1$. Таким образом, получаем

Предложение 1. *Каждая регулярная подсистема R_0 системы корней R типа A_l, инвариантная относительно автоморфизма второго порядка $\Phi=\pm w(k,m)$, имеет вид*

$$R_0=\sum_{i=1}^{p}A_{s_i}^{(u_i,v_i)}+\sum_{j=1}^{r}(A_{t_j}+A_{t_j}'),$$
$$2u_i+v_i=s_i+1;\quad 0\leqslant\sum_{i=1}^{p}u_i+\sum_{j=1}^{r}(t_j+1)\leqslant k,\quad 0\leqslant\sum_{i=1}^{p}v_i\leqslant m,\quad 2k+m=l+1.$$

Две подсистемы вида $Z_W(\Phi)$ сопряжены в R тогда и только тогда, когда у них совпадают наборы пар чисел $\{(u_i,v_i)\}$, $i=1,\dots,p$, и наборы чисел $\{t_j\}$, $j=1,\dots,r$.

Дальнейшее рассмотрение проведем отдельно для каждого типа AI–AIII вещественных форм $\mathfrak{g}^\sigma$ алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$. При этом воспользуемся описанием подалгебр Картана в вещественных полупростых алгебрах Ли в работах [3] и [4].

Тип AI. $\mathfrak{g}^\sigma=\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{R})$, $\sigma:\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})\to\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$, $X\to\overline{X}$ — переход к комплексно-сопряженной матрице. В алгебре Ли $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{R})$ имеется $\left[\frac{l+1}{2}\right]+1$ классов сопряженных подалгебр Картана, представителей этих классов можно взять в виде

$$\mathfrak{h}_k=\left\{H=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}\operatorname{diag}(h_1,\dots,h_k) & \operatorname{diag}(-h_{k+1},\dots,-h_{2k})\\ \operatorname{diag}(h_{k+1},\dots,h_{2k}) & \operatorname{diag}(h_1,\dots,h_k)\end{pmatrix},\right.\right.$$
$$\left.\left.h_{k+1},\dots,h_{l+1}\right)\,\middle|\,h_i\in\mathbb{R},\ \operatorname{Tr}H=0\right\},\quad k=0,\dots,\left[\frac{l+1}{2}\right].$$

С помощью внутреннего автоморфизма $X\to SXS^{-1}$, где

$$S=\left(\begin{array}{c|c}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}E_k & iE_k\\ -iE_k & E_k\end{pmatrix} & 0\\ \hline 0 & E_m\end{array}\right),$$

алгебры $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$ переведем подалгебру Картана $\mathfrak{h}_k^{\mathbb{C}}$ в стандартную подалгебру Картана $\mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}=\{\operatorname{diag}(h_1,\dots,h_{l+1})\mid h_i\in\mathbb{C},\ \sum h_i=0\}$ и отождествим систему корней $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_k^{\mathbb{C}})$ с системой корней $R=\{\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\mid 1\leqslant i<j\leqslant l+1\}=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}})$; здесь $\varepsilon_i\big(\operatorname{diag}(h_1,\dots,h_{l+1})\big)=h_i$, $i=1,\dots,l+1$. При

этом отождествлении полуинволюция σ индуцирует автоморфизм $\sigma^* = w(k,m)$ системы корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_k^{\mathbb{C}})$. Далее для произвольной регулярной σ^*-инвариантной подсистемы R_0 из предложения 1 строим подалгебру

$$\mathfrak{g}(R_0)^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in R_0} \left([\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}] + \mathfrak{g}^{\alpha} \right)$$

и, выбирая σ-неподвижные элементы в $\mathfrak{g}(R_0)^{\mathbb{C}}$, находим регулярную полупростую подалгебру в $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$, отвечающую подалгебре Картана $\mathfrak{h}_k$ и регулярной подсистеме R_0. Опуская очевидные вычисления, сформулируем окончательный результат.

Теорема 1. *Каждая регулярная полупростая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$ с точностью до внутреннего автоморфизма алгебры $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$ есть алгебра*

$$\mathfrak{g} = \Big(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{sl}(s_i, \mathbb{R}) \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{r} \mathfrak{sl}(t_j, \mathbb{C}) \Big),$$

канонически вложенная в $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$,

$$\sum_{i=1}^{p} A_i + \sum_{j=1}^{r} (B_j + \sqrt{-1} C_j) \longrightarrow \operatorname{diag} \left(A_1, \ldots, A_p, \begin{pmatrix} B_1 & -C_1 \\ C_1 & B_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} B_r & -C_r \\ C_r & B_r \end{pmatrix}, 0 \right),$$

$$0 < \sum_{i=1}^{p} s_i + 2 \sum_{j=1}^{r} t_j \leqslant l+1.$$

<u>Тип AII</u>. $l+1 = 2k$,

$$\mathfrak{g}^{\sigma} = \mathfrak{sl}(k, \mathbb{H}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \Big| A, B \in \mathfrak{gl}(k, \mathbb{C}),\ \mathcal{R}e \operatorname{Tr} A = 0 \right\},$$

$$\sigma : \mathfrak{sl}(2k, \mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(2k, \mathbb{C}), \quad X \to \begin{pmatrix} 0 & -E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix} \overline{X} \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Все подалгебры Картана в $\mathfrak{sl}(k, \mathbb{H})$ сопряжены; если взять подалгебру Картана в виде

$$\mathfrak{h}_0 = \Big\{ H = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_k, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k) \,\Big|\, h_i \in \mathbb{C},\ \mathcal{R}e \Big(\sum_{i=1}^{k} h_i \Big) = 0 \Big\},$$

то $\mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$ есть стандартная подалгебра Картана в $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$. В этом случае $\sigma^* = w(k, 0)$; вычисления, аналогичные случаю AI, показывают, что справедлива

Теорема 2. *Каждая регулярная полупростая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{sl}(k, \mathbb{H})$ с точностью до внутреннего автоморфизма алгебры $\mathfrak{sl}(k, \mathbb{H})$ есть алгебра*

$$\mathfrak{g} = \Big(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{sl}(k_i, \mathbb{H}) \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{r} \mathfrak{sl}(t_j, \mathbb{C}) \Big),$$

вложенная в $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{H})$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ -\overline{B}_i & \overline{A}_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{r} C_j \longrightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_p, C_1, \ldots, C_r, 0) & \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_p, 0) \\ \operatorname{diag}(-\overline{B}_1, \ldots, -\overline{B}_p, 0) & \operatorname{diag}(\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_p, \overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_r, 0) \end{pmatrix},$$

$$0 < \sum_{i=1}^{p} k_i + 2 \sum_{j=1}^{r} t_j \leqslant 2k.$$

Тип $A\,\mathrm{III}$. Существуют $\left[\frac{l+1}{2}\right]+1$ неизоморфных вещественных форм алгебры $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$ типа $A\,\mathrm{III}$

$$\mathfrak{g}^{\sigma_m}=\mathfrak{su}(m,q)=\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ {}^t\overline{B} & C \end{pmatrix} \,\Big|\, A\in\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C}),\ A+{}^t\overline{A}=0,\ C\in\mathfrak{gl}(q,\mathbb{C}),\ C+{}^t\overline{C}=0,\ B\in L(m,q,\mathbb{C}) \right\},$$

$$\sigma_m : \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C}),\ X \to -\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} {}^t\overline{X} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix},\ m=0,1,\dots,\left[\frac{l+1}{2}\right],\ m+q=l+1.$$

В алгебре $\mathfrak{su}(m,q)$ имеется $m+1$ классов сопряженных подалгебр Картана, представителей которых можно взять в виде

$$\mathfrak{h}_{m,k}=\Big\{H=\mathrm{diag}\Big(\begin{pmatrix} \mathrm{diag}(u_1,\dots,u_m) & \mathrm{diag}(h_1,\dots,h_k,0,\dots,0) \\ \mathrm{diag}(h_1,\dots,h_k,0,\dots,0) & \mathrm{diag}(u_1,\dots,u_k,u_{m+k+1},\dots,u_{2m}) \end{pmatrix},$$
$$u_{2m+1},\dots,u_{l+1}\Big) \,\Big|\, h_i\in\mathbb{R},\ u_i\in\sqrt{-1}\mathbb{R},\ \mathrm{Tr}\,H=0\Big\},\quad k=0,\dots,m.$$

Внутренний автоморфизм $X\to SXS^{-1}$, где

$$S=\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{i}{\sqrt{2}}E_k & & -\frac{1}{\sqrt{2}}E_k & \\ & E_{m-k} & & \\ \frac{i}{\sqrt{2}}E_k & & \frac{1}{\sqrt{2}}E_k & \\ \hline & & & E \end{array}\right),$$

алгебры $\mathfrak{su}(m,q)$ переводит алгебру $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_{k,m}$ в стандартную подалгебру Картана $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}_0$ алгебры $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})$. Вычисления показывают, что $\sigma^*_m=-w(k,l+1-2k)$ и что имеет место

Теорема 3. *Каждая регулярная полупростая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{su}(m,q)$ с точностью до внутреннего автоморфизма алгебры $\mathfrak{su}(m,q)$ есть алгебра*

$$\mathfrak{g}=\Big(\bigoplus_{i=1}^{p}\mathfrak{su}(m_i,q_i)\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{j=1}^{r}\mathfrak{sl}(t_j,\mathbb{C})\Big),$$

вложенная в $\mathfrak{su}(m,q)$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{p}\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ {}^t\overline{B}_i & C_i \end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{r}D_j \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(A_1,\dots,A_p,D_1-{}^t\overline{D}_1,\dots,D_r-{}^t\overline{D}_r,0) & \mathrm{diag}(B_1,\dots,B_p,D_1+{}^t\overline{D}_1,\dots,D_r+{}^t\overline{D}_r,0) \\ \mathrm{diag}({}^t\overline{B}_1,\dots,{}^t\overline{B}_p,D_1+{}^t\overline{D}_1,\dots,D_r+{}^t\overline{D}_r,0) & \mathrm{diag}(C_1,\dots,C_p,D_1-{}^t\overline{D}_1,\dots,D_r-{}^t\overline{D}_r,0) \end{pmatrix},$$

$$0<\sum_{i=1}^{p}m_i+\sum_{j=1}^{r}t_j\leqslant m,\quad 0<\sum_{i=1}^{p}q_i+\sum_{j=1}^{r}t_j\leqslant q.$$

Связную подгруппу G групп $\widetilde{G}=\mathrm{SL}(l+1,\mathbb{R})$; $\widetilde{G}=\mathrm{SL}(m,\mathbb{H})$, $2m=l+1$; $\widetilde{G}=\mathrm{SU}(a,b)$, $a+b=l+1$, отвечающую подалгебре $\mathfrak{g}$ в теоремах 1–3 соответственно, будем называть *канонически вложенной* в $\widetilde{G}$.

2. Алгебра $\mathfrak{g}$-инвариантных эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ конечномерного модуля V над полупростой вещественной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$

Пусть V — конечномерный вещественный модуль над полупростой вещественной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда V полупрост и, следовательно, допускает однозначное разложение $V=V_1\oplus\dots\oplus V_n$ в сумму изотипных компонент V_i, $i=1,\dots,n$, $V_i=V_{i1}\oplus\ldots\oplus V_{im_i}$ — разложение на простые подмодули, $V_{i1}\cong\dots\cong V_{im_i}$, $i=1,\dots,n$; $V_{ij}\ncong V_{kl}$, если $i\neq k$. Число простых слагаемых m_i определяется однозначно и называется длиной изотипной компоненты V_i. По лемме Шура для каждого простого вещественного $\mathfrak{g}$-модуля W алгебра $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}\,W$ является телом над $\mathbb{R}$ и, следовательно, изоморфна $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$. В соответствии с этим W будет называться простым $\mathfrak{g}$-*модулем типа* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *или* $\mathbb{H}$; аналогично определяется тип изотипной компоненты. Если $V = W_1 \oplus W_2$ — сумма простых $\mathfrak{g}$-модулей, то $\operatorname{End}_\mathfrak{g} V \cong \operatorname{End}_\mathfrak{g} W_1 \times \operatorname{End}_\mathfrak{g} W_2$ при $W_1 \ncong W_2$, и $\operatorname{End}_\mathfrak{g} V \cong \operatorname{Mat}_2(\operatorname{End}_\mathfrak{g} W_1)$ при $W_1 \cong W_2$. Исходя из вышесказанного, алгебру $\mathfrak{g}$-инвариантных эндоморфизмов $\operatorname{End}_\mathfrak{g} V$ в случае вещественного полупростого $\mathfrak{g}$-модуля V можно описать следующим образом: пусть

$$V = \Big(\bigoplus_{i=1}^{r} U_i^{l_i}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{s} V_j^{m_j}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{k=1}^{t} W_k^{n_k}\Big)$$

— разложение на простые подмодули, $U_i^{l_i}$, $V_j^{m_j}$, $W_k^{n_k}$ — изотипные компоненты типа $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ соответственно, l_i, m_j, n_k — их длины. Тогда

$$\operatorname{End}_\mathfrak{g} V \cong \Big(\prod_{i=1}^{r} \operatorname{Mat}(l_i, \mathbb{R})\Big) \times \Big(\prod_{j=1}^{s} \operatorname{Mat}(m_j, \mathbb{C})\Big) \times \Big(\prod_{k=1}^{t} \operatorname{Mat}(n_k, \mathbb{H})\Big). \tag{1}$$

Поскольку в рассматриваемом случае алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, удобно воспользоваться хорошо развитой теорией полупростых комплексных алгебр Ли. Комплексную полупростую алгебру Ли, являющуюся комплексификацией $\mathfrak{g}$, и комплексификацию вещественного $\mathfrak{g}$-модуля V будем обозначать соответственно символами $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ и $V^\mathbb{C}$. Для комплексного $\mathfrak{g}$-модуля (или $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$-модуля) V символом $\overline{V}$ будем обозначать сопряженный модуль. $\overline{V}$ совпадает с V как абелева группа, а закон умножения элементов из V на комплексные числа определяется следующим образом: $c \circ v = \bar{c}v$, $v \in \overline{V}$, $c \in \mathbb{C}$. Представление, соответствующее модулю $\overline{V}$, имеет вид $\bar{\rho}^\mathbb{C} : \mathfrak{g}^\mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(\overline{V})$, $X \mapsto \rho(\overline{X})$, где ρ — представление, соответствующее модулю V, а черта над X означает сопряжение в $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ относительно $\mathfrak{g}$. Простые самосопряженные $\mathfrak{g}$-модули делятся на два класса в зависимости от значения индекса Картана $\varepsilon(V)$ [5], который может принимать значения 1 или -1. В этих терминах можно охарактеризовать тип простого вещественного $\mathfrak{g}$-модуля V по его комплексификации $V^\mathbb{C}$ следующим образом.

Пусть W — простой подмодуль $V^\mathbb{C}$. Тогда

(i) V типа $\mathbb{R} \iff V^\mathbb{C} = W \iff \underline{W \cong \overline{W} \text{ и } \varepsilon(W) = 1}$;
(ii) V типа $\mathbb{C} \iff V^\mathbb{C} \cong W \oplus \overline{W}$, $\underline{W \ncong \overline{W}}$;
(iii) V типа $\mathbb{H} \iff V^\mathbb{C} \cong W \oplus \overline{W}$, $\underline{W \cong \overline{W} \text{ и } \varepsilon(W) = -1}$.

Простой комплексный $\mathfrak{g}$-модуль W будем называть $\mathfrak{g}$-модулем *типа* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *или* $\mathbb{H}$, если W удовлетворяет условию, подчеркнутому соответственно в (i)–(iii).

Подводя итог сказанному в § 2, сформулируем в удобном для нас виде описание алгебры $\operatorname{End}_\mathfrak{g}(V)$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, V — полупростой вещественный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда $V^\mathbb{C}$ также полупрост; его разложение на изотипные компоненты имеет вид*

$$V^\mathbb{C} = \Big(\bigoplus_{i=1}^{r} U_i^{l_i}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{s} (V_j^{m_j} \oplus \overline{V}_j^{m_j})\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{k=1}^{t} W_k^{2n_k}\Big),$$

где U_i, V_j, W_k — простые попарно неизоморфные комплексные $\mathfrak{g}$-модули типа $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$ соответственно; справедливо представление (1).

3. Вычисление алгебры $\operatorname{End}_{\widetilde{G}} T(M)$

Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — одна из алгебр $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{H})$, $\mathfrak{su}(p, q)\mathbb{T}$, $2m = p+q = l+1$, $\mathfrak{g}$ — полупростая регулярная подалгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{m}$ — $\mathfrak{g}$-инвариантное дополнение к $\mathfrak{g}$ в $\tilde{\mathfrak{g}}$, рассматриваемое как $\mathfrak{g}$-модуль относительно $\operatorname{ad}|_\mathfrak{g}$. Нас будет интересовать алгебра $\mathfrak{g}$-инвариантных эндоморфизмов $\operatorname{End}_\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ $\mathfrak{g}$-модуля $\mathfrak{m}$, которая изоморфна алгебре $\operatorname{End}_{\widetilde{G}} T(M)$ в случае, когда $M = \widetilde{G}/G$, где $\widetilde{G}$ — одна из групп $\mathrm{SL}(l+1, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(m, \mathbb{H})$, $\mathrm{SU}(p, q)$, а G — связная подгруппа в $\widetilde{G}$, отвечающая подалгебре $\mathfrak{g}$. Как вытекает из теоремы 4, алгебру $\operatorname{End}_\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ можно вычислить, если знать разложение на простые подмодули комплексного $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-модуля $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Строение модуля такого типа исследовалось в [1], [6], при этом использовалось разложение $R \bmod R_0$ системы корней R алгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ по модулю ее регулярной подсистемы R_0, связанной с алгеброй $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Пусть в соответствии с § 1

$$R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i, j \leqslant l+1;\ i \neq j\};$$

R_0 есть подсистема типа $A_{l_1} + \dots + A_{l_k}$, отвечающая набору попарно непересекающихся подмножеств $T_1, \dots, T_k$, $|T_\alpha| = l_\alpha + 1$, множества $T = \{1, \dots, l+1\}$;

$$R_0 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j \in T_\alpha,\ i \neq j,\ \alpha = \overline{1, k}\}.$$

Числа, принадлежащие множеству $T \setminus \bigcup\limits_{\alpha=1}^{k} T_\alpha$, занумеруем индексами $k+1, \dots, k+s$ и будем считать одноэлементными подмножествами $T_{k+1}, \dots, T_{k+s}$ множества T. Получим разбиение множества T: $T = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{k+s} T_\alpha$. Обозначим $R_{\alpha\beta} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \in T_\alpha,\ j \in T_\beta,\ \alpha \neq \beta\}$, тогда

$$R \mod R_0 = R_0 \cup \Big(\bigcup_{\alpha,\beta=1}^{k+s} R_{\alpha\beta} \Big).$$

Разложение $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ как $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-модуля относительно $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ описывается следующим образом.

Предложение 2 ([1], [6]).

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{h}_{R_0}^{\perp} \oplus \sum_{\alpha,\beta=1}^{k+s} \mathfrak{g}_{\alpha\beta},$$

где $\mathfrak{h}_{R_0}^{\perp}$ — ортогональное дополнение в алгебре Картана $\mathfrak{h}$ алгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ подалгебры Картана $\mathfrak{h}_0$ алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ относительно формы Киллинга, $\mathfrak{g}_{\alpha\beta} = \sum\limits_{\gamma \in R_{\alpha\beta}} \mathfrak{g}^{\gamma}$, $\mathfrak{g}^{\gamma}$ — корневое подпространство, отвечающее корню $\gamma \in R(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$. При этом подмодули $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ просты, а $\mathfrak{h}_{r_0}^{\perp}$ тривиален.

Далее, для того чтобы воспользоваться теоремой 4, необходимо знать, какие из простых подмодулей $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ изоморфны и каков их тип. Считаем, что наборы индексов T_α, $\alpha = 1, \dots, k+s$, естественно упорядочены, т. е. если $\alpha < \beta$, то для любых $i \in T_\alpha$, $j \in T_\beta$ выполняется условие $i < j$. Поскольку каждый подмодуль $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ есть сумма корневых подпространств, то веса $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-модуля $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ являются ограничениями на $\mathfrak{h}_0$ корней $\gamma \in R_{\alpha\beta}$. Поэтому старший вес $\omega(\mathfrak{g}_{\alpha\beta})$ $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-модуля $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ есть $\varepsilon_{i0} - \varepsilon_{j0}|_{\mathfrak{h}_0}$, где

1) $i_0 = \min T_\alpha$, $j_0 = \max T_\beta$, если $\alpha < \beta$;
2) $i_0 = \max T_\alpha$, $j_0 = \min T_\beta$, если $\alpha > \beta$.

Обозначим через ω_m^α m-й фундаментальный вес подалгебры $\mathfrak{g}_\alpha$ типа A_{l_α} из разложения $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$ относительно базиса системы корней $R(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_0)$, естественно получающегося из канонического базиса системы корней $R(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$. Тогда для нетривиальных подмодулей $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ старшие веса имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega(\mathfrak{g}_{\alpha\beta}) &= \begin{cases} \omega_1^\alpha + \omega_{l_\beta}^\beta, & \text{если } \alpha < \beta; \\ \omega_{l_\alpha}^\alpha + \omega_1^\beta, & \text{если } \beta < \alpha, \ \text{при } |T_\alpha| > 1,\ |T_\beta| > 1, \end{cases} \\
\omega(\mathfrak{g}_{\alpha\beta}) &= \begin{cases} \omega_1^\alpha, & \text{если } \alpha < \beta; \\ \omega_{l_\alpha}^\alpha, & \text{если } \beta < \alpha, \quad \text{при } |T_\alpha| > 1,\ |T_\beta| = 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда вытекает, что между нетривиальными подмодулями $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ имеются только следующие изоморфизмы:

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{g}_{\alpha\beta} \cong \begin{cases} \mathfrak{g}_{\alpha\gamma}, & \text{если } |T_\beta| = |T_\gamma| = 1; \\ \mathfrak{g}_{\gamma\beta}, & \text{если } |T_\alpha| = |T_\gamma| = 1, \end{cases} \\
\mathfrak{g}_{\alpha\beta} \cong \begin{cases} \mathfrak{g}_{\beta\alpha}, & \text{если } |T_\alpha| = |T_\beta| = 2; \\ \mathfrak{g}_{\gamma\alpha}, & \text{если } |T_\alpha| = 2,\ |T_\gamma| = |T_\beta| = 1. \end{cases}
\end{gathered} \tag{3}
$$

Для определения типа простого подмодуля $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$) необходимо знать конкретный вид регулярной подалгебры.

Тип AI. $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$,

$$
\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}_{p \text{ раз}} \oplus \mathfrak{sl}(n_1+1,\mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(n_k+1,\mathbb{R}) \oplus \\
\oplus \underbrace{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}_{q \text{ раз}} \oplus \mathfrak{sl}(m_1+1,\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}(m_t+1,\mathbb{C}),
$$

$$
n_i, m_j > 1, \quad l = n - \left(2p + \sum_{i=1}^{k}(n_i+1) + 4q + 2\sum_{j=1}^{t}(m_i+1)\right) \geqslant 0. \tag{4}
$$

Подсистема R_0 системы корней R в этом случае имеет вид

$$
R_0 = pA_1 + \sum_{i=1}^{k} A_{n_i} + q(A_1 + A_1') + \sum_{j=1}^{t}(A_{m_j} + A'_{m_j}). \tag{5}
$$

Пусть индексы α, β соответствуют первым двум группам слагаемых в (5) либо один из индексов соответствует первым двум группам слагаемых в (5), другой принадлежит одноэлементному подмножеству. Тогда подмодуль $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ самосопряжен и его индекс Картана $\varepsilon(\mathfrak{g}_{\alpha\beta})$ равен единице. Таким образом, все такие подмодули имеют тип $\mathbb{R}$. Подмодуль $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$, где один из индексов соответствует третьей или четвертой группе слагаемых в (5), является самосопряженным тогда и только тогда, когда его старший вес содержит в качестве слагаемых одни и те же старшие веса для идеалов A_s и A'_s. Из формул (2) вытекает, что это возможно только для подмодулей вида $\mathfrak{g}_{\alpha\alpha'}$ и $\mathfrak{g}_{\alpha'\alpha}$, α соответствует третьей группе слагаемых в (5). В этом случае $\varepsilon(\mathfrak{g}_{\alpha\alpha'}) = \varepsilon(\mathfrak{g}_{\alpha'\alpha}) = 1$ и, следовательно, отмеченные подмодули имеют тип $\mathbb{R}$. Все остальные подмодули $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ не являются самосопряженными и, значит, имеют тип $\mathbb{C}$. С учетом изоморфности (3), получим описание алгебры $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$, а следовательно, и алгебры $\mathrm{End}_{\widetilde{G}} T(M)$.

Теорема 5. *Пусть* $M = \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})/G$ *и*

$$
G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^p \times \prod_{i=1}^{k} \mathrm{SL}(n_i+1,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^q \times \prod_{j=1}^{t} \mathrm{SL}(m_j+1,\mathbb{C})
$$

— произвольная связная полупростая регулярная подгруппа группы $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ *и выполняется* (4) *с заменой* n *на* $n+1$. *Тогда алгебра инвариантных аффиноров на однородном пространстве* M *имеет вид*

$$
\mathrm{End}_{\widetilde{G}} T(M) \cong \mathbb{R}^{k^2-k+2pk} \times \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})^{1/2(p^2-p)+q} \times \mathrm{Mat}(l_1,\mathbb{R}) \times \\
\times \mathrm{Mat}(l,\mathbb{R})^{2k} \times \mathrm{Mat}(2l,\mathbb{R})^p \times \mathbb{C}^{l_2} \times \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})^{q^2-q+pq} \times \mathrm{Mat}(l,\mathbb{C})^{2t} \times \mathrm{Mat}(2l,\mathbb{C})^q,
$$

где

$$
l_1 = l^2 + p + k + 2(q+t) - 1, \quad l_2 = 2t^2 - t + 2t(p+k) + 2qk + 4tq.
$$

Следствие. Однородное пространство $M = \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})/G$ со связной полупростой регулярной подгруппой изотропии G допускает инвариантную структуру указанных ниже типов тогда и только тогда, когда G сопряжена относительно группы внутренних автоморфизмов $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ одной из следующих подгрупп:

(i) для почти комплексной структуры

$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^p \times \prod_{j=1}^{t} \mathrm{SL}(m_j+1,\mathbb{C}),\ \ n-p\ \text{ четное},$$

$$\text{либо } G = \mathrm{SL}(n_1+1,\mathbb{R}) \times \prod_{j=1}^{t} \mathrm{SL}(m_j+1,\mathbb{C}),\ \ n_1>1,\ \ n-n_1\ \text{ четное};$$

(ii) для почти кватернионной структуры

$$G = \mathrm{SL}(n_1+1,\mathbb{R}),\ \ n_1>1,\ \ n-n_1\ \text{ кратно четырем},$$
$$\text{либо } G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\ \ n\ \text{ нечетное};$$

(iii) для почти касательной структуры

$$G = \mathrm{SL}(n_1+1,\mathbb{R}),\ \ n_1>1,\ \ n-n_1\ \text{ четное},$$
$$\text{либо } G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^p \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^q,\ \ n-p\ \text{ четное}.$$

Во всех случаях подгруппа G вложена в $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ каноническим образом.

В доказательстве следствия используется

Теорема 6 ([1], п. 10.3.1). *Пусть $\mathfrak{g}^\sigma$ — вещественная форма полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_0^\sigma$ — ее полупростая подалгебра, регулярная относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ такой, что $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, R_0 — регулярная подсистема системы корней $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, соответствующая подалгебре $\mathfrak{g}_0^\sigma$. Тогда*

a) *для того чтобы пара $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0^\sigma)$ допускала почти комплексную структуру, необходимо и достаточно, чтобы $\dim\mathfrak{g}^\sigma - \dim\mathfrak{g}_0^\sigma = 2k$ и для каждого неодноэлементного класса $R_i \in R \bmod R_0$, соответствующего подмодулю $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ типа $\mathbb{R}$, число $[R_i]$ эквивалентных ему классов было четно*;

b) *для того чтобы пара $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0^\sigma)$ допускала почти кватернионную структуру, необходимо и достаточно, чтобы $\dim\mathfrak{g}^\sigma - \dim\mathfrak{g}_0^\sigma = 4m$ и для каждого неодноэлементного класса $R_i \in R \bmod R_0$, соответствующего подмодулю $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ типа $\mathbb{R}$, число $[R_i]$ было кратно четырем, а для каждого класса $R_i \in R \bmod R_0$, соответствующего подмодулю $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ типа $\mathbb{C}$, число $[R_i]$ было четным*;

c) *для того чтобы пара $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0^\sigma)$ допускала почти касательную структуру, необходимо и достаточно, чтобы $\dim\mathfrak{g}^\sigma - \dim\mathfrak{g}_0^\sigma = 2n$ и для каждого неодноэлементного класса $R_i \in R \bmod R_0$ число $[R_i]$ было четным.*

Условия теоремы 6 накладывают следующие ограничения на числа p, q, k, t, n_i, m_j, l:

(i) для $\mathbb{C}$-структуры $k^2-k+2pk=0$, l_1 четное;

(ii) для $\mathbb{H}$-структуры $k^2-k+2pk=0$, $1/2(p^2-p)+q=0$, l_1 кратно четырем, $l_2=0$, l четное;

(iii) для $\mathbb{T}$-структуры $k^2-k+2pk=0$, l_1 четное, $l_2=0$, l четное.

Тип $A\,\mathrm{II}$. $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(m,\mathbb{H})$, $2m=n+1$;

$$\mathfrak{g} = p\cdot\mathfrak{sl}(1,\mathbb{H}) \oplus \sum_{i=1}^{k}\mathfrak{sl}(n_i,\mathbb{H}) \oplus q\cdot\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \sum_{j=1}^{t}\mathfrak{sl}(m_j+1,\mathbb{C});$$

$$n_i, m_j > 1,\quad l = (n+1) - 2\Bigl(p + \sum_{i=1}^{k} n_i + 2q + \sum_{j=1}^{t}(m_i+1)\Bigr) \geqslant 0.$$

Подсистема R_0, соответствующая подалгебре $\mathfrak{g}$, системы корней $R = A_n$ имеет в этом случае вид

$$R_0 = pA_1 + \sum_{i=1}^{k} A_{2n_i-1} + q(A_1 + A_1') + \sum_{j=1}^{t}(A_{m_j} + A'_{m_j}). \qquad (6)$$

Каждый подмодуль $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$, где α и β соответствуют первым двум группам слагаемых в (6), является самосопряженным, и его индекс Картана равен единице. Таким образом, все такие подмодули имеют тип $\mathbb{R}$. Каждый подмодуль $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$, где один из индексов соответствует первой или второй группе слагаемых в (6), а другой — одноэлементному подмножеству, самосопряжен, и его индекс Картана равен -1. Таким образом, все такие подмодули имеют тип $\mathbb{H}$. Подмодуль $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$, где один из индексов соответствует третьей или четвертой группе слагаемых в (6), является самосопряженным тогда и только тогда, когда его старший вес содержит в качестве слагаемых одни и те же старшие веса для A и A'. Это возможно только для подмодулей вида $\mathfrak{g}_{\alpha\alpha'}$ и $\mathfrak{g}_{\alpha'\alpha}$, α отвечает третьей группе слагаемых в (6). В этом случае указанные подмодули имеют тип $\mathbb{R}$. Все остальные подмодули $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ не являются самосопряженными и, значит, имеют тип $\mathbb{C}$. Используя условия изоморфности (3), получаем описание алгебры $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) \cong \mathrm{End}_{\widetilde{G}}\, T(M)$.

Теорема 7. *Пусть* $M = \mathrm{SL}(m, \mathbb{H})/G$, *где*

$$G = \mathrm{SL}(1, \mathbb{H})^p \times \prod_{i=1}^{k} \mathrm{SL}(n_i, \mathbb{H}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})^q \times \prod_{j=1}^{t} \mathrm{SL}(m_j + 1, \mathbb{C})$$

— *произвольная связная полупростая регулярная подгруппа группы* $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(m, \mathbb{H})$. *Тогда алгебра инвариантных аффиноров на однородном пространстве* M *имеет вид*

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\widetilde{G}}\, T(M) \cong \mathbb{R}^{k^2-k+2pk} \times \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})^{1/2(p^2-p)+q} \times \mathrm{Mat}(l_1, \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^{l_2} \times \\ \times \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})^{q^2-q+pq} \times \mathrm{Mat}(l, \mathbb{C})^{2t} \times \mathrm{Mat}(2l, \mathbb{C})^q \times \mathrm{Mat}(l/2, \mathbb{H})^{2k} \times \mathrm{Mat}(l, \mathbb{H})^p;\end{aligned}$$

здесь

$$l_1 = l^2 + p + q + 2(q + t) - 1, \quad l_2 = 2t^2 - t + 2t(p + k) + 2qk + 4tq.$$

Следствие. Однородное пространство $M = \mathrm{SL}(m, \mathbb{H})/G$ со связной полупростой регулярной подгруппой изотропии G допускает инвариантную структуру указанных ниже типов тогда и только тогда, когда G сопряжена относительно группы внутренних автоморфизмов $\mathrm{SL}(m, \mathbb{H})$ одной из следующих подгрупп, вложенных в $\mathrm{SL}(m, \mathbb{H})$ канонически,

(i) для почти комплексной структуры

$$G = \mathrm{SL}(1, \mathbb{H})^p \times \prod_{j=1}^{t} \mathrm{SL}(m_j + 1, \mathbb{C}), \quad m_j \geqslant 1, \quad p \text{ нечетное},$$

$$\text{либо } G = \mathrm{SL}(n_1, \mathbb{H}) \times \prod_{j=1}^{t} \mathrm{SL}(m_j + 1, \mathbb{C}), \quad n_1 > 1, \quad m_j \geqslant 1;$$

(ii) для почти кватернионной структуры

$$G = \mathrm{SL}(n_1, \mathbb{H}), \quad n_1 \geqslant 1;$$

(iii) для почти касательной структуры

$$G = \mathrm{SL}(1, \mathbb{H})^p \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})^q, \quad p \text{ нечетное},$$

$$\text{либо } G = \mathrm{SL}(n_1, \mathbb{H}), \quad n_1 > 1, \quad m - n_1 \text{ четное}.$$

Тип $A\,\mathrm{III}$. $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(a,b)$, $a+b=n+1$;

$$\mathfrak{g} = p\cdot\mathfrak{su}(1,1)\oplus q\cdot\mathfrak{su}(2,0)\oplus\sum_{i=1}^{k}\mathfrak{su}(a_i,b_i)\oplus r\cdot\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\sum_{j=1}^{t}\mathfrak{sl}(m_j+1,\mathbb{C});$$

$$a_i+b_i=n_i+1>2,\quad l=(n+1)-\Bigl(2p+2q+\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)+4r+2\sum_{j=1}^{t}(m_i+1)\Bigr)\geqslant 0.$$

Подсистема R_0 в этом случае имеет вид

$$R_0 = pA_1+qA_1+\sum_{i=1}^{k}A_{n_i}+r(A_1+A_1')+\sum_{j=1}^{t}(A_{m_j}+A'_{m_j}). \tag{7}$$

Каждый подмодуль $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$, где α и β соответствуют первым двум группам слагаемых в (7), причем α и β из одной группы, самосопряжен, и его индекс Картана равен единице. Следовательно, все такие подмодули имеют тип $\mathbb{R}$. Каждый подмодуль $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$, α и β соответствуют первым двум группам слагаемых в (7), причем α и β из разных групп, самосопряжен, и его индекс Картана равен -1. То же самое относится к подмодулям $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$, где один из индексов соответствует второй группе слагаемых в (7), а другой — одноэлементному подмножеству. Следовательно, все такие подмодули имеют тип $\mathbb{H}$. Подмодуль $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$, где один из индексов соответствует четвертой или пятой группе слагаемых в (7), является самосопряженным тогда и только тогда, когда его старший вес содержит в качестве слагаемых одни и те же старшие веса для A и A'. Это возможно только для подмодулей вида $\mathfrak{g}_{\alpha\alpha'}$ и $\mathfrak{g}_{\alpha'\alpha}$, α соответствует четвертой или пятой группе слагаемых в (7). Самосопряженные подмодули $\mathfrak{g}_{\alpha\alpha'}$ и $\mathfrak{g}_{\alpha'\alpha}$ имеют тип $\mathbb{R}$. Все остальные подмодули $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ не являются самосопряженными и, следовательно, имеют тип $\mathbb{C}$. С учетом условий изоморфности (3) получаем описание алгебры $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})\cong\mathrm{End}_{\widetilde{G}}T(M)$.

Теорема 8. *Пусть* $M=\mathrm{SU}(a,b)/G$, *где*

$$G=\mathrm{SU}(1,1)^p\times\mathrm{SU}(2,0)^q\times\prod_{i=1}^{k}\mathrm{SU}(a_i,b_i)\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^r\times\prod_{j=1}^{t}\mathrm{SL}(m_j+1,\mathbb{C})$$

— произвольная связная полупростая регулярная подгруппа группы $\widetilde{G}=\mathrm{SU}(a,b)$. *Тогда алгебра инвариантных аффиноров на однородном пространстве* M *имеет вид*

$$\mathrm{End}_{\widetilde{G}}T(M)\cong\mathbb{R}^{2t}\times\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})^{1/2(p^2+q^2-p-q)+r}\times\mathrm{Mat}(2l,\mathbb{R})^p\times\mathrm{Mat}(l_1,\mathbb{R})\times\mathbb{C}^{l_2}\times$$
$$\times\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})^{r^2-r+(p+q)r}\times\mathrm{Mat}(l,\mathbb{C})^{k+2t}\times\mathrm{Mat}(2l,\mathbb{C})^r\times\mathbb{H}^{pq}\times\mathrm{Mat}(l,\mathbb{H})^q;$$

здесь

$$l_1=l^2+p+q+k+2(r+t)-1,\quad l_2=1/2(k^2-k)+k(p+q+2r)+2(t^2-t)+2t(p+q+k+2r).$$

Следствие. Однородное пространство $M=\mathrm{SU}(a,b)/G$ со связной полупростой регулярной подгруппой изотропии G допускает инвариантную структуру указанных ниже типов тогда и только тогда, когда G сопряжена относительно группы внутренних автоморфизмов $\mathrm{SU}(a,b)$ одной из следующих подгрупп, вложенных в $\mathrm{SU}(a,b)$ канонически,

(i) для почти комплексной структуры

$$G=\prod_{i=1}^{s}\mathrm{SU}(a_i,b_i)\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^r,\quad n-\sum_{i=1}^{s}(a_i+b_1-1)\ \text{ четно};$$

(ii) для почти кватернионной структуры

$$G=\mathrm{SU}(a_0,b_0),\quad n-(a_0+b_0)\ \text{ нечетно};$$

(iii) для почти касательной структуры

$$G = \mathrm{SU}(a_0, b_0), \quad a_0 + b_0 > 2, \quad n - (a_0 + b_0) \ \text{нечетно},$$
$$\text{либо } G = \mathrm{SU}(1,1)^p \times \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})^r, \quad n - p \ \text{четное},$$
$$\text{либо } G = \mathrm{SU}(2,0)^q \times \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})^r, \quad n, q \ \text{нечетные}.$$

Литература

1. Комраков Б.П. *Структуры на многообразиях и однородные пространства.* – Минск: Наука и техника, 1978. – 354 с.
2. Дынкин Е.Б. *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли* // Матем. сб. – 1952. – Т. 30. – № 2. – С. 349–462.
3. Sugiura M. *Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras* // J. Máth. Soc. Japan. – 1959. – V. 11. – № 4. – P. 374–434.
4. Carmona J. *Les sous-algèbres de Cartan reélles et la frontière d'une orbite ouverte dans une variété de drapeaux* // Manuscr. math. – 1973. – V. 10. – № 1. – P. 1–33.
5. Iwahori N. *On real irreducible representation of Lie algebra* // Nagoya Math. J. – 1959. – V. 14. – P. 59–83.
6. Siebenthal J. de. *Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple* // Comment. math. helv. – 1969. – V. 44. – № 1. – P. 1–44.

Белорусский государственный университет

Поступила 02.02.1998