ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 4 (527)

УДК 517.588

Б.В. ЛОГИНОВ, И.В. КОНОПЛЕВА, Ю.Б. РУСАК

СИММЕТРИЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНОСТЬ В ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ

1. Введение

Начиная с известных работ А.М. Ляпунова, А. Пуанкаре и Э. Шмидта, теория ветвления решений нелинейных уравнений находит приложения в естественных науках в течение последних 100 лет (L. Lichtenstein, А.И. Некрасов, Н.Н. Назаров, В.В. Немыцкий, М.А. Красносельский, М.М. Вайнберг, В.А. Треногин, В.И. Юдович, Melvin Berger и Marion Berger, J. Cronin, J. Toland и др.)

Симметрийные методы в теории ветвления впервые были использованы В.И. Юдовичем (1967), затем Б.В. Логиновым и В.А. Треногиным (1971), D. Ruelle (1973). В 80–90-е годы были опубликованы монографии, содержащие приложения метода Ляпунова–Шмидта (D. Sattinger, 1979; Б.В. Логинов, 1985; A. Vanderbauwhede, 1982; M. Golubitsky, D. Schaeffer, I. Stewart, 1984–1986) и методы центрального многообразия (A. Mielke, 1991; J. Iooss, M. Adelmeyer, 1992; J. Iooss, P. Chossat, 1994) в условиях групповой симметрии. В большинстве работ по эквивариантной теории ветвления предполагается, что ядро линеаризованного фредгольмова оператора инвариантно при действии группы симметрии. A. Vanderbauwhede (1980) и N. Dancer (1982, 1986) доказали G-инвариантную бесконечномерную теорему о неявных функциях в общем случае неинвариантного ядра в предположении компактности допускаемой группы.

Отметим общие результаты о конечномерных редукциях при вариационной формулировке нелинейных задач: В.А. Треногин, Н.А. Сидоров (1992), общая теорема о потенциальности уравнения разветвления (УР) с применением теории Морса–Конли; Ю.И. Сапронов (1991, 1996), конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах.

Случай неинвариантного ядра линеаризованного оператора возникает в задаче о несимметричных локализованных волновых структурах в стратифицированной жидкости [1], [2]. Оказалось, что в вариационном случае с инвариантным функционалом УР Ляпунова–Шмидта действием группы может быть редуцировано к системе меньшей размерности. Теоремы о наследовании уравнением разветвления групповой симметрии общей нелинейной задачи были установлены в [3], [4]. Целью данной работы является развитие этих результатов для некомпактных групп симметрий в вариационном случае.

В вещественных банаховых функциональных пространствах E_1 и E_2 изучается общая задача теории ветвления

$$F(x,\varepsilon)=0,\quad F(x_0,0)=0,\quad B_{x_0}=-F'_x(x_0,0),\tag{1}$$

где B_{x_0} — фредгольмов оператор, $\mathcal{N}(B_{x_0})=\operatorname{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — подпространство нулей (ядро) оператора B, $\mathcal{N}^*(B_{x_0})=\operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — подпространство дефектных функционалов, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n\in E_1^*$, $\langle\varphi_i,\gamma_j\rangle=\delta_{ij}$, $\{z_j\}_{i=1}^n\in E_2$, $\langle z_i,\psi_j\rangle=\delta_{ij}$, — системы, биортогональные соответственно $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$. Предполагается, что непрерывно дифференцируемый по x и достаточно гладкий по ε

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00019.

в окрестности точки ветвления $(x_0;0)$ оператор $F(\cdot,\varepsilon)$ допускает группу G, т. е. существуют ее представления L_g в E_1 и K_g в E_2, сплетающие оператор F

$$K_gF(x,\varepsilon) = F(L_gx,\varepsilon). \tag{2}$$

Дифференцирование тождества (2) по x в точке ветвления x_0 дает соотношение

$$K_gF'_x(x_0,\varepsilon) = F'_x(L_gx_0,\varepsilon)L_g, \tag{3}$$

из которого следует, что фредгольмов оператор B_{x_0} обладает симметрией лишь относительно стационарной подгруппы точки x_0.

В [1], [2] для потенциального оператора $F(x,\varepsilon)$ доказана теорема о редукции (понижении порядка) соответствующего УР. Здесь рассмотрена более общая задача ветвления с УР потенциального типа, когда его левая часть является псевдоградиентом некоторого функционала — потенциала УР. Установлены необходимые и достаточные условия инвариантности потенциала. Получено косимметрическое тождество левой части УР с операторами алгебры Ли представления $L_{g(a)}$, позволяющее доказать теорему о редукции УР.

Для G-инвариантного ядра оператора B_{x_0} это дает новый метод построения общего вида УР по допускаемой группе симметрии, особенно эффективный для бифуркационных задач о нарушении симметрии.

Использованы терминология и обозначения [5]–[10].

2. Теорема о наследовании симметрии, УР потенциального типа, косимметрическое тождество

Всюду далее предполагается, что группа Ли $G = G_r = G_r(a)$, $a = (a_1,\dots,a_r)$, является r-мерным дифференцируемым многообразием, удовлетворяющим следующим условиям [1], [2], [11].

$\mathbf{c_1}$) Отображение $a \to L_{g(a)}x_0$, действующее из окрестности $G_r(a)$ единичного элемента в пространство E_1, принадлежит классу C^1, поэтому $Xx_0 \in E_1$ для всех инфинитезимальных операторов $Xu = \lim\limits_{t\to 0} t^{-1}[L_{g(a(t))}u - u]$ в касательном к $L_{g(a)}$ многообразии $T^r_{g(a)}$.

$\mathbf{c_2}$) Стационарная подгруппа элемента x_0 определяет представление $L(G_s)$ локальной группы Ли $G_s \subset G_r$, $s < r$, с s-мерной подалгеброй $T^s_{g(a)}$ инфинитезимальных операторов. Таким образом, элементы вида $\varphi = Xx_0$, $X \in T^r_{g(a)}$, образуют в $\mathcal{N}(B_{x_0})$ некоторое $m = (r-s)$-мерное подпространство, т. е. базисы в $\mathcal{N}(B_{x_0})$ и в алгебре $T^r_{g(a)}$ можно упорядочить так, что $\varphi_k = \varphi_k(x_0) = X_kx_0$, $1 \le k \le m$, и $X_kx_0 = 0$ для $k \ge m+1$.

Как и в [1], [2], предполагаем, что имеют место плотные вложения $E_1 \subset E_2 \subset H$ в гильбертово пространство H с оценками $\|u\|_H \le \alpha_2\|u\|_{E_2} \le \alpha_1\|u\|_{E_1}$.

$\mathbf{c_3}$) Для каждого $X \in T^r_{g(a)}$ отображение $X: E_1 \to H$ ограничено в $\mathcal{L}(E_1,H)$-топологии.

Задача отыскания малых решений уравнения (1) при $\varepsilon \to 0$ эквивалентна [5] отысканию малых решений конечномерной нелинейной системы, называемой УР Ляпунова–Шмидта. Рассмотрим построение УР А.М. Ляпунова для нелинейной задачи (1) в условиях групповой симметрии (2).

Положим $B_{L_gx_0} = -F'_x(L_gx_0,0)$ и $R(x_0,x-x_0,\varepsilon) = F(x,\varepsilon) - F(x_0,0) - F'_x(x_0,0)(x-x_0)$, где $F(x_0,0)=0$, т. к. $(x_0;0)$ — точка ветвления. Тогда соотношение (3) примет вид $K_gB_{x_0} = B_{L_gx_0}L_g$. Следовательно,

$$\varphi_i(L_gx_0) = L_g\varphi_i(x_0),\quad \varphi_i(x_0) = \varphi_i,\quad \gamma_j(L_gx_0) = L_g^{*-1}\gamma_j,\quad \gamma_j(x_0) = \gamma_j,\quad i,j = 1,\dots,n, \tag{4}$$
$$K_gR(x_0,x-x_0,\varepsilon) = F(L_gx,\varepsilon) - F(L_gx_0,0) - F'_x(L_gx_0,0)L_g(x-x_0) = R(L_gx_0,L_g(x-x_0),\varepsilon).$$

Для области значений $\mathcal{R}$ оператора $F'_x(x_0,0)$ выполняется соотношение

$$\mathcal{R}(F'_x(L_gx_0,0)) = \mathcal{R}(K_gF'_x(x_0,0)L_g^{-1}) = K_g\mathcal{R}(F'_x(x_0,0)).$$

Тогда для ядра сопряженного оператора имеем

$$\mathcal{N}^*(B_{x_0}) = \operatorname{span}\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \Rightarrow \mathcal{N}^*(B_{L_0 x_0}) = \operatorname{span}\{K_g^{*-1}\psi_1, \dots, K_g^{*-1}\psi_n\},$$
$$z_i(L_g x_0) = K_g z_i(x_0) = K_g z_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Введем проекторы

$$P_{x_0} = \sum_{j=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_j \rangle \varphi_j : E_1 \to E_1^n(x_0), \quad Q_{x_0} = \sum_{j=1}^{n} \langle \cdot, \psi_j \rangle z_j : E_2 \to E_{2,n}(x_0),$$

для которых справедливы соотношения

$$P_{L_g x_0} = L_g P_{x_0} L_g^{-1} \quad \text{или} \quad P_{L_g x_0} L_g = L_g P_{x_0},$$
$$Q_{L_g x_0} = K_g Q_{x_0} K_g^{-1} \quad \text{или} \quad Q_{L_g x_0} K_g = K_g Q_{x_0}. \tag{6}$$

Метод Ляпунова–Шмидта использует разложения банаховых пространств E_1 и E_2 в прямые суммы

$$E_1 = E_1^n(x_0) \dotplus E_1^{\infty-n}(x_0), \quad E_2 = E_{2,n}(x_0) \dotplus E_{2,\infty-n}(x_0), \tag{7}$$

удовлетворяющие следующим свойствам:

$$E_1^n(L_g x_0) = L_g E_1^n(x_0),$$
$$E_1^{\infty-n}(L_g x_0) = (I - P_{L_g x_0})E_1 = L_g(I - P_{x_0})L_g^{-1}E_1 = L_g(I - P_{x_0})E_1 = L_g E_1^{\infty-n}(x_0), \tag{8}$$
$$E_{2,n}(L_g x_0) = K_g E_{2,n}(x_0), \quad E_{2,\infty-n}(L_g x_0) = K_g E_{2,\infty-n}(x_0).$$

В соответствии с разложениями (7) запишем уравнение (1) в проекциях

$$\widehat{B}_{x_0} u \equiv B_{x_0}(I - P_{x_0})u = (I - Q_{x_0})R(x_0, v(x_0, \xi) + u(x_0), \varepsilon),$$
$$0 = Q_{x_0} R(x_0, v(x_0, \xi) + u(x_0), \varepsilon),$$

где $v(x_0, \xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j(x_0) \in E_1^n(x_0)$, $u(x_0) \in E_1^{\infty-n}(x_0)$. Тогда согласно теореме о неявных операторах [5] из первого уравнения системы находим $u(x_0) = u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)$. Подставляя $u(x_0)$ во второе уравнение, получаем УР А.М. Ляпунова

$$f(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{n} f_j(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)\varphi_j = Q_{x_0} R(x_0, v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon), \varepsilon) = 0. \tag{9}$$

Аналогично применение леммы Шмидта [5] позволяет записать уравнение (1) в виде системы

$$\widehat{\overline{B}}_{x_0}(x - x_0) \equiv B_{x_0}(x - x_0) + \sum_{i=1}^{n} \langle x - x_0, \gamma_i(x_0) \rangle z_i(x_0) = R(x_0, x - x_0, \varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i(x_0),$$
$$\xi_j = \langle x - x_0, \gamma_i(x_0) \rangle.$$

Подставляя $x - x_0 = v(x_0, \xi) + w$ в первое уравнение $\widehat{\overline{B}}_{x_0} w = R(x_0, v(x_0, \xi) + w, \varepsilon)$, по теореме о неявных операторах находим $w = w(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)$. Подстановка w во второе уравнение дает УР Шмидта

$$t(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{n} t_j(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)\varphi_j = P_{x_0} w(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon) = 0. \tag{10}$$

Выполненные построения позволяют доказать теорему о наследовании симметрии для УР (9) и (10).

Теорема 1 ([3]). *Справедливы соотношения*

$$f(L_gx_0,L_gv(x_0,\xi),\varepsilon)=f(L_gx_0,v(L_gx_0,\xi),\varepsilon)=K_gf(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon), \tag{11}$$
$$t(L_gx_0,L_gv(x_0,\xi),\varepsilon)=t(L_gx_0,v(L_gx_0,\xi),\varepsilon)=L_gt(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon). \tag{12}$$

Доказательство. Согласно (7), (8) запишем (1) в точке ветвления $(L_gx_0;0)$ в проекциях

$$\begin{aligned}\widehat{B}_{L_gx_0}\widetilde{u}&=(I-Q_{L_gx_0})R(L_gx_0,v(L_gx_0,\xi)+\widetilde{u},\varepsilon),\\ 0&=Q_{L_gx_0}R(L_gx_0,v(L_gx_0,\xi)+\widetilde{u},\varepsilon).\end{aligned} \tag{13}$$

Для сужения оператора B_{x_0} на подпространство $E_1^{\infty-n}(x_0)$ выполнено соотношение симметрии

$$K_g\widehat{B}_{x_0}=K_gB_{x_0}(I-P_{x_0})\overset{(3)}{=}B_{L_gx_0}L_g(I-P_{x_0})\overset{(6)}{=}B_{L_gx_0}(I-P_{L_gx_0})L_g=\widehat{B}_{L_gx_0}L_g. \tag{14}$$

Применяя $K_g^{-1}=K_{g^{-1}}$ к первому уравнению (13), получим

$$K_g^{-1}\widehat{B}_{L_gx_0}\widetilde{u}\overset{(14)}{=}\widehat{B}_{x_0}L_g^{-1}\widetilde{u}\overset{(6)}{=}(I-Q_{x_0})K_g^{-1}R(L_gx_0,v(L_gx_0,\xi)+\widetilde{u},\varepsilon)=$$
$$=(I-Q_{x_0})R(x_0,v(x_0,\xi)+L_g^{-1}\widetilde{u},\varepsilon).$$

В силу теоремы о неявных операторах находим его единственное решение

$$L_g^{-1}\widetilde{u}=u(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon)\in E_1^{\infty-n}(x_0)\Longrightarrow\widetilde{u}=L_gu(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon).$$

Подстановка найденного решения во второе уравнение (13) дает УР Ляпунова в точке ветвления $(L_gx_0;0)$ и его групповую симметрию (11)

$$f(L_gx_0,v(L_gx_0,\xi),\varepsilon)\equiv Q_{L_gx_0}R(L_gx_0,v(L_gx_0,\xi)+L_gu(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon),\varepsilon)\overset{(4),\,(6)}{=}$$
$$\overset{(4),\,(6)}{=}K_gQ_{x_0}R(x_0,v(x_0,\xi)+u(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon),\varepsilon)=K_gf(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon).$$

Для доказательства соотношения (12) запишем уравнение (1) в точке ветвления $(L_gx_0;0)$ в виде системы

$$\begin{aligned}\widehat{B}_{L_gx_0}L_g(x-x_0)&=R(L_gx_0,L_g(x-x_0),\varepsilon)+\sum_{i=1}^n\xi_iz_i(L_gx_0),\\ \xi_j&=\langle L_g(x-x_0),\gamma_j(L_gx_0)\rangle.\end{aligned} \tag{15}$$

Полагая $L_g(x-x_0)=L_gv(x_0,\xi)+\widetilde{w}=v(L_gx_0,\xi)+\widetilde{w}$, в силу групповой симметрии $\widehat{B}_{x_0}$

$$K_g\widehat{B}_{x_0}h=K_gB_{x_0}h+\sum_{i=1}^n\langle h,\gamma_i(x_0)\rangle K_gz_i(x_0)\overset{(3)-(5)}{=}B_{L_gx_0}L_gh+$$
$$+\sum_{i=1}^n\langle L_gh,\gamma_i(L_gx_0)\rangle z_i(L_gx_0)=\widehat{B}_{L_gx_0}L_gh$$

находим

$$0=\widehat{B}_{L_gx_0}\widetilde{w}-R(L_gx_0,L_gv(x_0,\xi)+\widetilde{w},\varepsilon)=K_g[\widehat{B}_{x_0}L_g^{-1}\widetilde{w}-R(x_0,v(x_0,\xi)+L_g^{-1}\widetilde{w},\varepsilon)].$$

Отсюда следует $L_g^{-1}\widetilde{w}=w(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon)$ или $\widetilde{w}=L_gw(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon)$. Тогда из второго уравнения (15) получаем УР Шмидта в точке $(L_gx_0;0)$ и его групповую симметрию (12)

$$t(L_gx_0,L_gv(x_0,\xi),\varepsilon)\equiv P_{L_gx_0}\widetilde{w}\overset{(6)}{=}L_gP_{x_0}w(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon)=L_gt(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon).\quad\square$$

Замечание 1. Пусть x_0 — изолированная точка ветвления уравнения (1). Тогда ядро $\mathcal{N}(B_{x_0})$ инвариантно относительно матричного представления $\mathcal{A}_{g(a)}$: $\mathcal{A}_{g(a)}\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji}(a)\varphi_j \Rightarrow \widetilde{\xi}_i = \mathcal{A}_{g(a)}\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(a)\xi_j$ и $v(L_g x_0, \xi) = L_g v(x_0, \xi) = v(x_0, \widetilde{\xi}) = v(x_0, \mathcal{A}_{g(a)}\xi)$. Аналогично подпространство $\mathcal{N}^*(B_{x_0})$ инвариантно относительно представления $\mathcal{B}_{g(a)}$: $\mathcal{B}_{g(a)}\psi_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{kj}(a)\psi_j$.

Следствие 1 ([7]). Для инвариантного ядра теорема о наследовании симметрии УР принимает вид $f(\mathcal{A}(a)\xi, \varepsilon) = \mathcal{B}(a) f(\xi, \varepsilon)$ для УР Ляпунова и $t(\mathcal{A}(a)\xi, \varepsilon) = \mathcal{A}(a) t(\xi, \varepsilon)$ для УР Шмидта.

Подобно [12]–[15] и [10] (гл. 4.2.4, 5.3.2) введем

Определение. УР (9) (соответственно (10)) является уравнением потенциального типа, если в окрестности точки $(x_0; 0)$ выполняется равенство

$$f(y, v(y, \xi), \varepsilon) = d \operatorname{grad}_y U(y, \xi, \varepsilon), \tag{16}$$

где d — обратимый оператор. Тогда функционал $U(y, \xi, \varepsilon)$ называется потенциалом УР (9) (соответственно (10)), а оператор f (соответственно t) — псевдоградиентом функционала U.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{c_1}$)–$\mathbf{c_3}$) *и УР* (9) *потенциального типа. Его потенциал* U *инвариантен относительно представления* $L_{g(a)}$ *тогда и только тогда, когда*

$$L_g^* d^{-1} K_g = d^{-1}. \tag{17}$$

Доказательство. В силу потенциальности УР (9) и теоремы Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$U(y, \xi, \varepsilon) = \int_0^1 \langle d^{-1} f(\theta y, v(\theta y, \xi), \varepsilon), y \rangle_H d\theta,$$
$$U(L_g y, \xi, \varepsilon) = \int_0^1 \langle d^{-1} f(L_g \theta y, v(L_g \theta y, \xi), \varepsilon), L_g y \rangle_H d\theta.$$

Согласно (11), (16) $d \operatorname{grad}_y U(y, \xi, \varepsilon) = K_g^{-1} f(L_g y, v(L_g y, \xi), \varepsilon)$, откуда по теореме Лагранжа $U(y, \xi, \varepsilon) = \int\limits_0^1 \langle d^{-1} K_g^{-1} f(L_g \theta y, v(L_g \theta y, \xi), \varepsilon), y \rangle_H d\theta$. Потенциал $U(y, \xi, \varepsilon)$ L_g-инвариантен, если $U(y, \xi, \varepsilon) = U(L_g y, \xi, \varepsilon)$, что возможно тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \langle (L_g^* d^{-1} - d^{-1} K_g^{-1}) f(L_g \theta y, v(L_g \theta y, \xi), \varepsilon), y \rangle_H d\theta = 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно равенству (17). $\square$

Следствие 2. Необходимым и достаточным условием инвариантности потенциала для УР (10) потенциального типа является равенство $L_g^* d^{-1} = d^{-1} L_g^{-1}$.

Следствие 3 ([10], [15]). Пусть x_0 — изолированная точка ветвления G-инвариантного уравнения (1) и соответствующее УР Ляпунова (Шмидта) является уравнением потенциального типа, т. е. $f(\xi, \varepsilon) = d \operatorname{grad}_\xi U(\xi, \varepsilon)$ $(t(\xi, \varepsilon) = d \operatorname{grad}_\xi U(\xi, \varepsilon))$ с некоторой обратимой матрицей d. Тогда потенциал УР $U(\xi, \varepsilon)$ является инвариантом представления $\mathcal{A}_{g(a)}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}'_{g(a)} d^{-1} \mathcal{B}_{g(a)} = d^{-1}$ для УР Ляпунова и $\mathcal{A}'_{g(a)} d^{-1} \mathcal{A}_{g(a)} = d^{-1}$ для УР Шмидта.

Для УР (9), (10) имеет место

Лемма. *Псевдоградиент f (соответственно t) инвариантного функционала является (L_g, K_g)- (соответственно (L_g, L_g)-) эквивариантом в смысле (2). Для всех $X \in T^r_{g(a)}$ в некоторой окрестности точки $(x_0; 0)$ справедливо косимметрическое тождество*

$$\begin{aligned}&\langle d^{-1} f(y, v(y, \xi), \varepsilon), X(y + v(y, \xi) + u(y, v(y, \xi), \varepsilon))\rangle_H = 0\\&(\langle d^{-1} t(y, v(y, \xi), \varepsilon), X(y + v(y, \xi) + u(y, v(y, \xi), \varepsilon))\rangle_H = 0).\end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Пусть норма $\|h\|_{E_1}$ достаточно мала. Так как оператор f левой части УР (9) потенциального типа, т. е. верно равенство (16), то

$$U(y + \lambda L_g^{-1} h, \xi, \varepsilon) - U(y, \xi, \varepsilon) = \lambda \langle d^{-1} f(y, v(y, \xi), \varepsilon), L_g^{-1} h\rangle_H + o(\|\lambda L_g^{-1} h\|_{E_1}),$$
$$U(L_g y + \lambda h, \xi, \varepsilon) - U(L_g y, \xi, \varepsilon) = \lambda \langle d^{-1} f(L_g y, v(L_g y, \xi), \varepsilon), h\rangle_H + o(\|\lambda h\|_{E_1}).$$

В силу инвариантности потенциала U левые части этих равенств совпадают. Тогда

$$\langle {L^*}_g^{-1} d^{-1} f(y, v(y, \xi), \varepsilon) - d^{-1} f(L_g y, v(L_g y, \xi), \varepsilon), h\rangle_H \overset{(17)}{=}$$
$$\overset{(17)}{=} \langle d^{-1}(K_g f(y, v(y, \xi), \varepsilon) - f(L_g y, v(L_g y, \xi), \varepsilon)), h\rangle_H = 0,$$

откуда следует первая часть леммы.

Пусть $X \in T^r_{g(a)}$ и $L_{g(a(t))}$ — однопараметрическая подгруппа $L_{g(a)}$. В силу инвариантности функционала U имеем

$$0 = U(L_{g(a(t))} y, \xi, \varepsilon) - U(y, \xi, \varepsilon) = \langle d^{-1} f(y, v(y, \xi), \varepsilon), (L_{g(a(t))} - I)(y + v(y, \xi) + u(y, v(y, \xi), \varepsilon))\rangle_H +$$
$$+ o(\|(L_{g(a(t))} - I)(y + v(y, \xi) + u(y, v(y, \xi), \varepsilon))\|_{E_1}).$$

Переходя к пределу при $\|h\|_{E_1} \to 0$, получаем (18).

Аналогично доказывается соответствующее утверждение для УР Шмидта (10). □

Следствие 4. Для случая инвариантного ядра УР потенциального типа (9) и (10) удовлетворяют косимметрическому тождеству

$$\langle d^{-1} f(\xi, \varepsilon), X_j \xi\rangle_{\Xi^n} = 0 \quad \text{и} \quad \langle d^{-1} t(\xi, \varepsilon), X_j \xi\rangle_{\Xi^n} = 0, \tag{19}$$

где X_j, $j = 1, \ldots, l$, — инфинитезимальные операторы l-мерного представления $\mathcal{A}_{g(a)}$ в n-мерном пространстве Ξ^n коэффициентов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в разложении произвольного элемента $\varphi \in \mathcal{N}(B_{x_0})$ по базису $\{\varphi_j\}_1^n$.

3. Теорема о редукции УР

Следуя [1], [2], получим достаточное условие редукции УР потенциального типа в условиях групповой симметрии (2) нелинейного уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия $\mathbf{c_1}$)–$\mathbf{c_3}$), УР (9) (соответственно (10)) потенциального типа, его потенциал принадлежит классу C^2 в некоторой окрестности точки ветвления $(x_0; 0)$ и является инвариантом представления L_g группы $G_r(a)$, s — размерность стационарной подгруппы элемента x_0, причем $m = r - s > 0$. Тогда*

1. *если $m = n$, то для всех $(\xi(\varepsilon), \varepsilon)$ (или $(v(x_0, \xi(\varepsilon)), \varepsilon)$) из некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^{n+1}$ УР (9) (соответственно (10)) выполнено тождественно*;
2. *если $m < n$ и $n \geq 2$, то имеет место частичная редукция УР: m из его уравнений являются линейными комбинациями остальных $(n - m)$.*

Доказательство. Примем соглашение о нумерации элементов базиса в $\mathcal{N}(B_{x_0})$ п. 2. Тогда согласно косимметрическому тождеству (18) в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^{n+1}$ имеем

$$0 = \langle df(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon), X_k(x_0 + v(x_0,\xi) + u(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon))\rangle_H =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} f_j(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon)[\langle dz_j, \varphi_k\rangle_H + \langle dz_j, X_k(v(x_0,\xi) + u(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon))\rangle_H],$$

где $k = 1,\dots,m$, причем ранг $n\times m$-матрицы $[\langle dz_j, \varphi_k\rangle_H]$ (соответственно $[\langle d\varphi_j, \varphi_k\rangle_H]$ для УР (10)) равен m. $\square$

Замечание 2. Теоремы 2, 3 и лемма справедливы также в условиях обычной потенциальности УР (9), т. е. при $d = I$. Если выполняются достаточные условия потенциальности [8], [9], то $\langle z_j, \varphi_k\rangle_H = \delta_{jk}$.

Замечание 3. Результаты [1], [2] верны, если нелинейное уравнение (1) является уравнением потенциального типа [16].

Замечание 4. Условие плотности вложения $E_1 \subset E_2$ оказывается излишним в случае гельдеровых пространств.

Замечание 5. Для инвариантного ядра получаем редукцию [15], [10], [6], [17] УР потенциального типа, потенциал которого является инвариантом l-мерного представления $\mathcal{A}_{g(a)}$, имеющего полную систему $\{I_j(\xi)\}_1^{l_1}$, $n - l_1 \le l$, функционально независимых инвариантов.

Действительно, если $U(\xi,\varepsilon) = F(I_1(\xi),\dots,I_{l_1}(\xi),\varepsilon)$, то УР Ляпунова (Шмидта) принимает вид $f(\xi,\varepsilon) = d\,\mathrm{grad}_\xi\, U(\xi,\varepsilon) = d\,\mathrm{grad}_\xi\, F(I_1(\xi),\dots,I_{l_1}(\xi),\varepsilon)$. Поскольку матрица d обратима и система инвариантов $\{I_j(\xi)\}_1^{l_1}$ функционально независима, то УР редуцируется к $l_1 \times l_1$-системе $\frac{\partial}{\partial I_j} F(I_1(\xi),\dots,I_{l_1}(\xi),\varepsilon) = 0$.

4. Приложения к задачам о нарушении симметрии

Пусть x_0 — изолированная точка ветвления, т. е. $L_g x_0 = x_0$ и потенциал УР является инвариантом матричного представления $\mathcal{A}_g$: $\mathcal{A}_g\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji}(a)\varphi_j \Rightarrow \widetilde{\xi}_i = \mathcal{A}_g\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(a)\xi_j$. Здесь левая часть УР представляет собой нелинейный оператор, действующий в конечномерных подпространствах, инвариантных при действии представлений L_g, K_g. Оператор K_g порождает конечномерное представление $\mathcal{B}_g = \|\beta_{ij}(a)\|_{i,j=1}^{n}$ в подпространстве дефектных функционалов $\mathcal{N}^*(B_{x_0}) = \mathrm{span}\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$. Таким образом, возникает задача построения общего вида УР по допускаемой группе симметрии [6], [7], [10], [17].

Косимметрическое тождество (18) позволяет дать новый подход к ее решению.

Рассмотрим два простых примера потенциальных (потенциального типа) УР с симметриями групп вращений $SO(2)$ и $SH(2)$.

4.1. *Двумерное УР с группой симметрии $SO(2)$.*

Теорема 4 ([7], [10], [17]). *Двумерное вещественное непрерывно дифференцируемое потенциальное УР с симметрией $SO(2)$ допускает симметрию $O(2)$ и в комплексном базисе подпространства $\mathcal{N}(B)$ имеет вид*

$$f_1(\xi,\varepsilon) \equiv \xi_1|\xi|^{-1}u(|\xi|,\varepsilon) = 0, \quad f_2(\xi,\varepsilon) \equiv \xi_2|\xi|^{-1}u(|\xi|,\varepsilon) = 0,$$
$$\xi_2 = \overline{\xi}_1, \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1\xi_2}, \quad U(\xi,\varepsilon) = U(|\xi|,\varepsilon) = \int_0^{|\xi|} u(s,\varepsilon)ds. \tag{20}$$

Соответственно в вещественном базисе $\mathcal{N}(B)$

$$f_1(\tau,\varepsilon) \equiv \tau_1|\tau|^{-1}u(|\tau|,\varepsilon) = 0, \quad f_2(\tau,\varepsilon) \equiv \tau_2|\tau|^{-1}u(|\tau|,\varepsilon) = 0,$$
$$|\tau| = \sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}, \quad U(\tau,\varepsilon) = \int_0^{|\tau|} u(s,\varepsilon)ds. \tag{21}$$

Здесь функция $u(s,\varepsilon)$ и ее производная по s непрерывны в некоторой окрестности нуля $(0,0)$ и являются бесконечно малыми при $s \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Для группы вращений $SO(2)$ и вещественного непрерывно дифференцируемого УР в комплексном базисе $\varphi_1 = \exp(i\alpha x)$, $\varphi_2 = \exp(-i\alpha x)$ теорема о наследовании симметрии имеет вид

$$f(\mathcal{A}(a)\xi,\varepsilon) = \mathcal{A}(a)f(\xi,\varepsilon), \quad \mathcal{A}(a) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha a} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha a}\end{pmatrix},$$
$$X\xi = \Big(-\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_2}\Big)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\xi_2\\ \xi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}.$$

Согласно косимметрическому тождеству $0 = \langle f(\xi,\varepsilon), X\xi\rangle = -\xi_2 f_1(\xi,\varepsilon) + \xi_1 f_2(\xi,\varepsilon)$. Следовательно, отношения $\frac{f_1(\xi,\varepsilon)}{\xi_1} = \frac{f_2(\xi,\varepsilon)}{\xi_2}$ равны произвольной непрерывно дифференцируемой функции $w(\sqrt{\xi_1\xi_2},\varepsilon)$, зависящей от единственного инварианта $I(\xi) = \sqrt{\xi_1\xi_2} = |\xi|$. Выполнено необходимое и достаточное условие потенциальности системы разветвления $\frac{\partial f_1}{\partial\xi_2} = w'(|\xi|,\varepsilon)\frac{\xi_1\xi_2}{2|\xi|} = \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}$. Полагая $w(|\xi|,\varepsilon) = |\xi|^{-1}u(|\xi|,\varepsilon)$, где $u(|\xi|,\varepsilon)$ — произвольная функция с указанными свойствами гладкости, получаем $U(\xi,\varepsilon) = U(|\xi|,\varepsilon) = \int\limits_0^{|\xi|} u(s,\varepsilon)ds$ и УР (20).

Аналогично в вещественном базисе $\mathcal{N}(B)$

$$\mathcal{A}(a) = \begin{pmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{pmatrix}, \quad X\tau = \Big(-\tau_2\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_2}\Big)\tau = \begin{pmatrix}-\tau_2\\ \tau_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{pmatrix}.$$

Из косимметрического тождества следует, что отношения $\frac{f_1(\tau,\varepsilon)}{\tau_1} = \frac{f_2(\tau,\varepsilon)}{\tau_2}$ равны произвольной непрерывно дифференцируемой функции $w(|\tau|,\varepsilon)$ и $\frac{\partial f_1}{\partial\tau_2} = \frac{\partial f_2}{\partial\tau_1}$. Это означает, что УР потенциально. Полагая $w(|\tau|,\varepsilon) = |\tau|^{-1}u(|\tau|,\varepsilon)$, где функция $u(|\tau|,\varepsilon)$ обладает указанными свойствами гладкости, получаем (21), и согласно [18]

$$U(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2}\int_0^1 f_k(t\tau_1,t\tau_2)\tau_k dt = \int_0^1 \frac{u(t|\tau|,\varepsilon)(t\tau_1^2+t\tau_2^2)dt}{\sqrt{(t\tau_1)^2+(t\tau_2)^2}} = \int_0^1 u(t|\tau|,\varepsilon)d(t|\tau|) = \int_0^{|\tau|} u(s,\varepsilon)ds. \quad \square$$

4.2. *Двумерное УР с группой симметрии $SH(2)$.* Рассмотрим вещественное непрерывно дифференцируемое УР, инвариантное относительно группы гиперболических поворотов $\mathcal{A}(a) = \left(\begin{smallmatrix}\cosh a & \sinh a\\ \sinh a & \cosh a\end{smallmatrix}\right)$. Здесь $f(\mathcal{A}(a)\tau,\varepsilon) = \mathcal{A}(a)f(\tau,\varepsilon)$ и $X\tau = \big(\tau_2\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_2}\big)\tau = \left(\begin{smallmatrix}\tau_2\\ \tau_1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{smallmatrix}\right)$.

Теорема 5. *Непрерывно дифференцируемое двумерное УР потенциального типа с симметрией $SH(2)$ допускает симметрию $H(2)$ и имеет вид*

$$f_1(\tau,\varepsilon) \equiv \tau_1|\tau|^{-1}u(|\tau|,\varepsilon) = 0, \quad f_2(\tau,\varepsilon) \equiv \tau_2|\tau|^{-1}u(|\tau|,\varepsilon) = 0, \quad |\tau| = \sqrt{|\tau_1^2-\tau_2^2|}, \tag{22}$$

где функция $u(s,\varepsilon)$ и ее призводная по s непрерывны в некоторой окрестности $(0,0)$ и бесконечно малы при $s \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Потенциал УР (в смысле определения на с. 34) равен

$$U(\tau,\varepsilon) = \int_0^{|\tau|} u(s,\varepsilon)ds. \tag{23}$$

Доказательство. Условие (17) теоремы 2 выполнено, если

$$\mathcal{A}^*(a)d\mathcal{A}(a) = d, \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для двумерного УР потенциального типа из косимметрического тождества следует $0 = \langle df(\tau,\varepsilon), X\tau\rangle = f_1(\tau,\varepsilon)\tau_2 - f_2(\tau,\varepsilon)\tau_1$. Поэтому отношения $\frac{f_1(\tau,\varepsilon)}{\tau_1} = \frac{f_2(\tau,\varepsilon)}{\tau_2}$ равны произвольной непрерывно дифференцируемой функции $w(|\tau|,\varepsilon)$, зависящей от единственного инварианта $|\tau|$. Таким образом, выполнено необходимое и достаточное условие потенциальности УР $\frac{\partial U}{\partial \tau_1} = f_1$, $\frac{\partial U}{\partial \tau_2} = -f_2 \Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial \tau_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial \tau_1}$. Полагая $w(|\tau|,\varepsilon) = |\tau|^{-1}u(|\tau|,\varepsilon)$, где функция $u(|\tau|,\varepsilon)$ обладает указанными выше свойствами, получаем (22), (23) и

$$U(\tau,\varepsilon) \overset{[18]}{=} \int_0^1 (f_1(t\tau_1,t\tau_2)\tau_1 - f_2(t\tau_1,t\tau_2)\tau_2)dt = \int_0^1 \frac{u(t|\tau|,\varepsilon)|t\tau_1^2 - t\tau_2^2|dt}{\sqrt{|(t\tau_1)^2-(t\tau_2)^2|}} =$$

$$= \int_0^1 u(t|\tau|,\varepsilon)d(t|\tau|) = \int_0^{|\tau|} u(s,\varepsilon)ds. \quad \square$$

4.3. *Многомерные задачи о нарушении симметрии.* Более сложные случаи частично потенциальных (потенциального типа) УР встречаются в бифуркационных задачах о нарушении симметрии [7], [10], [15], [17], [19]. В таких задачах нелинейное уравнение допускает группы вращений (евклидовых или гиперболических) и при переходе бифуркационного параметра через критическое значение рождаются решения с кристаллографической группой симметрии.

Введем следующее соглашение о нумерации вершин элементарной ячейки периодичности: если одной из вершин отвечает нечетный номер, то противоположной — последующий четный. При таком соглашении УР оказывается частично потенциальным (потенциального типа)для каждой пары переменных τ_{2k-1}, τ_{2k} [7], [10], [15], [17], [19].

Теорема 6. *Непрерывно дифференцируемое УР размерности $2l$ с симметриями $SO(2)$ ($SH(2)$) в i-й паре переменных τ_{2i-1}, τ_{2i} при независимых групповых параметрах для различных i и $2l$-мерного представления группы l-мерного куба имеет вид*

$$\begin{gathered} f_{2k-1}(\tau,\varepsilon) \equiv \tau_{2k-1}\underset{k}{|\tau|}^{-1}u(\underset{k}{|\tau|},\underset{2}{|\tau|},\ldots,\underset{k-1}{|\tau|},\underset{1}{|\tau|},\underset{k+1}{|\tau|},\ldots,\underset{l}{|\tau|},\varepsilon) = 0, \\ f_{2k}(\tau,\varepsilon) \equiv \tau_{2k}\underset{k}{|\tau|}^{-1}u(\underset{k}{|\tau|},\underset{2}{|\tau|},\ldots,\underset{k-1}{|\tau|},\underset{1}{|\tau|},\underset{k+1}{|\tau|},\ldots,\underset{l}{|\tau|},\varepsilon) = 0, \quad k = 1,\ldots,l, \end{gathered} \tag{24}$$

где $\underset{k}{|\tau|} = \sqrt{\tau_{2k-1}^2 + \tau_{2k}^2}$ ($\underset{k}{|\tau|} = \sqrt{|\tau_{2k-1}^2 - \tau_{2k}^2|}$ для симметрии $SH(2)$). Функция u инвариантна относительно попарных перестановок аргументов с номерами, большими единицы, и вместе с ее производными по каждому аргументу $\underset{s}{|\tau|}$ является бесконечно малой при $\underset{s}{|\tau|} \to 0$, $s = 1,\ldots,l$, $\varepsilon \to 0$. УР (24) обладает частичной потенциальностью в том смысле, что k-я пара уравнений потенциальна (потенциального типа) по k-й паре переменных (τ_{2k-1},τ_{2k}). Если $\underset{1}{U}(\tau,\varepsilon) = U(\underset{1}{|\tau|},\underset{2}{|\tau|},\ldots,\underset{l}{|\tau|},\varepsilon) = \int_0^{\underset{1}{|\tau|}} u(s,\underset{2}{|\tau|},\ldots,\underset{l}{|\tau|},\varepsilon)ds$, то $\underset{k}{U}(\tau,\varepsilon) = U(\underset{k}{|\tau|},\underset{2}{|\tau|},\ldots,\underset{k-1}{|\tau|},\underset{1}{|\tau|},\underset{k+1}{|\tau|},\ldots,\underset{l}{|\tau|},\varepsilon)$, причем $U(\underset{1}{|\tau|},\ldots,\underset{i}{|\tau|},\ldots,\underset{j}{|\tau|},\ldots,\underset{l}{|\tau|},\varepsilon) = U(\underset{1}{|\tau|},\ldots,\underset{j}{|\tau|},\ldots,\underset{i}{|\tau|},\ldots,\underset{l}{|\tau|},\varepsilon)$.

Действительно, здесь имеется l инвариантов $\underset{k}{|\tau|}$, ровно столько же, сколько пар переменных. Поэтому доказательство проводится по той же схеме, что и для теорем 4, 5.

Для симметрий $SO(2)$ случай $l = 2$ соответствует четырехмерному вырождению в задачах о капиллярно-гравитационных поверхностных волнах в пространственном слое жидкости с прямоугольной решеткой периодичности [7], [10], [15], [17]. Случай $l = 3$ соответствует задаче о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла с простой кубической решеткой и элементарной ячейкой периодичности в виде октаэдра [7], [10], [15], [17].

При вырождениях более высоких порядков (больших $2l$) система функционально независимых инвариантов не исчерпывается инвариантами вида $|\underset{k}{\tau}|$, $k = 1, \dots, l$, что не дает возможности представить частичные потенциалы единообразной функцией. Это проявляется уже при $l = 3$ и кубической элементарной ячейке периодичности: для вырождения 8-го порядка система функционально независимых инвариантов содержит также "угловые" инварианты.

Замечание 6. Аналогично можно рассмотреть случаи смешанных симметрий, евклидовых и гиперболических вращений.

Замечание 7. В работе [19] получен общий вид двумерных и $2l$-мерных аналитических УР с симметриями $SO(2)$ и $SH(2)$.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

1. Макаренко Н.И. *О ветвлении решений инвариантных вариационных уравнений* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 348. – № 3. – С. 302–304.
2. Макаренко Н.И. *Симметрия и косимметрия вариационных задач в теории волн* // Тр. межд. школы-семинара "Применение симметрии и косимметрии в теории бифуркаций и фазовых переходов", Сочи. – 2001. – С. 109–120.
3. Логинов Б.В. *Общая задача теории ветвления в условиях групповой симметрии* // Узб. матем. журн. – 1991. – № 1. – С. 38–44.
4. Recke L., Peterhof D. *Abstract forced symmetry breaking and forced frequency locking of modulated waves* // J. Different. Equat. – 1998. – V. 144. – P. 233–262.
5. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 527 с.
6. Логинов Б.В. *О вариационных методах в теории ветвления в условиях групповой инвариантности* // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 9. – С. 1710–1712.
7. Логинов Б.В. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности.* – Ташкент: Фан, 1985. – 184 с.
8. Треногин В.А., Сидоров Н.А. *Условия потенциальности уравнения разветвления и точки бифуркации нелинейных операторов* // Узб. матем. журн. – 1992. – № 2. – С. 40–49.
9. Sidorov N.A., Trenogin V.A., Loginov B.V. *Bifurcation, potentiality, group-theoretical and iterative methods* // ZAMM. – 1996. – Suppl. 2. – P. 246-248.
10. Sidorov N.A., Loginov B.V., Sinitsyn A.V., Falaleev M.V. *Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications.* – Math. and its Appl. – V. 550. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 548 p.
11. Vanderbauwhede A. *Local Bifurcation and Symmetry.* – Res. notes in math. – V. 75. – Boston, London, Melbourne: Pitman, 1982. – 350 p.
12. Сидоров Н.А., Абдуллин В. Р. *Сплетаемые уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 7. – С. 107–124.
13. Loginov B.V, Konopleva I.V. *Symmetry of resolving systems in degenerated functional equations* // Тр. Межд. конф. "Симметрия и дифференциальные уравнения" (под ред. В.К. Андреева), Красноярск, ИВМ СО РАН, Красноярск. ун-т, 2000. – С. 142–145.
14. Loginov B.V., Konopleva I.V. *Symmetry of resolving systems for differential equations with Fredholm operator at the derivative* // Proc. of Int. Conf. MOGRAN-2000 / V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov, F.M. Mahomed (Eds.), Ufa, USATU. – 2000. – P.116-119.
15. Коноплева И.В., Логинов Б. В. *Обобщенная жорданова структура и симметрия разрешающих систем в теории ветвления* // Вестн. Самарск. ун-та. – 2001. – № 4. – С. 56–84.

16. Loginov B.V, Konopleva I.V. *Nonlinear operators with symmetry and potential branching equations* // Proc. of Int. Conf. CAIM-XI, May 29-31, 2003 / A. Georgescu (Ed.), Oradea University, Romania. – 2003. – V. 1. – P. 153–158.
17. Логинов Б.В. *Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия* // Вестн. Самарск. ун-та. – 1998. – № 4. – С. 15–70.
18. Berger Ma., Berger Me. *Perspectives in nonlinearity.* – New York, Amsterdam: W.A. Benjamin, ICC. 1968. – 190 p.
19. Логинов Б.В., Сидоров Н. А. *Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова–Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации* // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 5. – С. 681–692.
20. Логинов Б.В., Коноплева И.В., Русак Ю.Б. *О ветвлении решений нелинейных уравнений с потенциальъными и частично потенциальъными уравнениями разветвления* // Межвуз. сб. научн. стат. "Функциональный анализ". – Ульяновск, УлГПУ. – 2003. – Т. 38. – С. 41–52.

Ульяновский государственный
технический университет

Поступила
25.06.2004