

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.518

С.Ю. ГАЛКИНА

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ–ХААРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Работа посвящена исследованию поведения коэффициентов Фурье–Хаара $a_{mn}(f)$ от функций f , интегрируемых по Лебегу на квадрате $D = [0, 1]^2$ и имеющих ограниченную вариацию Витали $V_D f$. А именно, найдены точные константы C_1 , C_2 и C_3 в оценках

$$|a_{mn}(f)| \leq C_1 \cdot V_D f, \quad \sum_{n=2^{p+1}}^{2^{p+1}} \sum_{m=2^{k+1}}^{2^{k+1}} |a_{mn}(f)| \leq C_2 \cdot V_D f$$

(теорема 3) и в оценке

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} |a_{mn}(f)| \leq C_3 \cdot V_D f$$

(теорема 4).

Такие оценки для функций одной переменной впервые получены П.Л. Ульяновым ([1], сс. 361, 372). Точные константы для функций одной переменной найдены автором в [2].

Пусть $D = [0, 1]^2$ — единичный квадрат, $\Pi = [a, b] \times [c, d] \subset D$ — произвольный прямоугольник из D , $\tau(\Pi)$ — семейство всех подмножеств в Π вида $T = \{(x_k, y_l) \mid k = 0, \dots, m, l = 0, \dots, n; a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d\}$. Для произвольной точки $(x, y) \in \Pi$ неотрицательные числа η и ξ будем называть допустимыми приращениями в Π по x и y соответственно, если $x + \eta \in [a, b]$ и $y + \xi \in [c, d]$. Если $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция, $(x, y) \in \Pi$ и η, ξ — допустимые приращения в Π , то определены величины

$$\Delta_{\eta}^{(1)} f(x, y) = f(x + \eta, y) - f(x, y), \quad \Delta_{\xi}^{(2)} f(x, y) = f(x, y + \xi) - f(x, y)$$

и

$$\Delta_{\xi}^{(2)} \Delta_{\eta}^{(1)} f(x, y) = f(x + \eta, y + \xi) + f(x, y) - f(x + \eta, y) - f(x, y + \xi).$$

Определение 1 ([3]). Вариацией Витали функции $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ по прямоугольнику Π называется величина

$$V_{\Pi} f = \sup_{T \in \tau(\Pi)} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} |\Delta_{\xi_l}^{(2)} \Delta_{\eta_k}^{(1)} f(x_k, y_l)|,$$

где $\eta_k = x_{k+1} - x_k$ и $\xi_l = y_{l+1} - y_l$ для $k = 0, \dots, m - 1, l = 0, \dots, n - 1$. Вариацию $V_{\Pi} f$ будем обозначать символом $V_{a \ c}^b \ f$. Класс функций, имеющих конечную вариацию Витали по D , обозначим через $V(D)$.

Лемма 1 ([3]). Пусть $0 \leq a \leq a_1 \leq a_2 \leq 1$ и $0 \leq b \leq b_1 \leq b_2 \leq 1$. Тогда

$$V_{a \ b}^{a_2 \ b_2} f = V_{a \ b}^{a_1 \ b_1} f + V_{a_1 \ b}^{a_2 \ b_1} f + V_{a \ b_1}^{a_1 \ b_2} f + V_{a_1 \ b_1}^{a_2 \ b_2} f.$$

Обозначим через $V_0(D)$ класс функций $\{f \in V(D) \mid f(\cdot, 0) \equiv 0, f(0, \cdot) \equiv 0\}$.

Определение 2. Функцию $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть неубывающей, если для любых $(x, y) \in D$ и допустимых в D приращений η, ξ выполняется неравенство $\Delta_\xi^{(2)} \Delta_\eta^{(1)} g(x, y) \geq 0$.

Это определение оправдывается тем, что любая функция $g \in V_0(D)$, неубывающая в смысле определения 2, не убывает по x при любом фиксированном y и не убывает по y при любом фиксированном x .

Лемма 2. Пусть $\Pi = [a, b] \times [c, d] \subset D$, $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Тогда

$$V_\Pi f = f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c).$$

Следствие. Если $f \in V_0(D)$ и f неубывающая, то $V_D f = f(1, 1)$.

Известно [4], что функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию Витали по D тогда и только тогда, когда она является разностью двух неубывающих функций. В частности, любая неубывающая функция имеет ограниченную вариацию Витали. Этот результат допускает следующее уточнение.

Теорема 1. Пусть $f \in V(D)$. Тогда найдутся такие неубывающие функции $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$, что $f = f_1 - f_2$ и $V_D f = V_D f_1 + V_D f_2$.

Обозначим через $V_L(D)$ класс функций $\{f \in V(D) \mid f(\cdot, 0), f(0, \cdot) \in L^1[0, 1]\}$.

Лемма 3. $V_L(D) = V(D) \cap L^1(D)$.

Результат теоремы 1 переносится и на функции класса $V_L(D)$.

Теорема 2. Для всякой функции $f \in V_L(D)$ найдутся неубывающие функции $f_1, f_2 \in V_L(D)$ такие, что $f = f_1 - f_2$ и $V_D f = V_D f_1 + V_D f_2$.

Определение 3. Пусть для некоторых $M, N \in \mathbb{N}$ заданы разбиения $T_1 = \{x_i\}_{i=0}^M$ и $T_2 = \{y_j\}_{j=0}^N$ отрезка $[0, 1]$. Обозначим через $T = \{D_{ij}\}_{i,j=1}^{M,N}$ соответствующее разбиение квадрата D на прямоугольники D_{ij} , определяемые так: $D_{11} = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$, $D_{1j} = [x_0, x_1] \times (y_{j-1}, y_j]$, $D_{i1} = (x_{i-1}, x_i] \times [y_0, y_1]$, $D_{ij} = (x_{i-1}, x_i] \times (y_{j-1}, y_j]$ при $2 \leq i \leq M$, $2 \leq j \leq N$. Тогда функцию P , принимающую на каждом из прямоугольников D_{ij} постоянные значения b_{ij} , будем называть ступенчатой функцией типа (M, N) .

В следующих двух леммах выявляется структура значений b_{ij} неубывающих ступенчатых функций на прямоугольниках D_{ij} .

Лемма 4. Пусть P — неубывающая ступенчатая функция типа (M, N) . Обозначим ее вариацию Витали по замыканию \bar{D}_{ij} прямоугольников D_{ij} через v_{ij} . Тогда $b_{ij} = \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j v_{mn} + b_{i1} + b_{1j} - b_{11}$ для всех $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$.

Имеет место и обратное утверждение.

Лемма 5. Пусть P — ступенчатая функция типа (M, N) , принимающая на прямоугольниках D_{ij} , $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$, постоянные значения b_{ij} , причем $b_{ij} = \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j v_{mn} + b_{i1} + b_{1j} - b_{11}$, где все v_{mn} неотрицательны, а $v_{11} = 0$. Тогда P — неубывающая функция и $V_{\bar{D}_{ij}} = v_{ij}$.

Пусть $\{\chi_m\}_{m=1}^\infty$ — функции Хаара (см., напр., [5], с. 77). Коэффициенты Фурье-Хаара $a_{mn}(f)$ функции $f \in L^1(D)$ вычисляются по формуле

$$a_{mn}(f) = \int_0^1 ds \int_0^1 \chi_m(t) \chi_n(s) f(t, s) dt. \quad (1)$$

Вместо χ_m возьмем функции $\tilde{\chi}_m$, которые описаны в следующем ниже определении и являются непрерывными слева. Поскольку при каждом $m = 1, 2, \dots$ функции $\tilde{\chi}_m$ и χ_m отличаются не более чем в трех точках, то равенство (1) останется верным, если заменить в нем χ_m на $\tilde{\chi}_m$.

Определение 4. а) $\tilde{\chi}_1(t) = 1$ при любом $t \in [0, 1]$.
б) Если $m = 2^k + i$, где $1 \leq i \leq 2^k$, $k = 0, 1, \dots$, и $t \in [0, 1]$, то

$$\tilde{\chi}_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \notin [\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}], i = 1; \\ 0 & \text{при } t \notin (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}], i \neq 1; \\ 2^{k/2} & \text{при } t \in [\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}], i = 1; \\ 2^{k/2} & \text{при } t \in (\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}], i \neq 1; \\ -2^{k/2} & \text{при } t \in (\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}]. \end{cases}$$

Лемма 6. Пусть $f \in L^1(D)$. Тогда для ее коэффициентов Фурье–Хаара верна формула

$$a_{mn}(f) = 2^{(k+p)/2} \int_{(j-1)/2^p}^{(2j-1)/2^{p+1}} ds \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \Delta_{1/2^{p+1}}^{(2)} \Delta_{1/2^{k+1}}^{(1)} f(t, s) dt,$$

где $m = 2^k + i$, $n = 2^p + j$; $1 \leq i \leq 2^k$, $1 \leq j \leq 2^p$; $k, p = 0, 1, \dots$

Следствие. У любой неубывающей функции $f \in L^1(D)$ коэффициенты Фурье–Хаара неотрицательны.

Теорема 3. а) Если $f \in V_L(D)$, то при любых $m, n \geq 2$ для коэффициентов Фурье–Хаара функции f верны оценки $|a_{mn}(f)| \leq 2^{-2-(k+p)/2} \cdot V_D(f)$ и $\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} |a_{mn}(f)| \leq 2^{-2-(k+p)/2} \cdot V_D(f)$, где $m = 2^k + i$, $n = 2^p + j$; $1 \leq i \leq 2^k$, $1 \leq j \leq 2^p$; $k, p = 0, 1, \dots$

б) Существует функция $f \in V_L(D)$ с отличной от нуля вариацией Витали, для которой в оценках п. а) достигается равенство.

Определение 5. Пусть $M, N \in \mathbb{N}$. Многочленом Хаара порядка (M, N) будем называть функцию $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ вида $P(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \tilde{\chi}_m(x) \tilde{\chi}_n(y)$, где $a_{mn} \in \mathbb{R}$, $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$.

Если $a_{mn} = a_{mn}(f)$, $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$, то будем также называть P многочленом Хаара функции f .

Ясно, что любой многочлен Хаара порядка $(2^M, 2^N)$ является ступенчатой функцией типа $(2^M, 2^N)$ в смысле определения 3, причем соответствующие разбиения T_1 и T_2 имеют вид

$$T_1 = \left\{ \frac{i}{2^M} \right\}_{i=0}^{2^M}, \quad T_2 = \left\{ \frac{j}{2^N} \right\}_{j=0}^{2^N}.$$

Лемма 7. Пусть P — неубывающий многочлен Хаара порядка $(2^M, 2^N)$. Тогда

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} |a_{mn}(P)| = \sum_{i=1}^{2^M} \sum_{j=1}^{2^N} v_{ij} l_k(i/2^M) l_p(j/2^N),$$

где $v_{ij} = V_{D_{ij}} P$, а ломаные $l_k(t)$, $t \in [0, 1]$, для любого $k = 0, 1, \dots$ определяются следующим образом:

$$l_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = \frac{p}{2^k}, p = 0, 1, \dots, 2^k; \\ 2^{-k/2-1} & \text{при } t = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{q}{2^k}, q = 0, 1, \dots, 2^k - 1; \\ \text{линейна} & \text{при } t \in [\frac{r-1}{2^{k+1}}, \frac{r}{2^{k+1}}], r = 1, \dots, 2^{k+1}. \end{cases}$$

Лемма 8. Пусть P — неубывающий многочлен Хаара порядка $(2^M, 2^N)$. Тогда

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} |a_{mn}(P)| = \sum_{i=1}^{2^M} \sum_{j=1}^{2^N} v_{ij} \cdot L_M(i/2^M) \cdot L_N(j/2^N),$$

где $L_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} l_k(t)$, $t \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots$

Лемма 9. Пусть \mathcal{P}_{MN} — множество всех неубывающих многочленов Хаара P порядка $(2^M, 2^N)$ таких, что $V_D P \neq 0$. Тогда

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_{MN}} \frac{\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} |a_{mn}(P)|}{V_D P} = \max_{1 \leq i \leq 2^M} L_M(i/2^M) \cdot \max_{1 \leq j \leq 2^N} L_N(j/2^N).$$

Лемма 10. Пусть $\mathcal{P} = \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}_{MN}$ — множество всех многочленов Хаара P таких, что $V_D P \neq 0$. Тогда

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \frac{\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} |a_{mn}(P)|}{V_D P} = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^2.$$

Лемма 11. Пусть $f \in L^1(D)$ и $P_N(x, y)$ — многочлен Хаара порядка $(2^N, 2^N)$ функции f . Тогда для любых $x \in (\frac{i-1}{2^N}, \frac{i}{2^N}]$ и $y \in (\frac{j-1}{2^N}, \frac{j}{2^N}]$ при $1 \leq i, j \leq 2^N$ верно равенство

$$P_N(x, y) = 2^{2N} \int_{(j-1)/2^N}^{j/2^N} ds \int_{(i-1)/2^N}^{i/2^N} f(t, s) dt.$$

Лемма 12. Пусть $f \in L^1(D)$ — неубывающая функция. Тогда

- а) многочлен Хаара $P_N(x, y) = \sum_{m=1}^{2^N} \sum_{n=1}^{2^N} a_{mn}(f) \tilde{\chi}_m(x) \tilde{\chi}_n(y)$ порядка $(2^N, 2^N)$ функции f — также неубывающая функция;
 б) выполняется неравенство $V_D P_N \leq V_D f$.

Теорема 4. а) Для любой функции $f \in V_L(D)$ верна оценка

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} |a_{mn}(f)| \leq \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^2 \cdot V_D f.$$

б) Найдется функция $f \in V_L(D)$ с отличной от нуля вариацией Витали, для которой в оценке п. а) достигается равенство.

Литература

1. Ульянов П.Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. — 1964. — Т. 63. — С. 356–391.
2. Галкина С.Ю. О коэффициентах Фурье–Хаара от функций с ограниченной вариацией // Матем. заметки. — 1992. — Т. 51. — Вып. 1. — С. 42–54.
3. Vitali G. *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variable reale* // Atti. Accad. Sci. Torino. — 1908. — V. 43. — P. 75–92.
4. Hahn H. *Theorie der reellen Funktionen*, Bd. 1. — 1921.
5. Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды*. — М.: Наука, 1984. — 496 с.

Нижегородский государственный
педагогический университет

Поступила
05.05.1999