И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

УДК 517.977

М.А. ВОРОНЕЦКАЯ, А.Г. ИВАНОВ

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА БОЛЬЦА

Показано, что почти периодическое (п. п.) по Степанову уравнение Эйлера–Лагранжа имеет п. п. по Бору решение $\widehat{x}(\cdot)$ в том и только том случае, если первая вариация функционала $x(\cdot) \mapsto M\{L(t, x(t), \dot{x}(t))\}$, определенного на множестве $\mathfrak{B}$ п. п. по Бору функций, производная которых п. п. по Степанову в точке $\widehat{x}(\cdot)$ равна нулю. Во втором пункте работы приведены необходимые условия решения в слабом смысле для вариационной задачи, определенной на $\mathfrak{B}$ при наличии ограничений. Основные утверждения приведены в пп. 3–5 и посвящены необходимым условиям сильного и слабого решения п. п. задачи Больца. В первом пункте приведены необходимые утверждения о п. п. по Степанову функциях, используемые в дальнейшем.

1. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с нормой $|x| = \sqrt{x^*x}$, $x \in \mathbb{R}^n$ ($*$ — операция транспонирования), $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — пространство линейных операторов $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) \doteq \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$) с нормой $|L| \doteq \max\limits_{|x|\leqslant 1} |Lx|$. Обозначим, далее, через $B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ совокупность непрерывных отображений $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{Y} \subset \mathbb{R}^n$), которые п. п. по Бору, и через $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ — совокупность отображений $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, которые п. п. по Степанову относительно метрики $d(f, g) \doteq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |f(s) - g(s)|ds$, $f, g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ [1], и пусть

$$S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \doteq \{f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \|f\|_\infty \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < \infty\}. \tag{1.1}$$

Напомним [1], что для каждой п. п. функции $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ существует среднее значение $M\{f(t)\} \doteq \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)dt \in \mathbb{R}^n$, имеет место однозначное соответствие $f(t) \sim \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda)e^{i\lambda t}$ ($i^2 = -1$), в котором $c(\lambda) = c(\lambda; f) \doteq M\{f(t)e^{-i\lambda t}\}$ и считается $c(\lambda) = 0$, если λ не принадлежит (не более чем счетному) множеству $\Lambda(f) \doteq \{\lambda \in \mathbb{R} : |c(\lambda)| > 0\}$ показателей Фурье этого отображения. Зафиксировав в $\Lambda(f)$ рациональный базис $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots\}$, п. п. функции f можно поставить в соответствие аппроксимирующую ее последовательность $\{p_m(\cdot)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ тригонометрических полиномов Бохнера–Фейера [1], [2]:

$$p_m(t) = p_m(t; f) \doteq \sum_{\substack{|k_1|\leqslant (m!)^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ |k_m|\leqslant (m!)^2}} \mathfrak{k}_{m;k_1,k_2,\dots,k_m} c\Big(\frac{k_1}{m!}\mathfrak{b}_1 + \dots + \frac{k_m}{m!}\mathfrak{b}_m\Big) e^{i(\frac{k_1}{m!}\mathfrak{b}_1 + \dots + \frac{k_m}{m!}\mathfrak{b}_m)t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{k}_{m;k_1,k_2,\dots,k_m} \doteq (1 - \frac{|k_1|}{(m!)^2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{|k_m|}{(m!)^2})$, а $c(\frac{k_1}{m!}\mathfrak{b}_1 + \dots + \frac{k_m}{m!}\mathfrak{b}_m)$ — коэффициент Фурье функции f, отвечающий показателю $\frac{k_1}{m!}\mathfrak{b}_1 + \dots + \frac{k_m}{m!}\mathfrak{b}_m$.

Теорема 1.1. *Если ряд Фурье $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda, f)e^{i\lambda t}$, отвечающий функции $f \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, совпадает с формально продифференцированным рядом Фурье $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda, g)e^{i\lambda t}$ для функции g из $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, то g принадлежит $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, при почти всех (п. в.) $t \in \mathbb{R}$ дифференцируема и $g'(t) = f(t)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Конкурсного центра Министерства образования и науки Российской Федерации, грант № Е00-1.0-5.

Доказательство. По условию $c(\lambda, f) = i\lambda c(\lambda, g)$. Поэтому $M\{f(t)\} = 0$, и, если $p_m(t; f)$ и $p_m(t; g)$ суть многочлены Бохнера–Фейера, аппроксимирующие п. п. по Степанову функции f и g соответственно, то (см. приведенный выше вид таких полиномов) при всех $m \in \mathbb{N}$ и каждом $t \in \mathbb{R}$ $p_m(t; f) = \dot{p}_m(t; g)$, а значит ([1], с. 245) $\lim\limits_{m\to\infty} d(\dot{p}_m(\cdot; g), f(\cdot)) = 0$. Следовательно, для каждого $t \in \mathbb{R}$ найдется такое $m_t \in \mathbb{N}$, что $d(\dot{p}_{m_t}(\cdot; g), f(\cdot)) \leqslant \varkappa^{-1}(t)$, где $\varkappa(t) = \chi_{[-1,1]}(t) + 2|t|\chi_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}(t)$ (χ_F — характеристическая функция множества $F \subset \mathbb{R}$). Далее, т. к. при каждом $m \in \mathbb{Z}$ и всех $t \in \mathbb{R}$ $p_m(t; g) = \underset{s}{\mathrm{M}}\{g(s+t)K_{m;\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_m}(s)\}$, где $K_{m;\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_m}(\cdot)$ — составное ядро Бохнера–Фейера [1], то, принимая во внимание равенство $M\{K_{m;\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_m}(t)\} = 1$, $m \in \mathbb{Z}$, получаем, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |p_m(t; g)| \leqslant \|g\|_\infty$, $m \in \mathbb{Z}$. Поэтому в силу топологической эквивалентности d_l-расстояний имеем следующие соотношения:

$$\left| \int_0^t f(s)ds \right| \leqslant \int_0^t |f(s) - \dot{p}_{m_t}(s; g)|ds + |p_{m_t}(0; g)| + |p_{m_t}(t; g)| \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa(t) d(\dot{p}_{m_t}(\cdot; g), f(\cdot)) + 2\|g\|_\infty \leqslant 1 + 2\|g\|_\infty.$$

Из них вытекает, что отображение $t \mapsto \mathcal{F}(t) \doteq \int\limits_0^t f(s)ds$ ограничено на $\mathbb{R}$, а т. к. $\|f\|_\infty < \infty$, то и равномерно непрерывно на $\mathbb{R}$. Следовательно ([1], с. 206), $\mathcal{F} \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Отсюда (напомним, что $M\{f(t)\} = 0$), в свою очередь, по теореме о ряде Фурье для интеграла от п. п. по Степанову функции [1] и условий теоремы 1.1 имеем следующее соответствие:

$$\mathcal{F}(t) \sim M\{\mathcal{F}(t)\} + \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \lambda\neq 0}} \frac{c(\lambda, f)}{i\lambda} e^{i\lambda t} = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda, g) e^{i\lambda t} - C,$$

где вектор $C \doteq M\{g(t)\} - M\{\mathcal{F}(t)\}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda, g)e^{i\lambda t} - C$ является рядом Фурье для п. п. по Степанову функции $t \mapsto g(t) - C$, то в силу теоремы единственности о разложении в ряд Фурье п. п. функции получаем равенство $g(t) = \int\limits_0^t f(s)ds + C$, $t \in \mathbb{R}$, из которого вытекают все утверждения теоремы 1.1. □

Пусть, далее, $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство. Через $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ обозначим совокупность непрерывных отображений

$$(t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathfrak{Y}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \tag{1.2}$$

которые п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ [3] и каждую функцию из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ представляем в виде отображения (1.2). Через $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ обозначим подмножество из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ таких функций вида (1.2), что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max\limits_{x\in\mathfrak{X}} |f(s+\tau, x) - f(s, x)|ds < \varepsilon\}$ относительно плотно.

Если $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^n))$, то по следствию 1.3 из ([4], с. 24) при $\mathfrak{Y} = C(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^n)$ получим, что такой функции отвечает п. п. последовательность[1] $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $L_1([0, a], C(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^n))$, состоящую из отображений

$$(t, x) \mapsto \mathfrak{f}_m(t, x) \doteq f(t + ma, x), \quad (t, x) \in [0, a] \times \mathfrak{X}. \tag{1.3}$$

Лемма 1.1. *Пусть $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^n))$, $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — отвечающая ей п. п. последовательность отображений, заданных при каждом $m \in \mathbb{Z}$ равенством* (1.3). *Пусть задана также последовательность $\{q_l'\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, $\lim\limits_{l\to\infty} q_l' = \infty$. Тогда найдутся подпоследовательность $\{q_l\}_{l=1}^\infty \subset \{q_l'\}_{l=1}^\infty$*

[1] Определение п. п. последовательности $\{\mathfrak{x}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ метрического (нормированного) пространства аналогично определению числовой п. п. последовательности (см., напр., [5], [6])

и измеримое множество $\Xi \subset [0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi = a$, *такие, что в каждой точке* $\vartheta \in \Xi$ *и любой заданной п. п. последовательности* $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{X}$ *существует* $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum\limits_{m=0}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta, x_m)$.

Доказательство. Зафиксируем последовательность $\{\eta'_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$, $\lim\limits_{j\to\infty} \eta'_j = \infty$. По теореме 1.5 ([4], с. 30) при $\mathfrak{Y} = C(\mathfrak{X},\mathbb{R}^n)$ найдутся такие подпоследовательности $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{q'_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{\eta'_j\}_{j=1}^{\infty}$ и измеримое множество $\Xi \subset [0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi = a$, что в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ будет выполняться равенство (см. (1.3))

$$\lim_{j\to\infty}\left(\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_j}\int_0^{\eta_j} \max_{x\in\mathfrak{X}} |\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x) - \mathfrak{f}_m(\vartheta,x)|dt\right) = 0.$$

Далее, т. к. отвечающее при каждом $h > 0$ функции f стекловское усреднение (см. [4], с. 21) принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R}^n)$, то отвечающая ему последовательность отображений $(\vartheta,x) \mapsto \mathfrak{f}_m(\vartheta,x;h) \doteq \frac{1}{h}\int\limits_0^h \mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x_m)dt$, $(\vartheta,x) \in [0,a]\times\mathfrak{X}$, $m \in \mathbb{Z}$, принадлежит $C([0,a]\times\mathfrak{X},\mathbb{R}^n)$ и является п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ (см. [4], с. 79). Следовательно, по лемме 4.2 ([4], с. 79) в каждой точке $\vartheta \in [0,a]$ при любой заданной п. п. последовательности $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{X}$ будет существовать $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a}\sum\limits_{m=0}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m;h) \doteq \mathfrak{p}(\vartheta,h) \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ последовательность $\{\mathfrak{x}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^n$, где $\mathfrak{x}_m \doteq \frac{1}{q_l a}\sum\limits_{m=1}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m)$, будет фундаментальной. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и $l_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $l \geqslant l_1$ будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{q_l a}\sum_{m=1}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}}\int_0^{\eta_{j_\varepsilon}} \max_{x\in\mathfrak{X}} |\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x) - \mathfrak{f}_m(\vartheta,x)|dt < \varepsilon/3.$$

Далее, из существования предела $\mathfrak{p}(\vartheta,h)$ при $h = \eta_{j_\varepsilon}$ вытекает, что найдется такое $l_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $l \geqslant l_2$ и каждом $p \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{1}{q_{l+p}a}\sum_{m=0}^{q_{l+p}-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m;\eta_{j_\varepsilon}) - \frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m;\eta_{j_\varepsilon})\right| < \varepsilon/3.$$

Теперь, поскольку при $l \geqslant \widehat{l} \doteq \max(l_1,l_2)$ и каждом $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{x}_{l+p} - \mathfrak{x}_l| \leqslant \frac{1}{q_{l+p}a}\sum_{m=0}^{q_{l+p}-1}\frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}}\int_0^{\eta_{j_\varepsilon}} |\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x_m) - \mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m)|dt + \\
+\left|\frac{1}{q_{l+p}a}\sum_{m=0}^{q_{l+p}-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m;\eta_{j_\varepsilon}) - \frac{1}{q_l a}\sum_{m=1}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m;\eta_{j_\varepsilon})\right| + \\
+\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}}\int_0^{\eta_{j_\varepsilon}} |\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x_m) - \mathfrak{f}_m(\vartheta,x_m)|dt \overset{(1.6)}{<} \\
< \varepsilon/3 + \frac{1}{q_{l+p}a}\sum_{m=0}^{q_{l+p}-1}\frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}}\int_0^{\eta_{j_\varepsilon}} \max_{x\in\mathfrak{X}} |\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x) - \mathfrak{f}_m(\vartheta,x)|dt + \\
+\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_{j_\varepsilon}}\int_0^{\eta_{j_\varepsilon}} \max_{x\in\mathfrak{X}} |\mathfrak{f}_m(t+\vartheta,x) - \mathfrak{f}_m(\vartheta,x)|dt \overset{(1.5)}{<} \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,
\end{aligned}$$

то последовательность $\{\mathfrak{x}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является фундаментальной, а значит, нужный предел существует. □

Лемма 1.2 ([4]). *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, *где* $\mathfrak{U} \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда для всякой функции* $u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ *отображение* $t \mapsto f(t,u(t))$, $t \in \mathbb{R}$, *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1.3 ([4]). *Пусть* $K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ *и* $f \in S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$. *Тогда для всякой функции* $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ *отображение* $t \mapsto f(t, x, u(t))$ *принадлежит* $S(\mathbb{R}, C(K, \mathbb{R}^n))$.

Используя теорему 1.2 из [4] о свойствах стекловских усреднений несложно доказать (здесь см. лемму 1.2) следующее утверждение.

Лемма 1.4. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$. *Тогда отображение* $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}, \mathfrak{U}) \to S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *определенное равенством* $\mathcal{F}[u(\cdot)](t) \doteq f(t, u(t))$, $t \in \mathbb{R}$, *равномерно непрерывно.*

2. Фиксируем отображение $(t, x, u) \mapsto L(t, x, u) \in \mathbb{R}$, $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{V}$ — область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям

1) в каждой точке $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$ существуют производные $L'_x(t, x, u)$ и $L'_u(t, x, u)$,
2) для любых фиксированных $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$, $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ отображение L принадлежит $S(\mathbb{R}, C(V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, а $L'_x, L'_u \in S(\mathbb{R}, C(V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^{n*}))$.

Выделим, далее, в $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ линейное многообразие

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \doteq \{x(\cdot) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \dot{x}(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)\}, \tag{2.1}$$

в котором (см. (1.1)) каждое из отображений

$$x(\cdot) \mapsto \|x\|_{\mathfrak{B}} \doteq \|x\|_C + \|\dot{x}\|_S, \quad x(\cdot) \mapsto |||x|||_{\mathfrak{B}} \doteq \|x\|_C + \|\dot{x}\|_\infty, \;\; x(\cdot) \in \mathfrak{B}, \tag{2.2}$$

является нормой. Отметим также, что $\mathfrak{B}$ содержит линейное многообразие

$$B^1 = B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \doteq \{x(\cdot) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \dot{x}(\cdot) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)\}, \tag{2.3}$$

где отображение

$$x(\cdot) \mapsto \|x\|_{B^1} \doteq \|x\|_C + \|\dot{x}\|_{\mathrm{C}}, \quad x(\cdot) \in B^1, \tag{2.4}$$

задает норму. При этом, т. к. для всех $x \in B^1$ (см. (2.3)) $\|x\|_{B^1} = |||x|||_{\mathfrak{B}}$, то $(B^1, \|\cdot\|_{B^1})$ — подпространство нормированного пространства $(\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}})$.

В дальнейшем для заданной функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ через $\overline{\mathrm{orb}}(\varphi)$ обозначаем замыкание (в $\mathbb{R}^n$) множества $\mathrm{orb}(\varphi) \doteq \{\varphi(t), t \in \mathbb{R}\}$ и

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathcal{V}) \doteq \{x(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \overline{\mathrm{orb}}(x) \subset \mathcal{V}\}, \quad \mathcal{B}^1 \doteq \{x(\cdot) \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \overline{\mathrm{orb}}(x) \subset \mathcal{V}\}. \tag{2.5}$$

Метрику на $\mathcal{B}$, индуцированную нормами (см. (2.2)) $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ и $|||\cdot|||_{\mathfrak{B}}$, обозначим через $\rho_{C,S}$ и $\rho_{C,\infty}$ соответственно, а метрику на $\mathcal{B}^1$, индуцированную нормой $\|\cdot\|_{B^1}$ (см. (2.4)) — через ρ_{B^1}.

Лемма 2.1 ([7]). *Множество* $\mathcal{B}^1$ *всюду плотно в* $(\mathcal{B}, \rho_{C,S})$.

Из лемм 1.2 и 1.3 вытекает

Лемма 2.2. *Пусть отображение* $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* 1), 2). *Тогда для всякой функции* $x(\cdot) \in \mathcal{B}$ ($x(\cdot) \in \mathcal{B}^1$) *отображения* $t \mapsto L(t, x(t), \dot{x}(t))$ *и* $t \mapsto L_x(t, x(t), \dot{x}(t))$, $t \mapsto L_u(t, x(t), \dot{x}(t))$ *принадлежат пространствам* $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *и* $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*})$ *соответственно.*

В свою очередь, из леммы 2.2 вытекает возможность задания на $\mathcal{B}$ (а также на $\mathcal{B}^1$) функционала

$$x(\cdot) \mapsto \mathfrak{T}(x(\cdot)) \doteq M\{L(t, x(t), \dot{x}(t))\}, \tag{2.6}$$

а также отображений $x(\cdot) \mapsto M\{L'_x(t, x(t), \dot{x}(t))\}$ и $x(\cdot) \mapsto M\{L'_u(t, x(t), \dot{x}(t))\}$.

Замечание 2.1. Ряд свойств функционала (2.6), которые могут быть использованы при исследовании задач вариационного исчисления в классе п. п. функций, приведен в [7]. В частности, с использованием лемм 2.1 и 1.4 показано, что если функция $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1), 2), то для функционала $\mathfrak{T} : (\mathcal{B}, \rho_{C,S}) \to \mathbb{R}$, заданного равенством (2.6), имеет место равенство $\inf\limits_{x(\cdot) \in \mathcal{B}} \mathfrak{T}(x(\cdot)) = \inf\limits_{x(\cdot) \in \mathcal{B}^1} \mathfrak{T}(x(\cdot))$. Там же доказана

Лемма 2.3. *Пусть отображение* $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* 1), 2). *Тогда* а) *функционал* (2.6) *непрерывно дифференцируем на множестве* $\mathcal{B} \subset (\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}})$ *и в каждой точке* $x(\cdot) \in \mathcal{B}$ *и всех* $h(\cdot) \in \mathfrak{B}$

$$\mathfrak{T}'(x(\cdot))[h(\cdot)] = M\{L'_x(t, x(t), \dot{x}(t))h(t) + L'_u(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{h}(t)\}, \tag{2.7}$$

б) *в каждой точке* $x(\cdot) \in \mathcal{B} \subset (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ *функционал* (2.6) *имеет первую вариацию по Лагранжу* $\delta\mathfrak{T}(x(\cdot);\cdot)$ *такую, что при каждом* $h(\cdot) \in \mathfrak{B}$

$$\delta\mathfrak{T}(x(\cdot); h(\cdot)) = M\{L'_x(t, x(t), \dot{x}(t))h(t) + L'_u(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{h}(t)\}. \tag{2.8}$$

Докажем, далее, п. п. аналог леммы Дюбуа–Реймона.

Теорема 2.1. *Пусть отображение* $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *и функция* $x(\cdot){\in}(\mathcal{B}, \rho_{C,S})$ $(x(\cdot){\in}(\mathcal{B}, \rho_{C,\infty}))$ *такая, что* $\delta\mathfrak{T}(x(\cdot);\cdot) \equiv 0$ (*соответственно* $\mathfrak{T}'(x(\cdot)) = 0$). *Тогда, если п. п. по Степанову функции*

$$t \mapsto \mathfrak{l}_1(t) \doteq L'_x(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad t \mapsto \mathfrak{l}_2(t) \doteq L'_u(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{2.9}$$

ограничены на $\mathbb{R}$ *в существенном, то* $\mathfrak{l}_2(\cdot) \in \mathfrak{B}$ *и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$-\frac{d}{dt}L'_u(t, x(t), \dot{x}(t)) + L'_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0. \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу (2.8) (соответственно (2.7)) из леммы 2.3 получим, что для всех $h(\cdot) \in \mathfrak{B}$ будет выполнено равенство $M\{\mathfrak{l}_1(t)h(t) + \mathfrak{l}_2(t)\dot{h}(t)\} = 0$. Из него при $h(t) = \mathrm{e}_j \exp(-i\lambda t)$ $(i^2 = -1)$, $j = 1, \ldots, n$, где e_j — j-вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$, получим, что формально продифференцированный ряд Фурье функции $\mathfrak{l}_1$, принадлежащей по условию теоремы 2.1 $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*})$, совпадает с рядом Фурье функции $\mathfrak{l}_2 \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*})$. Теперь утверждение теоремы 2.1 (здесь см. (2.1) и (2.9)) непосредственно следует из теоремы 1.1. □

Замечание 2.2. Если отображение $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию 1), а вместо условия 2) — условию 2′) $L \in B(\mathbb{R}{\times}V{\times}\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ и $L'_x, L'_u \in B(\mathbb{R}{\times}V{\times}\mathfrak{U}, \mathbb{R}^{n*})$ для любых $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, то при каждой функции $x(\cdot) \in \mathcal{B}$ п. п. по Степанову функции $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ ограничены на $\mathbb{R}$ в существенном, а при $x(\cdot) \in \mathcal{B}^1$ эти функции п. п. по Бору, а значит, ограничены на $\mathbb{R}$. Поэтому из теоремы 2.1 для случая, когда $L \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, получаем один из основных результатов работы [8]: если для $x(\cdot) \in (B^1, \|\cdot\|_{B^1})$ и всякой функции $h(\cdot) \in (B^1, \|\cdot\|_{B^1})$ $M\{L'_x(x(t), \dot{x}(t))h(t) + L'_u(x(t), \dot{x}(t))\dot{h}(t)\} = 0$, то отображение $t \mapsto L'_u(x(t), \dot{x}(t))$ принадлежит пространству $B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, и при $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\frac{d}{dt}L'_u(x(t), \dot{x}(t)) = L'_x(x(t), \dot{x}(t))$, который доказан с использованием обобщенных производных. Это утверждение использовано для указания необходимых условий решения в слабом смысле задачи

$$I(x(\cdot)) = M\{L(x(t), \dot{x}(t))\} \to \inf, \quad x(\cdot) \in (B^1, \|\cdot\|_{B^1}). \tag{2.11}$$

Из леммы 2.3 и теоремы 2.1 вытекают [7] необходимые условия для решения $\widehat{x}(\cdot) \in (\mathcal{B}, \rho_{C,S})$ в слабом (а значит, и сильном) смысле более общей задачи (см. (2.6), (2.5))

$$\mathfrak{T}(x(\cdot)) \to \inf, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B}, \tag{2.12}$$

которые в силу неравенства $\|x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant |||x|||_{\mathfrak{B}}$, $x \in \mathfrak{B}$, будут необходимыми условиями для $\widehat{x}(\cdot)$, если $\mathcal{B}$ в (2.12) рассматривать как подпространство нормированного пространства $(\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}})$. Кроме того, как отмечалось, $(B^1, \|\cdot\|_{B^1})$ (см. (2.3), (2.4)) — подпространство нормированного пространства $(\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}})$. Следовательно, задача

$$\mathfrak{T}(x(\cdot)) \to \inf, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B}^1 \subset (B^1, \|\cdot\|_{B^1}), \tag{2.13}$$

является частным случаем задачи $\mathfrak{T}(x(\cdot)) \to \inf$, $x(\cdot) \in \mathcal{B} \subset (\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}})$. Поэтому необходимые условия слабого решения последней задачи, а значит, и слабого решения задачи (2.12), будут необходимыми условиями слабого решения задачи (2.13). При этом по равенству, указанному в замечании 2.1, слабое решение $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}^1$ задачи (2.13) будет слабым решением задачи (2.12).

Следующий пример иллюстрирует целесообразность обобщения задачи (2.11) и (2.13) до задачи (2.12).

Пример 2.1. Пусть $L(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + f(t)x$, где $f(t) \doteq \mathrm{sign}(\sin\omega_1 t) + \mathrm{sign}(\sin\omega_2 t)$ и заданные положительные числа ω_1, ω_2 несоизмеримы. Ясно, что L удовлетворяет условиям вида 1), 2), и уравнение (2.10), отвечающее этой функции Лагранжа, имеет вид $\ddot{x} = f(t)$ и может быть интерпретировано как уравнение движения тела единичной массы вдоль оси Ox с приложенной к нему силой $f(t)$. Семейство п. п. по Бору функций $t \mapsto x(t,C) = \widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t) + C$, $C \in \mathbb{R}$, где $\frac{2\pi}{\omega_j}$-периодические функции $\widehat{x}_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1,2$, определены на $[0, \frac{2\pi}{\omega_j}]$ равенством

$$\widehat{x}_j(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2\omega_j}t, & 0 \leqslant t < \frac{\pi}{\omega_j}; \\ -\frac{t^2}{2} + \frac{3\pi}{2\omega_j}t - \frac{\pi^2}{\omega_j^2}, & \frac{\pi}{\omega_j} \leqslant t < \frac{2\pi}{\omega_j}, \end{cases} \tag{2.14}$$

является решениями этого уравнения. Поскольку в точках $\frac{\pi}{\omega_j} + \frac{2k\pi}{\omega_j}$, $k \in \mathbb{Z}$, функции $\widehat{x}_j$, $j = 1,2$, недифференцируемы, то $x(\cdot,C) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus B^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Теперь рассмотрим задачу

$$J(x(\cdot)) \doteq M\{\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + f(t)x(t)\} \to \inf,\ x(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{2.15}$$

Так как при каждом фиксированном $C \in \mathbb{R}$ и любом $h(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $J(x(\cdot,C) + h(\cdot)) - J(x(\cdot)) \geqslant M\{\dot{x}(t,C)\dot{h}(t) + f(t)h(t)\} = M\{(\ddot{x}(t,C) - f(t))h(t)\} = 0$, то каждая из указанных функций $x(\cdot,C) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ является решением задачи (2.15).

Этот же пример, в частности, указывает, что при использовании необходимых условий для нахождения единственного решения задачи (2.12) требования того, чтобы $x(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ (а в задачах вида (2.11), (2.14) требования $x(\cdot) \in B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$), вообще говоря, недостаточно.

Поэтому сейчас рассмотрим экстремальную задачу на $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ при наличии ограничений на средние в виде равенств и неравенств, необходимые условия решения в которой позволяют выделить единственную допустимую функцию, подозрительную на решение.

Пусть функции $L_j : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, такие, что для любых $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ $L_j \in S(\mathbb{R}, C(V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$. В этом случае по лемме 2.2 на множестве $\mathcal{B}$ (см. (2.5)) корректно определены функционалы

$$x(\cdot) \mapsto \mathfrak{T}_j(x(\cdot)) \doteq M\{L_j(t,x(t),\dot{x}(t))\}, \quad j = 0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}. \tag{2.16}$$

Зададим, далее, множество

$$\mathfrak{D} \doteq \{x(\cdot) \in \mathcal{B} : \mathfrak{T}_j(x(\cdot)) \leqslant 0,\ j = 1,\ldots,\mathfrak{k},\ \mathfrak{T}_j(x(\cdot)) = 0,\ j = \mathfrak{k}+1,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}\}$$

и рассмотрим п. п. задачу с ограничениями на средние в виде равенств и неравенств

$$\mathfrak{T}_0(x(\cdot)) \to \inf, \quad x(\cdot) \in \mathfrak{D}, \tag{2.17}$$

в которой функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathfrak{D}$ называется (локальным) решением в слабом (сильном) смысле, если найдется такое $\gamma > 0$, что $\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}_0(x(\cdot))$ для всякой функции $x(\cdot) \in \mathfrak{D}$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$ (соответственно неравенству $\|\widehat{x} - x\|_C \leqslant \gamma$).

Теорема 2.2. *Пусть отображения* $L_j : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, *удовлетворяют условиям аналогичным условиям* 1), 2) *для функции* L *в теореме* 2.1 *и функция* $\widehat{x}(\cdot) \in \mathfrak{D}$ *является решением в слабом смысле задачи* (2.17). *Тогда найдутся такие числа* $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *не равные нулю одновременно, что выполнены соотношения*

$$\widehat{\lambda}_j \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \widehat{\lambda}_j \mathfrak{T}_j(\widehat{x}(\cdot)) = 0, \quad j = 1,\ldots,\mathfrak{k}. \tag{2.18}$$

Кроме того, если п. п. по Степанову функции $t \mapsto \widehat{L}'_{jx}(t) \doteq \frac{\partial}{\partial x} L'_j(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))$, $t \mapsto \widehat{L}'_{ju}(t) \doteq \frac{\partial}{\partial u} L'_j(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))$ *ограничены на* $\mathbb{R}$ *в существенном, то функция* $t \mapsto \sum_{j=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*})$ *и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$-\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)\Big) + \sum_{j=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{jx}(t) = 0. \tag{2.19}$$

Доказательство. По условию теоремы найдется такое $\gamma > 0$, что $\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}_0(x(\cdot))$ для всякой функции $x(\cdot) \in \mathfrak{D}$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$, а т.к. (см. (2.2)) $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}} \leqslant |||\cdot|||_{\mathfrak{B}}$, то всякая функция $x(\cdot)$, принадлежащая открытому в банаховом пространстве $(\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}})$ множеству $\mathcal{U}_\gamma(\widehat{x}(\cdot)) \doteq \{x(\cdot) \in \mathcal{B} : |||\widehat{x} - x|||_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma\}$, удовлетворяет неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$, то $\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot)) \leqslant \mathfrak{T}_0(x(\cdot))$ для всех $x(\cdot) \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{U}_\gamma(\widehat{x}(\cdot))$. Таким образом, функция $\widehat{x}(\cdot)$ будет решением в слабом смысле задачи (2.17), если в ней множество $\mathcal{B}$ рассматривать как подмножество нормированного пространства $(\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}})$. В силу ограничений, наложенных на функции L_j, по лемме 2.3 каждый из функционалов (2.16) непрерывно дифференцируем по Фреше на $\mathcal{U}_\gamma(\widehat{x}(\cdot)) \subset (\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}})$. Поэтому по теореме ([9], с. 252) найдутся такие числа $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, не равные нулю одновременно, что будут выполняться соотношения (2.18) и равенство $\sum_{j=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_j \mathfrak{T}'_j(\widehat{x}(\cdot)) = 0$, которое (см. (2.7) и (2.16)) равносильно тому, что $M\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)\Big) h(t) + \Big(\sum_{j=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)\Big) \dot{h}(t)\Big\} = 0$ для всех $h(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Отсюда, принимая во внимание условия теоремы 2.2, по теореме 2.1 при $L(t, x, u) \doteq \sum_{j=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_j L_j(t, x, u)$ — лагранжиану задачи (2.17), получаем, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство (2.19). $\square$

Пример 2.2. Пусть $\mathbb{D} \doteq \{x(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : M\{x(t) \sin^2 \omega t\} = 1\}$ $(\omega \neq 0)$. Рассмотрим задачу $J(x(\cdot)) \to \inf$, $x(\cdot) \in \mathbb{D}$, с тем же функционалом (2.15), что и в примере 2.1. Как там показано, семейство функций $t \mapsto x(t, C) = \widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t) + C$, $C \in \mathbb{R}$, где $\frac{2\pi}{\omega_j}$-периодические функции $\widehat{x}_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, определенные на $[0, \frac{2\pi}{\omega_j}]$ равенством (2.14) и принадлежащее $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, является решением уравнения $\ddot{x}(t) = f(t)$, отвечающим функции Лагранжа данной задачи при $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$. Условие $x(\cdot) \in \mathbb{D}$ позволяет из указанного семейства функций выделить единственную допустимую функцию $\widehat{x}(\cdot)$, отвечающую $\widehat{C} = 2(1 - M\{(\widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t)) \sin^2 \omega t\})$, подозрительную на решение. Так же, как и в примере 2.1, показываем, что для каждой функции $h(\cdot) \in \mathbb{D}$ выполнено неравенство $\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot) + h(\cdot)) \geqslant \mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot))$.

В следующих пунктах рассмотрим п.п. задачу Больца.

3. Фиксируем константу $a > 0$, п. п. последовательность $\{\mathrm{t}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ и отображение $(t, x) \mapsto g(t, x) \in \mathbb{R}$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}$, удовлетворяющее условиям

I) в каждой точке $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}$ существует $g'_x(t, x)$,

II) для всякого $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ функции $(t, x) \mapsto g(t, x)$ и $(t, x) \mapsto g'_x(t, x)$ принадлежат пространствам $B(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R})$ и $B(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R}^{n*})$ соответственно.

Лемма 3.1. *Пусть* $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ *и* $\{t_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset V$ *— заданные п. п. последовательности. Тогда для любых функций* $x \in B(\mathbb{R}, V)$ *и* $\mathfrak{g} \in B(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R})$ *последовательности* $\{x(t_m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, $\{\mathfrak{g}(t_m, v_m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ *являются п. п.*

Утверждение леммы 3.1 есть следствие элементарных свойств п. п. последовательностей и п. п. по Бору функций, и мы его опускаем.

Из леммы 3.1, учитывая, что каждая функция $x(\cdot) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ограничена на $\mathbb{R}$, получаем, что на $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, а значит, и на множестве $\mathcal{B}$ (см. (2.5)) корректно определен функционал

$$x(\cdot) \mapsto G(x(\cdot)) \doteq \lim_{q \to \infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} g(\mathrm{t}_m, x(ma)). \tag{3.1}$$

Непосредственно из определений вытекает

Лемма 3.2. *Пусть функция* $g : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* I), II). *Тогда отображение* $G : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, *заданное равенством* (3.1), *непрерывно дифференцируемо по Фреше на* $\mathcal{B} \subset (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ *и в каждой точке* $x(\cdot) \in \mathcal{B}$ *при всех* $h(\cdot) \in \mathfrak{B}$

$$G'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \lim_{q \to \infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} g'_x(\mathrm{t}_m, x(ma))h(ma). \tag{3.2}$$

Определение 3.1. Задача (см. (2.6), (3.1))

$$\mathbb{I}(x(\cdot)) = \mathfrak{T}(x(\cdot)) + G(x(\cdot)) \to \inf, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B} \subset (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}}), \tag{3.3}$$

называется п. п. задачей Больца и функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ называется (локальным) решением в слабом (сильном) смысле, если найдется такое $\gamma > 0$, что $\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot)) \leqslant \mathbb{I}(x(\cdot))$ для всякой функции $x(\cdot) \in \mathcal{B}$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$ (соответственно $\|\widehat{x} - x\|_C \leqslant \gamma$).

В следующей теореме и далее $\widehat{L}'_x(t) \doteq L'_x(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))$, $\widehat{L}'_u(t) \doteq L'_u(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))$.

Теорема 3.1. *Пусть функции* $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $G : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* 1), 2) *и* I), II) *соответственно и функция* $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ *является решением в слабом смысле задачи* (3.3). *Тогда, если функция*

$$t \mapsto \widehat{p}(t) \doteq \int_0^t \widehat{L}'_x(s)ds \in \mathbb{R}^{n*}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

п. п. по Бору, то

а) *отображение* $\widehat{L}'_u(\cdot)$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*})$,

б) $\widehat{x}(t)$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет системе уравнений* (2.10),

в) *имеет место равенство*

$$\lim_{q \to \infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} g'_x(\mathrm{t}_m, \widehat{x}(ma)) = 0. \tag{3.5}$$

Непосредственному доказательству теоремы 3.1 предпошлем ряд утверждений, связанных с вариацией функций из множества $\mathcal{B}$.

Пусть заданы п. п. последовательность $\{v_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^n$ и функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$, а также точки $\theta \in [0, a)$ и $\xi \in [0, a) \setminus \{\theta\}$. Далее

$$v \doteq \sup_{m \in \mathbb{Z}} |v_m|, \quad \mathbb{A}(\theta, \xi) \doteq \{\alpha : 0 < \alpha \leqslant \min\{r/2v,\ |\xi - \theta|,\ a - \max(\xi, \theta)\}\}, \tag{3.6}$$

где $r > 0$ выбрано так, что компактное множество

$$V \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_r[0] \subset \mathcal{V}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим отображение $t \mapsto u_\alpha(t) = u_\alpha(t; \theta, \xi) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, определенное на каждом полуинтервале $[ma, (m+1)a)$, $m \in \mathbb{Z}$, и всяком $\alpha \in \mathbb{A}(\theta, \xi)$ равенством

$$u_\alpha(t) \doteq \begin{cases} \dot{\widehat{x}}(t), & t \in [ma, (m+1)a) \setminus (T_m(\alpha, \theta) \cup T_m(\alpha, \xi)); \\ \dot{\widehat{x}}(t) + v_m, & t \in T_m(\alpha, \theta) \doteq [ma + \theta, ma + \theta + \alpha); \\ \dot{\widehat{x}}(t) - v_m, & t \in T_m(\alpha, \xi) \doteq [ma + \xi, ma + \xi + \alpha). \end{cases} \tag{3.8}$$

Непосредственно из (3.8) вытекает

Лемма 3.3. *Множество* $\{u_\alpha(\cdot),\ \alpha \in \mathbb{A}(\theta,\xi)\}$ *ограничено по норме* $\|\cdot\|_\infty$, *содержится в пространстве* $S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, *равностепенно п. п. и* $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} d(\dot{\widehat{x}}(\cdot),u_\alpha(\cdot)) = 0$.

Далее, при каждом $\alpha \in \mathbb{A}(\theta,\xi)$ введем функцию

$$t \mapsto x_\alpha(t) = x_\alpha(t;\theta,\xi) \doteq \widehat{x}(0) + \int_0^t u_\alpha(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

и будем считать для определенности, что $\xi \in (\theta,a)$. Ясно, что функция $x_\alpha(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна и при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $\dot{x}_\alpha(t) = u_\alpha(t)$. Кроме того, поскольку при всяком $q \in \mathbb{Z}$ $\int\limits_{qa}^{(q+1)a} u_\alpha(t)dt \overset{(3.8)}{=} \int\limits_{qa}^{(q+1)a} \dot{\widehat{x}}(t)dt$, то $x_\alpha(ma) = \widehat{x}(ma)$, $m \in \mathbb{Z}$. Поэтому из (3.8) и (3.9) получаем, что для любого $m \in \mathbb{Z}$ и всякого $\alpha \in \mathbb{A}(\theta,\xi)$

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} \widehat{x}(t), & t \in [ma, ma+\theta); \\ \widehat{x}(t) + (t - ma - \theta)v_m, & t \in T_m(\alpha,\theta); \\ \widehat{x}(t) + \alpha v_m, & t \in [ma+\theta+\alpha, ma+\xi); \\ \widehat{x}(t) + \alpha v_m - (t - ma - \xi), & t \in T_m(\alpha,\xi); \\ \widehat{x}(t), & t \in [ma+\xi+\alpha, (m+1)a). \end{cases} \tag{3.10}$$

Заданную равенством (3.10) (или равносильно (3.9)) функцию $t \mapsto x_\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}$, будем называть п. п. вариацией заданной функции $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$.

Лемма 3.4. *Множество* $\{x_\alpha(\cdot),\ \alpha \in \mathbb{A}(\theta,\xi)\}$ *содержится в* $\mathcal{B}$, *ограничено по норме* $\|\cdot\|_C$ *и*

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \|\widehat{x}(\cdot) - x_\alpha(\cdot)\|_{\mathfrak{B}} = 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Поскольку (см. (3.10)) при $t \in [ma+\xi+\alpha,(m+1)a]$, $m \in \mathbb{Z}$ $|\widehat{x}(t) - x_\alpha(t)| \leqslant 2\alpha v_m \overset{(3.6)}{\leqslant} r$, то $\overline{\mathrm{orb}}(x_\alpha) \subset V \overset{(3.7)}{\subset} \mathcal{V}$ и $\|x_\alpha\|_C \leqslant \|\widehat{x}\|_C + r$. Отсюда, в свою очередь, получаем, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Big|\int\limits_0^t u_\alpha(s)ds\Big| \leqslant 2\|\widehat{x}\|_C + r$, т.е. (см. [1], с. 215) $x_\alpha(\cdot) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ при любом $\alpha \in \mathbb{A}(\theta,\xi)$. Учитывая равенство $\dot{x}_\alpha(t) = u_\alpha(t)$, лемму 3.3 и включение $\overline{\mathrm{orb}}(x_\alpha) \subset \mathcal{V}$, в силу (2.5) получаем $\{x_\alpha(\cdot),\ \alpha \in \mathbb{A}(\theta,\xi)\} \subset \mathcal{B}$. Наконец, поскольку при каждом $\alpha \in \mathbb{A}(\theta,\xi)$ и всяком $m \in \mathbb{Z}$ (см. (3.10)) $|\widehat{x}(t) - x_\alpha(t)| \leqslant \int\limits_{ma}^{(m+1)a} |u_\alpha(s) - \dot{\widehat{x}}(s)|ds \overset{(3.8)}{\leqslant} 2\alpha v$, то $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\|\widehat{x}(\cdot) - x_\alpha(\cdot)\|_C = 0$, и т.к. (см. (3.9)) $\dot{x}_\alpha(t) = u_\alpha(t)$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} d(\dot{\widehat{x}}(\cdot),u_\alpha(\cdot)) = 0$, то (здесь см. (2.2)) равенство (3.11) доказано. $\square$

Лемма 3.5 ([10]). *Пусть* $(\mathfrak{Y},\|\cdot\|)$ — *банахово пространство и* $f \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для каждого измеримого множества* $E \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} E \leqslant \delta$ *выполняется неравенство* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_E \|f(s+t)\|ds \leqslant \varepsilon$.

Полагаем при $\alpha \in \mathbb{A}(\theta,\xi)$

$$I_1(\alpha) \doteq M\Big\{\widehat{L}'_x(t)\frac{\Delta x_\alpha(t)}{\alpha}\Big\}, \quad I_2(\alpha) \doteq M\Big\{\widehat{L}'_u(t)\frac{\Delta \dot{x}_\alpha(t)}{\alpha}\Big\}, \tag{3.12}$$

где

$$\Delta x_\alpha(t) \doteq x_\alpha(t) - \widehat{x}(t), \quad \Delta \dot{x}_\alpha(t) \doteq \dot{x}_\alpha(t) - \dot{\widehat{x}}(t). \tag{3.13}$$

Из (3.10), используя лемму 3.5, получаем

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} I_1(\alpha) = \lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}\int_{ma+\theta}^{ma+\xi}\widehat{L}'_x(t)v_m dt. \tag{3.14}$$

Далее, из теоремы 1.5 ([4], с. 30) вытекает

Лемма 3.6. *Существуют такие последовательности* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, $\lim\limits_{l\to\infty} q_l=\infty$, $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$, $\lim\limits_{j\to\infty}\alpha_j=0$, *и измеримое множество* $\Xi\subset[0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi=a$, *что для каждой точки* $\vartheta\in\Xi$ *выполнено равенство*

$$\lim_{j\to\infty}\left(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\alpha_j}\int_0^{\alpha_j}|\widehat{L}'_u(t+\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\vartheta+ma)|dt\right)=0. \tag{3.15}$$

Лемма 3.7. *Пусть точки* $\vartheta\in\Xi$ *и* $\xi\in\Xi\setminus\{\vartheta\}$, *где* Ξ *— множество, указанное в лемме* 3.6. *Тогда для последовательностей* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$ *и* $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ *из этой же леммы*

$$\lim_{j\to\infty} I_2(\alpha_j)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}(\widehat{L}'_u(\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\xi+ma))v_m. \tag{3.16}$$

Равенство (3.16) есть следствие равенств (3.15), (3.8) и, как уже отмечалось, того, что при п. в. $t\in\mathbb{R}$ $\dot{x}_\alpha(t)=u_\alpha(t)$.

Доказательство теоремы 3.1. Из условий теоремы 3.1 по утверждению б) леммы 2.2 получаем $\delta\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot);h(\cdot))\overset{(3.3)}{=}\delta\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot);h(\cdot))+G'(\widehat{x}(\cdot))[h(\cdot)]=0$ для всех $h(\cdot)\in\mathfrak{B}$ или (см. (3.2), (2.8))

$$M\{\widehat{L}'_u(t)\dot{h}(t)+\widehat{L}'_x(t)h(t)\}+\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}g'_x(\mathrm{t}_m,\widehat{x}(ma))h(ma)=0. \tag{3.17}$$

Далее, для функции $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{B}$ рассмотрим отвечающее ей семейство (см. (3.10)) п. п. вариаций $\{x_\alpha(\cdot;\vartheta,\xi),\ \alpha\in\mathbb{A}(\vartheta,\xi)\}$, где точки ϑ и ξ принадлежат множеству Ξ, указанному в лемме 3.6. Из (3.17) при $h(\cdot)=\Delta x_\alpha(\cdot)$, принимая во внимание равенство $x_\alpha(ma)=\widehat{x}_\alpha(ma)$ и обозначения (3.12) и (3.13), получим $I_1(\alpha)+I_2(\alpha)=0$ при $\alpha\in\mathbb{A}(\vartheta,\xi)$. Отсюда, рассмотрев последовательности $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$ и $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, указанные в лемме 3.6, в силу (3.14) и (3.16) получаем равенство $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum\limits_{m=0}^{q_l-1}(\widehat{p}(\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\vartheta+ma))v_m=\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum\limits_{m=0}^{q_l-1}(\widehat{p}(\xi+ma)-\widehat{L}'_u(\xi+ma))v_m$, справедливое для всех точек $\vartheta,\xi\in\Xi$ ($\vartheta\neq\xi$) и любой фиксированной п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{R}^n$, а это означает, что для всех точек $\vartheta\in\Xi$ и каждой п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{R}^n$ $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum\limits_{m=0}^{q_l-1}(\widehat{p}(\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\vartheta+ma))v_m=0$. Поэтому, если для произвольно фиксированной функции $x(\cdot)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ рассмотреть отвечающую ей п. п. последовательность $\{x(\vartheta+ma)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $\vartheta\in[0,a]$, то из последнего равенства при $v_m=x(\vartheta+ma)$ вытекает равенство $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum\limits_{m=0}^{q_l-1}(\widehat{p}(\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\vartheta+ma))x(\vartheta+ma)=0$. Проинтегрировав его по ϑ от 0 до a, получим $M\{(\widehat{p}(t)-\widehat{L}'_u(t))x(t)\}=0$. Поскольку это равенство выполнено для всех $x(\cdot)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, то (см. доказательство теоремы 2.1) при всех $t\in\mathbb{R}$ $\widehat{p}(t)=\widehat{L}'_u(t)$ и тем самым утверждения а) и б) теоремы 3.1 доказаны. Далее, из (3.17), полагая последовательно $h(t)\equiv\mathrm{e}_j$, $j=1,\ldots,n$, получим $M\{\widehat{L}'_x(t)\}=-\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum\limits_{m=0}^{q-1}g'_x(\mathrm{t}_m,\widehat{x}(ma))$, а т. к. $M\{\widehat{L}'_x(t)\}=M\{\dot{\widehat{p}}(t)\}=0$, то равенство (3.5) доказано. □

Для получения необходимых условий решения в сильном смысле задачи (3.3) понадобятся п. п. иголки Вейерштрасса, которым посвящен следующий пункт.

4. С фиксированной точкой $\vartheta \in [0,a)$ $(a>0)$ свяжем множество $\Lambda \doteq \{\lambda>0 : \vartheta+\varepsilon<a\}$, где $\varepsilon=\varepsilon(\lambda)\doteq\lambda+\sqrt{\lambda}$, и по заданной п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{R}^n$ рассмотрим функцию $x(\cdot,\lambda)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ $(\lambda\in\Lambda)$, определенную на каждом полуинтервале $[ma,(m+1)a)$, $m\in\mathbb{Z}$, равенством[1]

$$x(t,\lambda)\doteq\begin{cases}0, & t\in[ma,(m+1)a)\setminus[ma+\vartheta,ma+\vartheta+\varepsilon);\\ (t-ma-\vartheta)\,v_m, & t\in[ma+\vartheta,ma+\vartheta+\lambda);\\ \lambda v_m-\sqrt{\lambda}(t-ma-\vartheta-\lambda)\,v_m, & t\in[ma+\vartheta+\lambda,ma+\vartheta+\varepsilon),\ m\in\mathbb{Z},\end{cases}\tag{4.1}$$

которая п. в. дифференцируема на $\mathbb{R}$ и при каждом $m\in\mathbb{Z}$

$$\dot{x}(t,\lambda)=\begin{cases}0, & t\in[ma,(m+1)a)\setminus[ma+\vartheta,ma+\vartheta+\varepsilon);\\ v_m, & t\in[ma+\vartheta,ma+\vartheta+\lambda);\\ -\sqrt{\lambda}\,v_m, & t\in[ma+\vartheta+\lambda,ma+\vartheta+\varepsilon).\end{cases}\tag{4.2}$$

Поскольку (см. обозначение в (3.6))

$$\|x(\cdot,\lambda)\|_C\leqslant 2\lambda v,\quad \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_\infty\leqslant(1+\sqrt{\lambda})v\tag{4.3}$$

и при каждом $\mathfrak{n}\in\mathbb{Z}$ выполняются неравенства $\|x(\cdot+\mathfrak{n}a,\lambda)-x(\cdot,\lambda)\|_C\overset{(4.1)}{\leqslant}\lambda\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}}|v_{m+\mathfrak{n}}-v_m|$, $d(\dot{x}(\cdot+\mathfrak{n}a,\lambda),\dot{x}(\cdot,\lambda))\overset{(4.2)}{\leqslant}4a\lambda\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}}|v_{m+\mathfrak{n}}-v_m|$, то множество функций $\{x(\cdot,\lambda),\ \lambda\in\Lambda\}$ — п. п. иголок Вейерштрасса — содержится (см. (2.1)) в $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, является ограниченным по норме $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{\mathfrak{B}}$ и равностепенно п. п.

Далее (см., напр., [9], [11]) $\mathcal{E}(t,x,\cdot,\cdot)$ — функция Вейерштрасса, отвечающая заданному отображению $u\mapsto L(t,x,u)$, $u\in\mathbb{R}^n$, и функционал $x(\cdot)\mapsto\mathfrak{T}(x(\cdot))$ определен в (2.6) .

Лемма 4.1. *Пусть отображение* $L:\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *помимо условий* 1), 2) *удовлетворяет условию*

3) *для любых* $V\in\operatorname{comp}(\mathcal{V})$ *и* $\mathfrak{U}\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\gamma\downarrow0}(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\omega_\gamma[L'_u(t,\cdot,\cdot),V\times\mathfrak{U}])=0,\tag{4.4}$$

где $\omega_\gamma[L'_u(t,\cdot,\cdot),V\times\mathfrak{U}]$ — γ*-колебание на* $V\times\mathfrak{U}$ *непрерывной функции* $(x,u)\mapsto L'_u(t,x,u)$.

Тогда, если функция $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{B}$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$ *удовлетворяет уравнению* (2.10), *то для каждого компакта* $\mathfrak{U}\doteq\overline{\operatorname{orb}}(\dot{\widehat{x}})+O_N[0]$, $N\in\mathbb{N}$, *найдутся такие последовательности* $\{q_l\}_{l=1}^\infty\subset\mathbb{N}$, $\lim\limits_{l\to\infty}q_l=\infty$, $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty\subset(0,a)$, $\lim\limits_{j\to\infty}\eta_j=0$, *и измеримое множество* $\Xi\subset[0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi=a$, *что в каждой точке* $\vartheta\in\Xi$ *и любой фиксированной п. п. последовательности* $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset O_N[0]$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\eta_j}(\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot)+x(\cdot,\eta_j))-\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot)))=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\mathcal{E}(ma+\vartheta,\widehat{x}_{ma}(\vartheta),\dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta),\dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta)+v_m).\tag{4.5}$$

Доказательство. Рассмотрим компактное множество V, определенное в (3.7), и отображение $(t,u)\mapsto\mathcal{L}(t,u)\doteq L(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)+u)$, $(t,u)\in\mathbb{R}\times O_N[0]$. Так как $L\in S(\mathbb{R},C(V\times\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, а $\widehat{x}(\cdot)\in B(\mathbb{R},V)$, то по лемме 1.3 отображение $(t,u)\mapsto L(t,\widehat{x}(t),u)$ принадлежит $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$, а поскольку функция $(t,u)\mapsto\mathfrak{x}(t,u)\doteq\dot{\widehat{x}}(t)+u$ принадлежит $S(\mathbb{R},C(O_N[0],\mathfrak{U}))$, то по следствию 5.1 ([4], с. 80) введенное отображение $(t,u)\mapsto\mathcal{L}(t,u)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},C(O_N[0],\mathbb{R}))$.

[1] Ср. с определением $x(\cdot,\lambda)\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, приведенное, напр., в [9], [11].

Поэтому, принимая во внимание, что функции $t \mapsto \widehat{L}(t) \doteq L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))$ и $t \mapsto \widehat{L}'_u(t)$ п. п. по Степанову, по лемме 1.5, а также лемме 1.9 и теореме 1.5 из [4], найдутся такие последовательности $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Lambda$, $\lim\limits_{j\to\infty} \eta_j = 0$, и измеримое множество $\Xi \subset [0, a]$, $\operatorname{mes} \Xi = a$, что в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ и любой фиксированной п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$ существуют пределы

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \widehat{L}_m(\vartheta), \quad \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \widehat{L}'_{u,m}(\vartheta), \quad \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \mathcal{L}_m(\vartheta, v_m), \tag{4.6}$$

где $\widehat{L}_m(\vartheta) \doteq \widehat{L}(\vartheta + ma)$, $\widehat{L}'_{u,m}(\vartheta) \doteq \widehat{L}'_u(\vartheta + ma)$, $\mathcal{L}_m(\vartheta, v_m) \doteq \mathcal{L}(\vartheta + ma, v_m)$ и при этом

$$\lim_{j\to\infty} \left(\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \frac{1}{\eta_j} \int_0^{\eta_j} \max_{u\in O_N[0]} |\mathcal{L}_m(t+\vartheta, u) - \mathcal{L}_m(\vartheta, u)| dt \right) = 0, \tag{4.7}$$

$$\lim_{j\to\infty} \left(\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \frac{1}{\eta_j} \int_0^{\eta_j} |\widehat{L}_m(t+\vartheta) - \widehat{L}_m(\tau)| dt \right) = 0. \tag{4.8}$$

Не оговаривая, считаем, что точка ϑ в (4.1) и (4.2) принадлежит указанному множеству Ξ, число $\widehat{\lambda} \in \Lambda$ такое, что при каждом $\lambda \in (0, \widehat{\lambda}]$ для всех $t \in \mathbb{R}$ $\widehat{x}(t) + x(t, \lambda) \in V$ и $\dot{\widehat{x}}(t) + \dot{x}(t, \lambda) \in \mathfrak{U}$. Далее, для каждой пары $(\lambda, \vartheta) \in (0, \widehat{\lambda}] \times \Xi$ (см. (4.1), (4.2)) справедливо равенство

$$\frac{1}{\lambda}(\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot, \lambda)) - \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot))) = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{qa} \sum_{m=0}^{q-1} (\mathfrak{T}_m^{(1)}(\vartheta, \lambda) + \mathfrak{T}_m^{(2)}(\vartheta, \lambda)), \tag{4.9}$$

в котором

$$\mathfrak{T}_m^{(1)}(\vartheta, \lambda) \doteq r_m^{(1)}(\vartheta, \lambda) + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} (\mathcal{L}_m(t+\vartheta, v_m) - \widehat{L}_m(t)) dt, \tag{4.10}$$

$$\mathfrak{T}_m^{(2)}(\vartheta, \lambda) \doteq r_m^{(2)}(\vartheta, \lambda) + r_m^{(3)}(\vartheta, \lambda) + \frac{1}{\lambda} \int_{ma+\vartheta+\lambda}^{ma+\vartheta+\varepsilon} (\widehat{L}'_u(t)\dot{x}(t, \lambda) + \widehat{L}'_x(t) x(t, \lambda)) dt, \tag{4.11}$$

и где

$$r_m^{(1)}(\vartheta, \lambda) \doteq \frac{1}{\lambda} \int_{ma+\vartheta}^{ma+\vartheta+\lambda} \left(\int_0^1 L'_x(t, \widehat{x}(t) + \vartheta x(t, \lambda), \dot{\widehat{x}}(t) + v_m) d\vartheta \right) x(t, \lambda) dt,$$
$$r_m^{(2)}(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_{ma+\vartheta+\lambda}^{ma+\vartheta+\varepsilon} \left(\int_0^1 L'_x(t, \widehat{x}(t) + \vartheta x(t, \lambda), \dot{\widehat{x}}(t)) d\vartheta - \widehat{L}'_x(t) \right) x(t, \lambda) dt,$$
$$r_m^{(3)}(\vartheta, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{ma+\vartheta+\lambda}^{ma+\vartheta+\varepsilon} \left(\int_0^1 L'_u(t, \widehat{x}(t) + x(t, \lambda), \dot{\widehat{x}}(t) - \vartheta\sqrt{\lambda} v_m)\, d\vartheta \right) - \widehat{L}'_u(t))\, dt \cdot v_m.$$

Покажем, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \Big(\sup_{(\vartheta, m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}} |r_m^{(k)}(\vartheta, \lambda)| \Big) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{4.12}$$

Действительно, из (4.3) получаем неравенства

$$|r_m^{(1)}(\vartheta, \lambda)| \leqslant 2v \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+\sqrt{\lambda}} \mathfrak{l}(s) ds, \quad |r_m^{(2)}(\vartheta, \lambda)| \leqslant 2v \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+\sqrt{\lambda}} \mathfrak{l}(s) ds,$$

где $\mathfrak{l}(t) \doteq \max\limits_{(x,u)\in V\times\mathfrak{U}} |L'_x(t, x, u)|$. Поскольку $\mathfrak{l} \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, то из указанных неравенств в силу леммы 3.5 получаем равенства (4.12) при $k = 1, 2$. Из соотношений

$$|r_m^{(3)}(\vartheta, \lambda)| \leqslant \frac{v}{\sqrt{\lambda}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+\sqrt{\lambda}} \omega_{\gamma(\lambda)}[L'_u(s, \cdot, \cdot), V \times \mathfrak{U}] ds \leqslant v \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \omega_{\gamma(\lambda)}[L'_u(t, \cdot, \cdot), V \times \mathfrak{U}], \quad \gamma(\lambda) \doteq v\lambda,$$

в силу условия (4.4) получаем равенство (4.12) при $k = 3$.

Далее, т. к. $\widehat{x}(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (2.10) и $x(\vartheta + ma + \varepsilon, \lambda) = 0$, то при всех $(\lambda, \vartheta) \in (0, \widehat{\lambda}] \times \Xi$ имеем (здесь см. (4.1), (4.2)) следующие соотношения:

$$\frac{1}{\lambda} \int\limits_{ma+\vartheta+\lambda}^{ma+\vartheta+\varepsilon} (\widehat{L}'_u(t)\dot{x}(t,\lambda) + \widehat{L}'_x(t)x(t,\lambda))dt = -\widehat{L}'_{u,m}(\vartheta + \lambda)v_m = -\Big(\widehat{L}'_{u,m}(\vartheta) + \int\limits_{ma+\vartheta}^{ma+\vartheta+\lambda} \widehat{L}'_x(t)dt\Big)v_m.$$

Из них, учитывая, что (см. лемму 3.5) $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\Big(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\lambda} |\widehat{L}'_x(s)|ds\Big) = 0$, равенства (4.10) и (4.11) при $\lambda = \eta_j$, в силу (4.12) и (4.7)–(4.9) получаем нужное равенство (4.5) при $\vartheta \in \Xi$ и всякой п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$.

5. Приведем необходимое условие решения в сильном смысле для задачи (3.3).

Теорема 5.1. *Пусть функции $L : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям* 1)–3) *и* I), II) *соответственно и $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ является решением задачи* (3.3) *в сильном смысле. Тогда если функция* (3.4) *п. п. по Бору, то имеют место утверждения* а)–в) *из теоремы* 3.1, *и для каждой функции $u(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство*

$$M\{\mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u(t))\} \geqslant 0. \tag{5.1}$$

Доказательство. По определению 3.1 найдется такое $\gamma > 0$, что $\mathfrak{T}(x(\cdot)) \geqslant \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot))$ при всех $x(\cdot) \in \mathcal{B}$, удовлетворяющих неравенству $\|\widehat{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_C \leqslant \gamma$. Следовательно (см. (3.2)), $\widehat{x}(\cdot)$ будет решением задачи (3.3) и в слабом смысле. Поэтому будут справедливы утверждения а), б) теоремы 3.1.

Фиксируем функцию $u(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и для нее при $h > 0$ рассмотрим стекловское усреднение $u(\cdot, h)$, принадлежащее пространству $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, для которого при каждом $t \in [0, a]$ рассмотрим п. п. последовательность $\{u_m(t, h)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $u_m(t, h) \doteq u(t + ma, h)$, содержащуюся в $O_{\|u\|_\infty}[0]$. Для компактного множества $\mathfrak{U} \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}}) + O_N[0]$, $N \doteq \|u\|_\infty$, возьмем последовательности $\{q_l\}_{l=1}^\infty$, $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$ и множество $\Xi \subset [0, a]$ из леммы 4.1. Согласно этой лемме в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ для п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $v_m \doteq u_m(\vartheta, h)$ будет выполнено предельное равенство (4.5). С другой стороны, т. к. при $v_m \doteq u_m(\vartheta, h)$ (см. (4.1), (4.3)) $\|x(\cdot, \eta_j)\|_C \leqslant 2\eta_j\|u\|_\infty$, то при всех $j \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого j_0, будет справедливо неравенство $\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot, \eta_j)) \geqslant \mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot))$, или, т. к. $x(ma, \eta_j) = 0$, то $\frac{1}{\eta_j}(\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot, \eta_j)) - \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot))) \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum\limits_{m=0}^{q_l-1} \mathcal{E}(ma + \vartheta, \widehat{x}_{ma}(\vartheta), \dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta), \dot{\widehat{x}}(\vartheta) + u_m(\vartheta, h)) \geqslant 0$. Проинтегрировав последнее неравенство по ϑ от 0 до a, получаем

$$M\{\mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u(t, h))\} \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Далее, т. к. отображение $(t, u) \mapsto L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u)$ (см. доказательство леммы 4.1) принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(O_N[0], \mathbb{R}))$, то функция

$$(t, u) \mapsto \mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u) \doteq L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u) - \widehat{L}(t) - \widehat{L}'_u(t)u$$

также принадлежит $S(\mathbb{R}, C(O_N[0], \mathbb{R}))$. Поэтому в силу равенства $\lim\limits_{h\downarrow 0} d(u(\cdot, h), u(\cdot)) = 0$ и леммы 1.4, переходя в неравенстве (5.2) к пределу при $h \downarrow 0$, получаем неравенство (5.1).

Лемма 5.1. *Пусть $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ и функция $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям* 1)–3), *а также условию*

4) *для любой ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащей $\overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})$,*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \mathfrak{l}(t) < \infty, \quad \mathfrak{l}(t) \doteq \max_{u\in\mathfrak{U}} |L'_u(t, \widehat{x}(t), u)|, \quad \mathfrak{U} \doteq \overline{U}. \tag{5.3}$$

Тогда неравенство (5.1) *выполнено в том и только том случае, если при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *и каждом* $v \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + v) \geqslant 0. \tag{5.4}$$

Доказательство. Достаточность условий очевидна.

Необходимость. С этой целью для произвольного фиксированного $v \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим компактные множества $V \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})$, $\mathfrak{U} \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}}) + O_N[0]$ $(N \doteq |v|)$, а также функцию

$$(t, u) \mapsto g(t, u) \doteq \mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u),$$

принадлежащую, как показано при доказательстве теоремы 5.1, пространству $S(\mathbb{R}, C(O_N, \mathbb{R}))$. Покажем, что

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} (\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \omega_\gamma[g(t, \cdot), O_N[0]]) = 0. \tag{5.5}$$

Действительно, если $u_1, u_2 \in O_N[0]$ и $|u_1 - u_2| \leqslant \gamma$, то при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |g(t, u_1) - g(t, u_2)| &\leqslant |u_1 - u_2| \cdot |\widehat{L}'_u(t)| + \\ &+ \left| \int_0^1 L'_u(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \vartheta u_1) d\vartheta \cdot u_1 - \int_0^1 L'_u(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \vartheta u_2) d\vartheta \cdot u_2 \right| \overset{(5.3)}{\leqslant} \\ &\leqslant 2\gamma \|\mathfrak{l}(\cdot)\|_\infty + N \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \omega_\gamma [L'_u(t, \cdot, \cdot), V \times \mathfrak{U}], \end{aligned}$$

из которых в силу (4.4) вытекает (5.5).

Теперь рассмотрим задачу $M\{g(t, u(t))\} \to \inf$, $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, O_N[0])$, для которой функция $\widehat{u}(t) \equiv 0$ является решением. Поскольку функция $g \in S(\mathbb{R}, C(O_N[0], \mathbb{R}))$ и удовлетворяет условию (5.5), то по теореме 1.4 [4] (см. ее доказательство и замечание 4.1 в [12]) при п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\min\limits_{u \in O_N[0]} g(t, u) = g(t, 0)$, а поскольку $g(t, 0) = \mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) \equiv 0$ и $v \in O_N[0]$, то неравенство (5.4) доказано. □

Используя лемму 5.1, теорему 5.1 можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1 *и функция* $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет также условию* 4). *Тогда, если функция* (3.4) *п. п. по Бору, то справедливы утверждения* а), б) *теоремы* 4.1 *и найдется такое измеримое множество* $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{mes}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{T}) = 0$, *что для каждого* $t \in \mathbb{T}$ *и всех* $v \in \mathbb{R}^n$ *будет выполняться неравенство* (5.4).

Замечание 5.1. Если ввести отображение

$$(t, x, u, \psi) \mapsto H(t, x, u, \psi) \doteq \psi u - L(t, x, u), \quad (t, x, u, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}, \tag{5.6}$$

и обозначить $\widehat{\psi}(t) = \widehat{L}'_u(t)$, то неравенство (5.4) равносильно тому, что

$$H(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{\psi}(t)) \geqslant H(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + v, \widehat{\psi}(t)). \tag{5.7}$$

Теорема 5.3 (условия Вейерштрасса–Эрдмана). *Пусть выполнены условия теоремы* 5.2. *Тогда для любой ограниченной области* $U \subset \mathbb{R}^n$, *содержащей* $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x})$, *в точках* $\widehat{t} \in \mathbb{T}$, *являющихся точками непрерывности равномерно по* $(x, u) \in \overline{\mathrm{orb}}(x) \times \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})$, *отображения* $(t, x, u) \mapsto L(t, x, u)$, *функция* $t \mapsto H(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{\psi}(t))$ *является непрерывной.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$(t,u)\mapsto g(t,u)\doteq H(t,\widehat{x}(t),u,\widehat{\psi}(t))\overset{(5.6)}{=}\widehat{\psi}(t)u-L(t,\widehat{x}(t),u),\quad (t,u)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{U}.$$

По теореме 5.2 при $\widehat{t}\in\mathbb{T}$ выполнено равенство $H(\widehat{t},\widehat{x}(\widehat{t}),\dot{\widehat{x}}(\widehat{t}),\widehat{\psi}(\widehat{t}))=\max\limits_{u\in\mathfrak{U}}g(\widehat{t},u)$. Поэтому для доказательства теоремы 5.3 достаточно показать непрерывность в указанной в теореме точке $\widehat{t}$ функции $t\mapsto\max\limits_{u\in\mathfrak{U}}g(t,u)$. Для этого отметим, что по утверждению а) теоремы 5.2 функция $\widehat{\psi}(\cdot)$ п. п. по Бору, а значит, равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, и т. к. отображение $(t,u)\mapsto L(t,\widehat{x}(t),u)$ (см. ограничения на L и лемму 1.2) принадлежит $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))\subset\mathfrak{V}_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, то из соотношений

$$|\max_{u\in\mathfrak{U}}g(\widehat{t}+\alpha,u)-\max_{u\in\mathfrak{U}}g(\widehat{t},u)|\leqslant\max_{u\in\mathfrak{U}}|g(\widehat{t}+\alpha,u)-g(\widehat{t},u)|\leqslant\|\widehat{\psi}(\cdot+\alpha)-\widehat{\psi}(\cdot)\|_C\cdot\max_{u\in\mathfrak{U}}|u|+$$
$$+\max_{(x,u)\in\ V\times\mathfrak{U}}|L(\widehat{t}+\alpha,x,u)-L(\widehat{t},x,u)|+\omega_{\gamma(\alpha)}[L(\widehat{t},\cdot,\cdot),V\times\mathfrak{U}],\quad\gamma(\alpha)\doteq\|\widehat{x}(\cdot+\alpha)-\widehat{x}(\cdot)\|_C,$$

получаем непрерывность отображения $t\mapsto\max\limits_{u\in\mathfrak{U}}g(t,u)$ в точке $\widehat{t}\in\mathbb{T}$. $\square$

6. Укажем необходимые условия второго порядка сильного (слабого) минимума задачи (3.3) в предположении, что $(t,x,u)\to L(t,x,u)\in\mathbb{R}$, $(t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n$ ($\mathcal{V}$ — область в $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющего помимо условий 1) и 2) следующим условиям:

3) в каждой точке $(t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n$ существуют $L''_{xx}(t,x,u)$, $L''_{xu}(t,x,u)$, $L''_{ux}(t,x,u)$, $L''_{uu}(t,x,u)$;
4) для любых фиксированных $V\in\mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $\mathfrak{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ отображения $L''_{xx},L''_{ux},L''_{xu}$ и L''_{uu} принадлежат пространству $S(\mathbb{R},C(V\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$.

При выполнении этих условий в силу теоремы 2.5 из [7] утверждение б) леммы 2.3 дополняется следующим: в каждой точке $x(\cdot)\in\mathcal{B}\subset(\mathfrak{B},\|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ функционал (2.6) имеет вторую вариацию по Лагранжу $\delta^2\mathfrak{T}(x(\cdot);\cdot):\mathfrak{B}\to\mathbb{R}$, определенную при всяком $h(\cdot)\in\mathfrak{B}$ равенством

$$\delta^2\mathfrak{T}(x(\cdot);h(\cdot))=M\{\dot{h}^*(t)A(t)\dot{h}(t)+2\dot{h}^*(t)C(t)h(t)+h^*(t)B(t)h(t)\},\tag{6.1}$$

где

$$\begin{cases}A(t)=A(t;x(\cdot))\doteq L''_{uu}(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t));\\ B(t)=B(t;x(\cdot))\doteq L''_{uu}(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t));\\ C(t)=C(t;x(\cdot))\doteq L''_{xu}(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t))=L''_{ux}(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)).\end{cases}\tag{6.2}$$

Относительно функции $g:\mathbb{R}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ будем предполагать, что

I′) в каждой точке $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}$ существуют $g''_{xx}(t,x)$;
II′) для всякого $V\in\mathrm{comp}(\mathcal{V})$ выполняется условие II), а также условие, что отображение $(t,x)\mapsto g''_{xx}(t,x)$ принадлежит $B(\mathbb{R}\times V,\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$.

При выполнении этих условий утверждение леммы 3.2 дополняется следующим: в каждой точке $x(\cdot)\in\mathcal{B}\subset(\mathfrak{B},\|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ отображение (3.1) дважды дифференцируемо по Фреше и для всех $h(\cdot)\in\mathfrak{B}$

$$G''(x(\cdot))[h(\cdot)]=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}h^*(ma)g''_{xx}(\mathrm{t}_m,x(ma))h(ma).\tag{6.3}$$

Теорема 6.1 (условие Лежандра). *Пусть отображения* $L:\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *и* $g:\mathbb{R}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* 1)–4) *и* I′), II′) *соответственно. Тогда если функция* $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{B}$ *является решением задачи* (3.3) *в сильном смысле и* $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}}|L'_{xx}(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t))|<\infty$, *то при п. в.* $t\in\mathbb{R}$ *и всяком* $v\in\mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$v^*L''_{uu}(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t))\,v\geqslant 0.\tag{6.4}$$

Доказательство. По условию теоремы 6.1 найдется такое $\gamma > 0$, что (см. (3.3)) $\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot)) \leqslant \mathbb{I}(x(\cdot))$ для всех $x(\cdot) \in \mathcal{B}$, удовлетворяющих неравенству $\|\widehat{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_C \leqslant \gamma$, в том числе и для всех $x(\cdot) \in \mathcal{B}$ таких, что $\|\widehat{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$. Отсюда в силу ограничений, наложенных на L и g, и сделанных выше дополнений к утверждениям лемм 2.3 и 3.2, по теореме о необходимом условии локального минимума в нормированном пространстве ([9], с. 240) получаем, что для всех $x(\cdot) \in (\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ будет выполнено неравенство $\mathcal{K}(x(\cdot)) \doteq \delta^2\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot); x(\cdot)) \geqslant 0$, или (см. (6.3))

$$\mathcal{K}(x(\cdot)) = M\{\mathbb{L}(t, x(t), \dot{x}(t))\} + \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} x^*(ma) g''_{xx}(\mathrm{t}_m, \widehat{x}(ma)) x(ma) \geqslant 0, \tag{6.5}$$

где (здесь см. (6.1) и обозначения (6.2) при $x(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$)

$$\mathbb{L}(t, x(t), \dot{x}(t)) \doteq \dot{x}^*(t)A(t)\dot{x}(t) + 2\dot{x}^*(t)C(t)x(t) + x^*(t)B(t)x(t). \tag{6.6}$$

В силу условия 3) по лемме 1.2 и 1.3 отображения $A(\cdot), B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ принадлежат пространству $S(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ и для любых $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ функции $(t,u) \mapsto u^*A(t)u$, $(t,x,u) \mapsto u^*B(t)x$, $(t,x) \mapsto x^*C(t)x$ принадлежат пространствам $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, $S(\mathbb{R}, C(V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}))$ и $S(\mathbb{R}, C(V, \mathbb{R}))$ соответственно. Далее, используя теорему 1.5 ([4], с. 30) при $f(t) = A(t)$ и лемму 1.5 для отображения $(t,u) \mapsto u^*A(t)u$, $(t,u) \in \mathbb{R} \times O_N[0]$ $(N \in \mathbb{N})$, получим, что найдутся такие последовательности $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0, a]$ $(a > 0)$, $\lim\limits_{j\to\infty} \eta_j = 0$, и измеримое множество $\Xi \subset [0, a]$, $\mathrm{mes}\,\Xi = a$, такие, что для каждой точки $\vartheta \in \Xi$ и любой п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$ будет существовать

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l} \sum_{m=0}^{q_l-1} v_m^* A(\vartheta + ma) v_m \tag{6.7}$$

и выполняться равенство

$$\lim_{j\to\infty} \left(\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l} \sum_{m=0}^{q_l-1} \frac{1}{\eta_j} \int_0^{\eta_j} |A(t + \vartheta + ma) - A(\vartheta + ma)| dt \right) = 0. \tag{6.8}$$

Далее, по п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$, в фиксированной точке $\vartheta \in \Xi$ рассмотрим совокупность (см. (4.1)) п. п. иголок Вейерштрасса $\{x(\cdot,\lambda),\ \lambda{\in}\Lambda\}$. Так как $x(\cdot, \lambda) \in (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ и $x(ma, \lambda) = 0$ при всех $m \in \mathbb{Z}$ и каждом $\lambda \in \Lambda$, то из (6.5) получаем, что $\mathcal{K}(x(\cdot,\lambda)) = M\{\mathbb{L}(t, x(t,\lambda), \dot{x}(t,\lambda))\} \geqslant 0$ при всех $\lambda \in \Lambda$. С другой стороны, из (6.6) при $x(\cdot) = x(\cdot, \lambda)$ и (4.1), (4.2) получим равенство

$$M\{\mathbb{L}(t, x(t,\lambda), \dot{x}(t,\lambda))\} = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \left(\int_0^{\lambda} v_m^* A(t + \vartheta + ma) v_m dt + f_m(\vartheta, \lambda) \right), \tag{6.9}$$

в котором $\{f_m(\cdot,\lambda)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — такая п. п. последовательность, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \left(\sup_{(\vartheta,m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}} \frac{|f_m(\vartheta,\lambda)|}{\lambda} \right) = 0. \tag{6.10}$$

Поэтому из существования предела (6.7), равенства (6.8) из (6.10) и (6.9) при $\lambda = \eta_j$ получим $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{\eta_j} \mathcal{K}(x(\cdot,\eta_j)) = \lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum\limits_{m=0}^{q_l-1} v_m^* A(\vartheta + ma) v_m \geqslant 0$. Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 5.1, используя последнее неравенство, получим, что для всякой функции $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, O_N[0])$ будет выполнено неравенство $M\{u^*(t)A(t)u(t)\} \geqslant 0$, т. е. функция $\widehat{u}(t) \equiv 0$ является решением задачи $M\{u^*(t)A(t)u(t)\} \to \inf$, $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, O_N[0])$.

Поскольку для функции $(t,u) \mapsto u^*A(t)u$ выполнено условие типа 4), то по теореме 1.4 [4] при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и всех $v \in O_N[0]$ будет выполнено неравенство (6.4). Отсюда в силу произвольности выбора $N \in \mathbb{N}$ получаем нужное неравенство при всех $v \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 6.1. Если в задаче (3.3) отображение $L : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию 1) и 2′) (см. замечание 2.1), то для него условия (4.4) и (5.3) выполняются.

Замечание 6.2. Полагая в (3.3) $g \equiv 0$, получим задачу (2.12). Поэтому из необходимых условий решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ задачи (3.3) в сильном смысле вытекают соответствующие условия для решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ задачи (2.12) в сильном смысле. При этом надо иметь в виду, что для решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ задачи (2.12) в слабом смысле (а значит, и сильном смысле) для выполнения условий а), б) необходимо, чтобы п. п. по Степанову функции $t \mapsto \widehat{L}'_x(t)$, $t \mapsto \widehat{L}'_u(t)$ были ограничены на $\mathbb{R}$ в существенном.

Литература

1. Левитан Б.М. *Почти периодические функции.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
2. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 205 с.
3. Fink A.M. *Almost periodic differential equation* // Lect. Notes Math. – 1973. – V. 377. – 336 p.
4. Иванов А.Г. *Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации.* I // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. – Ижевск, 2002. – Вып. 1. – С. 3–100.
5. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.* – Киев: Вища школа, 1987. – 288 с.
6. Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем.* – М.: Мир, 1971. – 309 с.
7. Воронецкая М.А., Иванов А.Г. *О некоторых вариационных задачах в классе почти периодических функций* // Деп. в ВИНИТИ 27.12.03, № 1902-В2003. УдГУ, Ижевск, 2003. – 32 с.
8. Blot J. *Calculus of variations in mean and convex lagrangians* // J. Math. Anal. – 1988. – V. 134. – № 2. – P. 312–321.
9. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление.* – М.: Наука, 1979. – 429 с.
10. Иванов А.Г. *Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации.* II // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. – Ижевск, 2003. – Вып. 1. – С. 3–96.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974. – 479 с.
12. Данилов Л.И., Иванов А.Г. *К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 50–59.

Удмуртский государственный университет

Поступила
26.12.2003