ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 517.988

М.Ю. КОКУРИН, Н.А. ЮСУПОВА

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ КВАЛИФИЦИРОВАННОЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

1. Введение

В гильбертовом пространстве H рассматривается операторное уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где $A : H \to H$ — линейный непрерывный самосопряженный неотрицательный оператор, т.е. $A^* = A$, $(Au, u) \geq 0\ \forall u \in H$. Предполагается, что в (1) правая часть $f \in R(A)$, где $R(A) = \{v \in H : v = Au,\, u \in H\}$ есть образ оператора A. В наших условиях множество U_* решений уравнения (1) непусто. Замкнутость образа $R(A)$ в дальнейшем не предполагается, так что задача (1) является некорректной ([1], с. 9). Хорошо известно, что для отыскания решения подобных задач необходимо использовать методы регуляризации (напр., [1]–[3]), специально учитывающие эту их особенность.

В работе исследуется класс методов устойчивого решения уравнения (1) ([1], гл. 2; [2], гл. 2), которые при отсутствии погрешностей в исходных данных A, f записываются в виде

$$u_r = (I - Ag_r(A))u_0 + g_r(A)f, \quad r \geq r_0 \ \ (r_0 > 0). \tag{2}$$

Здесь и далее u_0 — фиксированное начальное приближение, r — параметр регуляризации, $\{g_r(\lambda)\}_{r\in[r_0,+\infty)}$ — семейство измеримых по Борелю функций на отрезке $[0, M]$, содержащем спектр $\sigma(A)$ оператора A. Следуя ([2], с. 28), предполагаем, что функции $g_r(\lambda)$ удовлетворяют условию

$$\sup_{\lambda\in[0,M]} \lambda^p|1 - \lambda g_r(\lambda)| \leq Cr^{-p} \quad \forall r \geq r_0, \ \ C = C(p), \ \ p \in [0, p_0], \ \ p_0 > 0. \tag{3}$$

При рассмотрении задач с погрешностями в данных наряду с (3) будет использоваться условие

$$\sup_{\lambda\in[0,M]} |\lambda^q g_r(\lambda)| \leq Cr^d \quad \forall r \geq r_0; \ \ d \in [0, 1], \ \ d = d(q), \ \ q \geq 0. \tag{4}$$

Наибольшее значение параметра p_0, для которого выполняется неравенство (3), называется квалификацией метода (2), причем не исключается и случай $p_0 = \infty$. В этих и последующих соотношениях через C обозначаются положительные абсолютные постоянные, вообще говоря, различные.

Классу методов (2) принадлежит, в частности, группа итерационных процедур

$$u_{n+1} = u_n - g(A)(Au_n - f), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{5}$$

соответствующих специальному выбору порождающих функций $g_r(\lambda)$ (см.(17)), при этом параметр регуляризации пробегает значения $r = n \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Предполагается, что функция $g(\lambda)$ в (5) измерима по Борелю, ограничена и непрерывна в точке $\lambda = 0$, $g(0) > 0$, и выполняется соотношение

$$\sup_{\lambda\in[\varepsilon,M]} |1 - \lambda g(\lambda)| < 1 \quad \forall\varepsilon \in (0, M). \tag{6}$$

Известно ([2], с. 42), что при выполнении условий (3), (6) вырабатываемые в соответствии с (2), (5) приближения $\{u_r\}$ и $\{u_n\}$ сходятся в норме пространства H к решению $u_* = u_*(u_0)$ уравнения (1), определяемому соотношениями

$$u_* \in U_*, \quad \|u_* - u_0\| = \min\{\|u - u_0\| : u \in U_*\}. \tag{7}$$

В то же время, следствием некорректности уравнения (1) является отсутствие квалифицированных по r, n оценок скорости сходимости $\{u_r\}$, $\{u_n\}$ к u_*, выполняющихся равномерно по u_*, $\|u_*\| \le C$. Для получения таких оценок на искомое решение u_* традиционно налагаются дополнительные условия истокопредставимости начальной невязки вида

$$u_* - u_0 = A^p v, \quad p > 0. \tag{8}$$

Неулучшаемость этих оценок на всем классе задач (1), решения которых удовлетворяют условию (8), подробно исследована в [1]–[3]. В данной работе изучается вопрос о том, в какой мере условие (8), достаточное для выполнения упомянутых оценок, является необходимым применительно к индивидуальной задаче (1). Устанавливаются условия на порождающие функции $g_r(\lambda)$, $g(\lambda)$, при выполнении которых указанное условие оказывается весьма близким к необходимому. Показывается, что многие известные процедуры регуляризации, включая метод М.М. Лаврентьева и его итерированный вариант, метод установления, классические итерационные методы ([2], гл. 2), удовлетворяют этим условиям. Рассматривается также случай приближенного задания правой части f уравнения (1).

2. Обратные теоремы о скорости сходимости методов регуляризации

Следуя ([4], с. 366), напомним, что функции от самосопряженного оператора A (в том числе в (2), (5), (8)) определяются с использованием порождаемого им семейства спектральных проекторов $\{P(\lambda)\}$, $\lambda \in [0, M]$, по следующей схеме. Пусть функция φ измерима, конечна и определена почти всюду на $[0, M]$ относительно семейства $\{P(\lambda)\}$, т. е. относительно мер Лебега–Стильтьеса, порожденных всеми функциями вида $\Psi_u(\lambda) = \|P(\lambda)u\|^2$, $u \in H$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \int_0^M \varphi(\lambda) dP(\lambda), \\ \|\varphi(A)u\|^2 &= \int_0^M |\varphi(\lambda)|^2 d\|P(\lambda)u\|^2, \quad u \in D(\varphi(A)). \end{aligned} \tag{9}$$

Область определения оператора $\varphi(A)$ имеет вид

$$D(\varphi(A)) = \left\{ u \in H : \int_0^M |\varphi(\lambda)|^2 d\|P(\lambda)u\|^2 < \infty \right\}. \tag{10}$$

При этом

$$\|\varphi(A)\|_{L(H,H)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{\{P(\lambda)\}} |\varphi(\lambda)|. \tag{11}$$

В теории линейных некорректных задач хорошо известно

Предложение 1 ([2], с. 42). *Пусть выполняется условие* (8). *Тогда для всех $q \ge 0$ таких, что $p + q \le p_0$, справедлива оценка*

$$\|A^q(u_r - u_*)\| \le Cr^{-(p+q)} \quad \forall r \ge r_0, \ \ u_* = u_*(u_0), \tag{12}$$

где $C = C(M, p, q, \|v\|)$.

Следующая теорема показывает, что условие истокопредставимости (8), достаточное для выполнения оценки (12), в ряде случаев близко к необходимому и, таким образом, не может быть существенно ослаблено.

Теорема 1. *Пусть функция $g_r(\lambda)$ с некоторым $m \in (0, M]$ удовлетворяет условию*

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{2\tau-1}|1-\lambda g_r(\lambda)|^2 dr \geq \frac{C}{\lambda^{2\tau}} \quad \forall \lambda \in (0, m], \quad \forall \tau \in (0, p_0), \tag{13}$$

где $C = C(\tau)$; для фиксированных A, f, u_0 и заданных p, q таких, что $p > 0$, $q \geq 0$, $p+q \leq p_0$, выполняется оценка (12) с константой C, не зависящей от r. Тогда справедливо включение

$$u_* - u_0 \in R(A^s) \quad \forall s \in (0, p). \tag{14}$$

Доказательство. Из (2), (12) с учетом равенства $f = Au_*$ находим

$$\|A^q(u_r - u_*)\|^2 = \|A^q(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\|^2 \leq \frac{C}{r^{2(p+q)}}. \tag{15}$$

На основании (9) из (15) получаем

$$\int_{(0,m]} r^{2(p+q)-1-\theta}\lambda^{2q}|1-\lambda g_r(\lambda)|^2 d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 \leq$$
$$\leq \int_{(0,M]} r^{2(p+q)-1-\theta}\lambda^{2q}|1-\lambda g_r(\lambda)|^2 d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 \leq \frac{C}{r^{1+\theta}} \quad \forall \theta \in (0, 2p).$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства по $r \in [r_0, +\infty)$, будем иметь

$$\int_{r_0}^{\infty}\int_{(0,m]} r^{2(p+q)-1-\theta}\lambda^{2q}|1-\lambda g_r(\lambda)|^2 d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 dr < \infty.$$

Так как подинтегральная функция в последнем неравенстве неотрицательна, на основании теоремы Фубини ([5], с. 318) имеем

$$\int_{(0,m]} \lambda^{2q}\left(\int_{r_0}^{\infty} r^{2(p+q)-1-\theta}|1-\lambda g_r(\lambda)|^2 dr\right) d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 < \infty. \tag{16}$$

Полагая в неравенстве (13) $\tau = p + q - \frac{\theta}{2}$, для внутреннего интеграла в (16) получаем оценку

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{2(p+q)-1-\theta}|1-\lambda g_r(\lambda)|^2 dr \geq \frac{C}{\lambda^{2(p+q)-\theta}} \quad \forall \lambda \in (0, m].$$

Поскольку в силу (7) элемент $(u_0 - u_*) \perp N(A)$, где $N(A) = \{u \in H : Au = 0\}$, функция $\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2$ непрерывна в точке $\lambda = 0$. Поэтому мера $d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2$ одноточечного множества $\{0\}$ равна нулю, и из (16) следует, что

$$\int_{(0,m]} \lambda^{-(2p-\theta)} d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 = \int_{[0,m]} \lambda^{-(2p-\theta)} d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 < \infty.$$

Отсюда, учитывая, что функция $\lambda^{-(2p-\theta)}$ непрерывна на $[m, M]$, получаем

$$\int_{[0,M]} \lambda^{-(2p-\theta)} d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 =$$
$$= \int_{[0,m]} \lambda^{-(2p-\theta)} d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 + \int_{(m,M]} \lambda^{-(2p-\theta)} d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 < \infty.$$

Последнее влечет $u_* - u_0 \in R(A^{p-\theta/2})$ (см. (10)), что в силу произвольности $\theta \in (0, 2p)$ дает $u_* - u_0 \in R(A^s)$ $\forall s \in (0, p)$. $\square$

Замечание 1. Теорема 1 с заменой в (13) интервала $(0,m]$ на $[m_0,m]\setminus\{0\}$, где $m_0<0$, остается в силе и в случае знакопеременного оператора $A=A^*$. При этом верхние грани в (3), (4) следует брать по подходящему отрезку $[M_0,M]\supset\sigma(A)$, где $M_0<0$; λ в правой части (13) следует заменить на $|\lambda|$.

Конкретизируем сказанное выше применительно к некоторым классическим процедурам регуляризации.

Пример 1. 1) Метод М.М. Лаврентьева $r^{-1}u_r+Au_r=f$ определяется семейством порождающих функций $g_r(\lambda)=(r^{-1}+\lambda)^{-1}$. Согласно ([2], с. 30) условия (3), (4) в данном случае выполняются, при этом квалификация метода $p_0=1$. Полагая в (13) для простоты $r_0=1$, получаем

$$\int_1^\infty r^{2\tau-1}|1-\lambda g_r(\lambda)|^2dr=\int_1^\infty\frac{r^{2\tau-1}}{(1+r\lambda)^2}dr\ge\frac{C(\tau)}{\lambda^{2\tau}},$$
$$C(\tau)=\int_M^\infty\frac{t^{2\tau-1}}{(1+t)^2}dt\quad\forall\lambda\in(0,M]\quad(\tau\in(0,1)).$$

Здесь при оценке интеграла по r использовалась подстановка $r=\frac{t}{\lambda}$.

2) Вариант метода М.М. Лаврентьева $ir^{-1}u_r+Au_r=f$, $i=\sqrt{-1}$, предназначенный для случая комплексного пространства H и знакопеременного оператора A, определяется семейством $g_r(\lambda)=(r^{-1}i+\lambda)^{-1}$. В данном случае условия (3), (4) также выполняются, причем $p_0=1$ (см. [2], с. 23). Полагая в (13) $r_0=1$, с учетом замечания 1 получаем оценку

$$\int_1^\infty r^{2\tau-1}|1-\lambda g_r(\lambda)|^2dr\ge\frac{C(\tau)}{|\lambda|^{2\tau}},\quad C(\tau)=\int_{M'}^\infty\frac{t^{2\tau-1}}{1+t^2}dt,$$
$$M'=\max\{M,|M_0|\}\quad\forall\lambda\in[M_0,M]\setminus\{0\}\quad(\tau\in(0,1)).$$

3) Нетрудно проверить, что условие (13) выполняется и для итерированного варианта метода М.М. Лаврентьева $u_r=u_{N,r}$, $u_{0,r}=u_0$, $r^{-1}u_{n,r}+Au_{n,r}=r^{-1}u_{n-1,r}+f$, $n=1,\dots,N$, соответствующего семейству порождающих функций $g_r(\lambda)=[1-(1+r\lambda)^{-N}]\lambda^{-1}$. В данном случае квалификация $p_0=N$ ([2], с. 22). Условие (13) выполняется также для метода установления ([2], с. 24), в котором приближение u_r строится в виде $u_r=u(r)$, где $u=u(t)$ — решение задачи Коши $u'(t)+Au(t)=f$, $u(0)=u_0$. Здесь квалификация $p_0=\infty$, порождающее семейство функций $\{g_r(\lambda)\}$ имеет вид

$$g_r(\lambda)=\begin{cases}(1-e^{-r\lambda})\lambda^{-1}, & \lambda\ne0;\\ r, & \lambda=0.\end{cases}$$

Таким образом, для рассмотренных в примере 1 методов включение (14) необходимо для выполнения оценок (12). Отметим близость (14) и условия (8), достаточного для справедливости этих оценок.

Обратимся теперь к анализу сходимости итерационных процедур вида (5), соответствующих системе порождающих функций

$$g_r(\lambda)=\frac{1}{\lambda}[1-(1-\lambda g(\lambda))^r],\quad r=n\in\mathbb{N}.\tag{17}$$

Оценки скорости сходимости этих процедур устанавливает известное

Предложение 2 ([2], с. 37). *Пусть выполняется условие* (8). *Тогда для любого* $q\ge0$ *верна оценка*

$$\|A^q(u_n-u_*)\|\le Cn^{-(p+q)},\quad n=1,2,\dots;\quad u_*=u_*(u_0),\tag{18}$$

где $C=C(M,p,q,\|v\|)$.

Аналогично п. 1 справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция $g(\lambda)$ с некоторым $m \in (0, M]$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\tau-1}|1-\lambda g(\lambda)|^{2n} \geq \frac{C}{\lambda^{2\tau}} \quad \forall \lambda \in (0, m], \quad \forall \tau > 0, \tag{19}$$

где $C = C(\tau)$; для фиксированных A, f, u_0 и некоторых $p > 0$, $q \geq 0$ выполняется оценка (18) *с константой C, не зависящей от n. Тогда справедливо включение* (14).

Доказательство. Согласно ([2], с. 37) имеет место аналогичное (2) представление

$$u_n = (I - Ag_n(A))u_0 + g_n(A)f,$$

где функции $g_n(\lambda)$ определены в (17). Из (18) с учетом (9) следует

$$\|A^q(u_n - u_*)\|^2 = \|A^q(I - Ag_n(A))(u_0 - u_*)\|^2 =$$
$$= \int_{[0,M]} \lambda^{2q}|1-\lambda g_n(\lambda)|^2 d\|P(\lambda)(u_* - u_0)\|^2 \leq \frac{C}{n^{2(p+q)}}. \tag{20}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 1 с заменой интегрирования по $r \in [r_0, +\infty)$ суммированием по $n \in \mathbb{N}$. Из (20) получаем оценку

$$\int_{(0,m]} n^{2(p+q)-1-\theta} \lambda^{2q}|1-\lambda g_n(\lambda)|^2 d\|P(\lambda)(u_0 - u_*)\|^2 \leq \frac{C}{n^{1+\theta}} \quad \forall \theta \in (0, 2p).$$

Суммируя последние неравенства, заключаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,m]} n^{2(p+q)-1-\theta} \lambda^{2q}|1-\lambda g_n(\lambda)|^2 d\|P(\lambda)(u_0 - u_*)\|^2 < \infty.$$

Используя теорему Б. Леви ([5], с. 305) и полагая в (19) $\tau = p + q - \frac{\theta}{2}$, аналогично доказательству теоремы 1 находим

$$\int_{[0,M]} \lambda^{-(2p-\theta)} d\|P(\lambda)(u_0 - u_*)\|^2 =$$
$$= \int_{[0,m]} \lambda^{-(2p-\theta)} d\|P(\lambda)(u_0 - u_*)\|^2 + \int_{(m,M]} \lambda^{-(2p-\theta)} d\|P(\lambda)(u_0 - u_*)\|^2 < \infty.$$

Полученное неравенство, как и выше, приводит к требуемому включению $u_* - u_0 \in R(A^s)$ $\forall s \in (0, p)$. $\square$

Как показывают примеры из [6], включение $s \in (0, p)$ в теоремах 1, 2 не может быть в общем случае заменено равенством $s = p$. В то же время в случае $p = p_0$ такая замена возможна (см. [7], с. 83).

Перейдем к анализу некоторых известных итерационных процедур.

Пример 2. 1) Функции $g(\lambda) \equiv \mu \in (0, \frac{2}{M})$ и $g(\lambda) = \frac{1}{\alpha+\lambda}$, $\alpha > 0$, порождают соответственно явную и неявную итерационные схемы

$$u_n = u_{n-1} - \mu(Au_{n-1} - f), \quad \alpha u_n + Au_n = \alpha u_{n-1} + f; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для явной схемы выражение в левой части (19) принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|1-\lambda\mu|^{2n}}{n^{-2\tau+1}}$. Используя оценку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^t} \asymp \frac{\Gamma(1-t)}{(1-x)^{1-t}}$ $(t < 1)$ ([8], с. 233), справедливую при $x \to 1$, и принимая $x = |1-\lambda\mu|^2$, $t = -2\tau+1$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1-\lambda\mu|^{2n}}{n^{-2\tau+1}} \geq C\frac{\Gamma(2\tau)}{\lambda^{2\tau}(\mu(2-\lambda\mu))^{2\tau}} \geq \frac{C(\tau)}{\lambda^{2\tau}} \quad \forall \lambda \in (0, m]$$

с достаточно малым $m > 0$. Здесь Γ обозначает Γ-функцию Эйлера. Таким образом, условие (19) в данном случае выполняется. Аналогично устанавливается, что оно выполнено и для неявной схемы.

2) Среди итерационных методов (5) с линейными функциями $g(\lambda)$ в ([2], с. 41) выделен метод с порождающей функцией $g(\lambda) = \frac{3}{M} - \frac{9}{4M^2}\lambda$, $\lambda \in [0, M]$, обладающий оптимальными в некотором смысле свойствами. В этом случае условие (19) также выполнено.

Значит, для итерационных процедур из примера 2 включение (14) необходимо для выполнения оценок (18).

Замечание 2. Если уравнение (1) рассматривается в паре пространств (H, F), где $f \in F$, а $A \in L(H, F)$ — произвольный оператор, то с использованием симметризации Гаусса переходим к уравнению $A^*Au = A^*f$ с неотрицательным самосопряженным оператором $A^*A \in L(H, H)$. Множество V_* решений последнего совпадает с множеством решений уравнения $Au = Pf$, где P — ортопроектор на замыкание образа $\overline{R(A)} \subset F$. При этом в случае $U_* \neq \emptyset$ имеем $V_* = U_*$, и к симметризованному уравнению применимы все полученные выше результаты.

Замечание 3. Утверждение теоремы 1 останется в силе, если считать, что оценка (12) по аналогии с (18) выполняется не для всех $r \in [r_0, \infty)$, а лишь для дискретного множества значений параметра регуляризации $r \in [r_0, \infty) \cap \mathbb{N}$. При этом условие (13) следует заменить требованием

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\tau-1}|1 - \lambda g_n(\lambda)|^2 \geq \frac{C(\tau)}{\lambda^{2\tau}} \quad \forall \lambda \in (0, m].$$

В случае порождающего семейства (17) последнее условие принимает вид (19).

3. Случай погрешностей в исходных данных

Обратимся теперь к случаю, когда вместо точной правой части f в (1) доступна лишь некоторая ее аппроксимация $f_\delta \in H$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, где δ — известный уровень погрешности, $\delta > 0$. Согласно ([2], с. 49) приближенное решение уравнения (1), отвечающее неточной правой части f_δ, может быть взято в виде $u_{r(\delta)}$ и $u_{n(\delta)}$ соответственно, где u_r и u_n определены в (2), (5).

Известно ([2], с. 49), что если параметр регуляризации согласован с погрешностью δ так, что $r(\delta) \to \infty$, $\delta r(\delta) \to 0$ ($n(\delta) \to \infty$, $\delta n(\delta) \to 0$) при $\delta \to 0$, то имеет место сходимость $\lim\limits_{\delta \to 0} \|u_{r(\delta)} - u_*\| = 0$ ($\lim\limits_{\delta \to 0} \|u_{n(\delta)} - u_*\| = 0$). Рассмотрим в качестве примера следующий априорный способ согласования параметра регуляризации с погрешностью:

$$r(\delta) = r_1 \delta^{-a}, \quad \delta \in (0, \delta_0], \tag{21}$$

где $r_1 > 0$, $0 < a < 1$. При выполнении условия истокопредставимости (8) имеет место аналогичная предложениям 1, 2 оценка скорости сходимости приближений $u_{r(\delta)}$, $u_{n(\delta)}$ к решению u_*.

Предложение 3. *Пусть выполняются соотношения* (3), (4), (8), *где* $q \geq 0$, $p + q \leq p_0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|A^q(u_{r(\delta)} - u_*)\| \leq C\delta^s, \quad u_* = u_*(u_0), \tag{22}$$

где $C = C(M, p, q, \|v\|)$,

$$s = \min\{a(p+q),\, -ad(q) + 1\}. \tag{23}$$

Доказательство проводится по схеме из ([2], с. 49). Согласно (2)

$$u_{r(\delta)} - u_* = (I - Ag_{r(\delta)}(A))(u_0 - u_*) + g_{r(\delta)}(A)(f_\delta - f). \tag{24}$$

Из (24) следует неравенство

$$\|A^q(u_{r(\delta)} - u_*)\| \le \|A^q(I - Ag_{r(\delta)}(A))(u_0 - u_*)\| + \|A^q g_{r(\delta)}(A)(f_\delta - f)\|. \tag{25}$$

В случае начальной погрешности (8) на основании (3) имеем

$$\|A^q(I - Ag_{r(\delta)}(A))(u_0 - u_*)\| = \|A^{p+q}(I - Ag_{r(\delta)}(A))v\| \le Cr^{-(p+q)}(\delta). \tag{26}$$

Из (4) следует

$$\|A^q g_{r(\delta)}(A)\| \le Cr^{d(q)}(\delta).$$

Объединяя оценки (25), (26) и последнее неравенство, с учетом (21) получаем

$$\|A^q(u_{r(\delta)} - u_*)\| \le C(\delta^{a(p+q)} + \delta^{-ad(q)+1}) \le C\delta^s,$$

где величина s определена в (23). □

Замечание 4. Предложение 3 остается верным, если условие (4) заменить неравенством

$$\sup_{\lambda\in[0,M]} |g_r(\lambda)| \le Cr. \tag{27}$$

Из соотношений (3), (11) и (27) следует, что в этом случае в (4) можно положить $d(q) = \max\{0, 1-q\}$.

Следующая теорема указывает на возможность восстановления порядка истокопредставимости начальной невязки $u_* - u_0$ по наблюдаемой скорости сходимости приближений $u_{r(\delta)}$, $\delta \to 0$.

Теорема 3. *Пусть выполняются* (4), (13), *и для фиксированных* A, f, u_0 *и некоторых* $q \ge 0$, $s > 0$ *выполняется оценка* (22) *с константой* C, *не зависящей от* δ. *Тогда имеет место включение*

$$u_* - u_0 \in R(A^t) \quad \forall t \in (0, b), \tag{28}$$

где

$$b = \min\left\{\frac{s}{a}, \frac{1}{a} - d(q)\right\}, \tag{29}$$

величина $d(q)$ *определена в* (4).

Доказательство. Заметим, что в силу ограничений на a, $d(q)$ величина $b > 0$. Из (2), (22) получаем оценку

$$\|A^q(I - Ag_{r(\delta)}(A))(u_0 - u_*)\| \le \|A^q(u_{r(\delta)} - u_*)\| + \|A^q g_{r(\delta)}(A)(f_\delta - f)\| \le C\delta^s + \|A^q g_{r(\delta)}(A)\|\delta.$$

Здесь выражение $\|A^q g_{r(\delta)}(A)\|$ оценивается аналогично доказательству предложения 3. С использованием вытекающего из (21) представления $\delta = \left(\frac{r(\delta)}{r_1}\right)^{-1/a}$ находим

$$\|A^q(I - Ag_{r(\delta)}(A))(u_0 - u_*)\| \le C(\delta^s + r^{d(q)}\delta) \le C(r^{-s/a}(\delta) + r^{-(1/a - d(q))}(\delta)) \le Cr^{-b}(\delta). \tag{30}$$

Поскольку при $\delta \in (0, \delta_0]$ величины $r(\delta) = r_1\delta^{-a}$ принимают все значения из интервала $[r_0, +\infty)$, $r_0 = r_1\delta_0^{-a}$, оценка (30), как и при доказательстве теоремы 1, влечет включение $u_* - u_0 \in R(A^t)$ $\forall t \in (0, b)$. □

Для итерационных методов (5) будем выбирать критерий останова в виде $n(\delta) = [r_2\delta^{-a}]$; $\delta \in (0, \delta_0]$, $r_2 > 0$, $0 < a < 1$, где $[x]$ обозначает целую часть x. Непосредственным следствием предложения 3 является

Предложение 4. *Пусть имеют место соотношения* (3), (4), (8). *Тогда для любого* $q \geq 0$ *верна оценка*

$$\|A^q(u_{n(\delta)} - u_*)\| \leq C\delta^s, \quad u_* = u_*(u_0), \tag{31}$$

где $C = C(M, p, q, \|v\|)$, *величина* s *определена в* (23).

Для метода (5) при наличии погрешности также справедлива обратная теорема о порядке истокопредставимости начальной невязки $u_* - u_0$ при заданной скорости сходимости $u_{n(\delta)}$ к u_*.

Теорема 4. *Пусть выполняются* (4), (19), *и для фиксированных* A, f, u_0 *и некоторых* $q \geq 0$, $s > 0$ *выполняется оценка* (31) *с константой* C, *не зависящей от* δ. *Тогда имеет место включение* (28), *где величина* b *определена в* (29).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, из (5), (31) получаем

$$\|A^q(I - Ag_{n(\delta)}(A))(u_0 - u_*)\| \leq C\delta^s + \|A^q g_{n(\delta)}(A)\|\delta.$$

Отсюда и из (4) следует

$$\|A^q(I - Ag_{n(\delta)}(A))(u_0 - u_*)\| \leq Cn^{-b}(\delta).$$

Поскольку при $\delta \in (0, \delta_0]$ величины $n(\delta) = [r_2\delta^{-a}]$ принимают все целые значения, начиная с $n_0 = [r_2\delta_0^{-a}]$, требуемое утверждение является непосредственным следствием теоремы 2. $\square$

4. Заключительные замечания

Неулучшаемость оценок скорости сходимости широкого класса методов регуляризации равномерно относительно вариации начальных данных A, f и начального приближения u_0 в рамках условия истокопредставимости (8) установлена различными методами в ([1], с. 35; [2], с. 50; [9]). В отличие от этих результатов теоремы 1, 2 относятся к индивидуальной задаче (1) с фиксированным начальным приближением. Они показывают, что гарантированный порядок скорости сходимости рассматриваемых методов целиком определяется априорной информацией о порядке истокопредставимости неизвестного решения. Использованная выше техника получения обратных теорем развивает методику работы [6], где утверждения теорем 1, 2 были доказаны применительно к порождающим функциям $g_r(\lambda)$ частного вида при $q = 0$. Для случая $q = 0$ утверждения этих теорем другими методами получены также в [7], при этом условия (13), (19) заменяются требованием (27). Подчеркнем, что практическое использование теорем 1, 2 при $q = 0$ затруднительно ввиду того, что левые части оценок (12), (18) содержат неизвестное решение u_*. В случае же $q > 0$ указанная трудность может быть снята. В частности, полагая $q = 1$, будем иметь в левых частях упомянутых неравенств невязки $\|Au_r - f\|$, доступные в процессе численной реализации рассматриваемых методов. Результаты работы указывают способ численного определения параметров гладкости неизвестного решения параллельно с его приближенным нахождением в рамках схемы (2).

Авторы признательны проф. А.Б. Бакушинскому за полезные обсуждения результатов настоящей работы.

Литература

1. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 128 с.
2. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 181 с.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.
4. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – 2-е изд. – М.: Мир, 1979. – 587 с.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – 5-е изд. – М.: Наука, 1981.– 543 с.
6. Кокурин М.Ю. *О необходимых условиях сходимости с заданной скоростью методов решения линейных некорректных задач* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. – Сер. 1. – 1997. – № 2. – С. 22–27.
7. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of inverse problems.* – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 320 p.
8. Титчмарш Е. *Теория функций.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1980. – 463 с.
9. Немировский А.С., Поляк Б.Т. *Итеративные методы решения линейных некорректных задач при точной информации.* II // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. – 1984. – № 3. – С. 18–25.

Марийский государственный университет

Поступила
01.07.1999