ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 518 : 517.948

Ю.Г. БУЛЫЧЕВ

ПОСТРОЕНИЕ ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

1. Введение. При решении широкого класса прикладных задач возникает необходимость построения так называемых параметризованных (известных с точностью до параметров) аналитических решений, которые с допустимой погрешностью удовлетворяют рассматриваемым операторным уравнениям для заданных областей возможных значений характерных параметров исследуемых задач.

Ниже излагается единый подход к построению параметризованных аналитических решений линейных операторных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и т.д.), в основу которого положена непрерывная зависимость решений от параметров и впервые опубликованная в статьях [1], [2], [3] идея использования опорных решений. Развитие теории осуществляется в новой проективно-параметрической постановке, являющейся обобщением теории проекционных методов типа Галеркина [4]–[7] на рассматриваемый автором случай.

2. Проективно-параметрическая постановка задачи. Пусть имеются два нормированных пространства X и Y и в каждом из них выделено полное подпространство $\widetilde{X} \subset X$ и $\widetilde{Y} \subset Y$. Будем предполагать, что имеется непрерывный линейный оператор $\widetilde{\Phi}(\omega)$, проектирующий Y на $\widetilde{Y}$, а также линейное операторное уравнение (которое по аналогии с [4] будем называть точным)

$$K_1(\omega)x(\omega) \equiv G(\omega)x(\omega) - \lambda T(\omega)x(\omega) = y(\omega), \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{1}$$

где $G(\omega)$ и $T(\omega)$ — непрерывные линейные параметризованные операторы, отображающие X в Y и зависящие от вещественного векторного параметра $\omega \in \Omega \subset R^M$ (Ω — открытая ограниченная связная область, $M \in \{1, 2, \dots\}$), λ — константа.

Кроме того, относительно оператора $G(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ будем предполагать

1) оператор $G(\omega)$ имеет непрерывный обратный;
2) оператор $G(\omega)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, т. е. $G(\omega)\widetilde{X} = \widetilde{Y}$, и, следовательно, $G^{-1}(\omega)\widetilde{Y} = \widetilde{X}$.

Наряду с (1) рассмотрим приближенное уравнение

$$\widetilde{K_1}(\omega)\widetilde{x}(\omega) \equiv G(\omega)\widetilde{x}(\omega) - \lambda \widetilde{T}(\omega)\widetilde{x}(\omega) = \widetilde{\Phi}(\omega)y(\omega), \tag{2}$$

где $\widetilde{T}(\omega)$ — непрерывный линейный параметризованный оператор из $\widetilde{X}$ в $\widetilde{Y}$.

Введем для всех $\omega \in \Omega$ следующие условия:

1) для всякого $\widetilde{x}(\omega) \in \widetilde{X}$ имеет место неравенство

$$\|\widetilde{\Phi}(\omega)T(\omega)\widetilde{x}(\omega) - \widetilde{T}(\omega)\widetilde{x}(\omega)\| \le \mu_0 \|\widetilde{x}(\omega)\|, \tag{3}$$

2) для каждого $x(\omega) \in X$ найдется такое $\widetilde{y}_1(\omega) \in \widetilde{Y}$, что

$$\|T(\omega)x(\omega) - \widetilde{y}_1(\omega)\| \le \mu_1 \|x(\omega)\|, \tag{4}$$

3) существует такой элемент $\widetilde{y}_2(\omega) \in \widetilde{Y}$, что

$$\|y(\omega) - \widetilde{y}_2(\omega)\| \leq \mu_2 \|y_1(\omega)\|. \tag{5}$$

Несложно показать, что при сделанных предположениях изучение уравнений (1) и (2) сводится к изучению следующих уравнений — точного

$$K(\omega)x(\omega) \equiv G^{-1}(\omega)K_1(\omega)x(\omega) \equiv x(\omega) - \lambda G^{-1}(\omega)T(\omega)x(\omega) = G^{-1}(\omega)y(\omega) \tag{6}$$

и соответствующего ему приближенного

$$\widetilde{K}(\omega)\widetilde{x}(\omega) \equiv G^{-1}(\omega)\widetilde{K}_1(\omega)\widetilde{x}(\omega) \equiv \widetilde{x}(\omega) - \lambda G^{-1}(\omega)\widetilde{T}(\omega)\widetilde{x}(\omega) = G^{-1}(\omega)\widetilde{\Phi}(\omega)y(\omega). \tag{7}$$

Пусть теперь имеется последовательность приближенных уравнений и полученных с их помощью приближенных решений. Введем следующие обозначения $\widetilde{X} = X_n$, $\widetilde{K}(\omega) = K_n(\omega)$, $\widetilde{T}(\omega) = T_n(\omega)$, $\widetilde{\Phi}(\omega) = \Phi_n(\omega)$, где $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае вместо (6) и (7) можно ограничиться более компактной и удобной на практике формой представления точного и приближенного уравнений — точное

$$K(\omega)x(\omega) \equiv x(\omega) - \lambda F(\omega)x(\omega) = f(\omega), \quad x \in X, \tag{8}$$

и приближенное

$$K_n(\omega)x_n(\omega) \equiv x_n(\omega) - \lambda F_n(\omega)x_n(\omega) = P_n(\omega)f(\omega), \quad x_n \in X, \tag{9}$$

где

$$F(\omega) = G^{-1}(\omega)T(\omega), \qquad f(\omega) = G^{-1}(\omega)y_1(\omega),$$
$$F_n(\omega) = G^{-1}(\omega)T_n(\omega), \quad P_n(\omega) = G^{-1}(\omega)\Phi_n(\omega)G(\omega).$$

Зададим теперь последовательность $\{Z_n\}$ полных пространств Z_n, которые в частном случае могут совпадать с замкнутыми подпространствами X_n пространства X. Будем считать, что в полном пространстве $X_n \subset X$ определен непрерывный линейный параметризованный оператор $H_n(\omega)$, отображающий X_n взаимно однозначно на полное пространство Z_n. В силу его непрерывности и полноты следует непрерывность обратного оператора $H_n^{-1}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Полагаем также существование непрерывного линейного оператора $\widetilde{H}_n(\omega)$, являющегося продолжением оператора $H_n(\omega)$ на все X, т. е. $\widetilde{H}_n(\omega)$ отображает X на Z_n и совпадает с $H_n(\omega)$ на X_n для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть непрерывный линейный оператор $P_n(\omega)$ проектирует X на X_n, при этом $P^2(\omega)X = X_n$, $P_n^2(\omega) = P_n(\omega)$, где $\omega \in \Omega$. В этом случае в качестве $\widetilde{H}_n(\omega)$ можно принять $\widetilde{H}_n(\omega) = H_n(\omega)P_n(\omega)$, откуда $P_n(\omega) = H_n^{-1}(\omega)\widetilde{H}_n(\omega)$.

Ввиду наличия взаимнооднозначного соответствия между элементами пространств X_n и Z_n вместо (9) можно рассматривать другое приближенное уравнение

$$L_n(\omega)z_n(\omega) \equiv z_n(\omega) - \lambda B_n(\omega)z_n(\omega) = \widetilde{H}_n(\omega)f(\omega) \tag{10}$$

с непрерывным линейным оператором $B_n(\omega)$, действующим в пространстве Z_n. При этом $B_n(\omega) = H_n(\omega)F_n(\omega)H_n^{-1}(\omega)$, $L_n(\omega) = H_n(\omega)K_n(\omega)H_n^{-1}(\omega)$.

Если найдено точное решение $\overset{*}{z}_n(\omega) \in Z_n$ уравнения (10), то в качестве приближенного решения уравнения (8) следует принять $\overline{x}_n(\omega) = H_n^{-1}(\omega)\overset{*}{z}_n(\omega)$, где $\overline{x}_n(\omega) \in X_n$, $\omega \in \Omega$. В случае, когда $Z_n = X_n$, т. е. $H_n(\omega)$ рассматривается в качестве единичного оператора, уравнения (9) и (10) а также их решения совпадают.

В области $\Omega \subset R^M$ зададим совокупность точек (узлов) $\{\omega_{(i)}\}$, где $\omega_{(i)} = (\omega_{(i)1}, \ldots, \omega_{(i)M})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $N = N(n)$, $N \in \{1, 2, \ldots\}$. Поставим в соответствие набору $\{\omega_{(i)}\}$ семейство $\{\overset{*}{z}_n(\omega_{(i)})\}$ частных решений уравнения (10) так, что

$$L_n(\omega_{(i)})\overset{*}{z}_n(\omega_{(i)}) \equiv \overset{*}{z}_n(\omega_{(i)}) - \lambda B_n(\omega_{(i)})\overset{*}{z}_n(\omega_{(i)}) = \widetilde{H}_n(\omega_{(i)})f(\omega_{(i)}).$$

Данные решения (которые по аналогии с [1], [2], [3] будем называть опорными) строятся заранее с использованием высокоточных численных методов и могут храниться в памяти ЭВМ.

Требуется на базе данного семейства построить приближенное параметризованное решение $\widehat{z}_n(\omega) \in Z_n$ уравнения (10), которое можно было бы использовать для нахождения приближенного решения $\widehat{x}_n(\omega) = H_n^{-1}(\omega)\widehat{z}_n(\omega)$ исходного операторного уравнения (8). При этом должно выполняться неравенство

$$\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\| = \|\overset{*}{x}(\omega) - H_n^{-1}(\omega)\widehat{z}_n(\omega)\| \le \delta, \quad \widehat{x}_n \in X, \ \ \omega \in \Omega,$$

где $\overset{*}{x}(\omega)$ — точное параметризованное решение уравнения (8), δ — положительная постоянная.

Очевидно, количество и порядок расположения указанных выше узлов $\{\omega_{(i)}\}$ зависят от типа используемых нормированных пространств, выбора области $\Omega \subset R^M$, свойств точного и приближенного уравнений, а также требуемой точности построения приближенного параметризованного решения уравнения (8).

По аналогии с (3), (4) и (5) пространства X, Z_n и операторы $F(\omega)$, $B_n(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ свяжем следующими условиями:

1) для любого $x_n(\omega) \in X_n$

$$\|B_n(\omega)H_n(\omega)x_n(\omega) - \widetilde{H}_n(\omega)F(\omega)x_n(\omega)\| \le \widetilde{\eta}_n\|x_n(\omega)\|, \tag{11}$$

2) для любого $x(\omega) \in X$ найдется элемент $x_n(\omega) \in X$ такой, что

$$\|F(\omega)x(\omega) - x_n(\omega)\| \le \varepsilon_n\|x(\omega)\|, \tag{12}$$

3) при некотором $f_n(\omega) \in X_n$

$$\|f(\omega) - f_n(\omega)\| \le \gamma_n\|f(\omega)\|, \tag{13}$$

где константа γ_n, в отличие от констант $\widetilde{\eta}_n$ и ε_n, в общем случае зависит от $f(\omega)$.

Применительно же к задаче (8), (9), когда в качестве приближенного решения уравнения (8) рассматривается точное решение уравнения (9), вместо условия (11) используется новое условие: для любого $x_n(\omega) \in X_n$ имеем $\|P_n(\omega)F(\omega)x_n(\omega) - F_n(\omega)x_n(\omega)\| \le \eta_n\|x_n(\omega)\|$, где $\eta_n = \widetilde{\eta}_n\|H_n^{-1}(\omega)\|$. Условия (12), (13) не затрагивают операторов $F_n(\omega)$ и $P_n(\omega)$, поэтому применительно к уравнению (9) не изменяются.

3. Построение параметризованных решений. Допустим, что для семейства опорных решений $\{\overset{*}{z}_n(\omega_{(i)})\}$ (где $\overset{*}{z}_n(\omega_{(i)}) \in Z_n$) справедливы представления

$$\begin{gathered}\overset{*}{z}_n(\omega_{(i)}) = \varphi_n(\omega_{(i)}, u_{(i)}), \quad \omega_{(i)} \in \Omega \subset R^M, \\ u_{(i)} \in U \subset R^K, \ \ i = 1, 2, \dots, N, \ \ K = K(n), \ \ K \in \{1, 2, \dots\},\end{gathered} \tag{14}$$

где φ_n — отображение, непрерывное в каждой из точек $(\omega, u) \in \Omega \times U$, U — ограниченное открытое связное множество; $u_{(i)} = (u_{(i)1}, \dots, u_{(i)K})$ — вектор с вещественными коэффициентами.

Для фиксированного $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ поставим в соответствие семейству узлов $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(N)}$ набор коэффициентов $u_{(1)k}, \dots, u_{(N)k}$. Проведем интерполяцию данного набора, сопоставив ему скалярную вещественную функцию $\widehat{u}_k(\omega)$ известного класса со значениями в R^1, непрерывную по $\omega \in \Omega$ [8], [9], [10]:

$$\widehat{u}_k(\omega) = \mu(\omega, v_k), \quad v_k \in V_k \subset R^N, \ \ \omega \in \Omega \subset R^M, \tag{15}$$

где компоненты вектора $v_k = (v_{(1)k}, \dots, v_{(N)k})$ находятся путем решения следующей системы (как правило, линейной) алгебраических уравнений:

$$\widehat{u}_k(\omega_{(i)}) = \mu(\omega_{(i)}, v_k) = u_{(i)k}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \ \ k \in \{1, 2, \dots, K\}. \tag{16}$$

Здесь и далее полагаем, что соответствующие интерполяционные задачи разрешимы и имеют единственное решение. Теперь по аналогии с (15), (16) проводится интерполяция для всех

$k = 1, 2, \ldots, K$, т. е. находится совокупность параметризованных коэффициентов $\{\widehat{u}_k(\omega)\}$, непрерывных по параметру $\omega \in \Omega$. С учетом этого приближенное параметризованное решение уравнения (10), справедливое для всех $\omega \in \Omega$, может быть представлено в виде

$$\widehat{z}_n(\omega) = \varphi_n(\omega, \widehat{u}(\omega)), \quad \widehat{u}(\omega) \in U, \;\; \widehat{z}_n(\omega) \in Z_n, \tag{17}$$

где $\widehat{u}(\omega) = (\widehat{u}_1(\omega), \ldots, \widehat{u}_K(\omega))$ — векторная функция со значениями в R^K непрерывная в Ω.

Очевидно выполнение следующих характеристических свойств:

$$\widehat{u}(\omega_{(i)}) = u_{(i)}, \quad \widehat{z}_n(\omega_{(i)}) = \varphi_n(\omega_{(i)}, \widehat{u}_{(i)}) = \varphi_n(\omega_{(i)}, u_{(i)}) = \overset{*}{z}_n(\omega_{(i)}), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Данные свойства показывают, что построенное параметризованное решение (17) совпадает с опорными решениями семейства $\{\overset{*}{z}_n(\omega_{(i)})\}$ при фиксированных узлах интерполяции $\{\omega_{(i)}\}$, где $\omega_{(i)} \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

По аналогии с (17) для точного решения уравнения (10) можно воспользоваться представлением

$$\overset{*}{z}_n(\omega) = \varphi_n(\omega, u(\omega)), \quad u(\omega) \in U, \;\; \overset{*}{z}_n(\omega) \in Z_n, \tag{18}$$

где $u(\omega) = (u_1(\omega), \ldots, u_K(\omega))$, при этом $u(\omega_{(i)}) = u_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Если построено приближенное решение $\widehat{z}_n(\omega)$ уравнения (10), то в качестве приближенного решения $\widehat{x}_n(\omega)$ уравнения (8) следует принять $\widehat{x}_n(\omega) = H_n^{-1}(\omega)\widehat{z}_n(\omega)$, где $\widehat{x}_n(\omega) \in X_n$. Оценка близости приближенного решения $\widehat{x}_n(\omega)$ уравнения (8) к точному решению $\overset{*}{x}(\omega)$ устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (11), (12) *и* (13), *существует непрерывный оператор* $L_n^{-1}(\omega)$ *и уравнение (8) имеет непрерывное в области* Ω *точное решение* $\overset{*}{x}(\omega)$, *то и приближенное решение* $\widehat{x}_n(\omega)$ *также непрерывно в области* Ω, *и для всех* $\omega \in \Omega$ *справедлива оценка*

$$\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\| = \|\overset{*}{x}(\omega) - H_n^{-1}(\omega)\widehat{z}_n(\omega)\| \le \widetilde{p}_n\|\overset{*}{x}(\omega)\| + \|H_n^{-1}(\omega)\|\,\|\Delta\varphi_n(\omega)\|, \tag{19}$$

где

$$\Delta\varphi_n(\omega) = \varphi_n(\omega, u(\omega)) - \varphi_n(\omega, \widehat{u}(\omega)), \quad \Delta\varphi_n(\omega) \in Z_n, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_n = [1 + |\lambda|\varepsilon_n + \gamma_n\|K(\omega)\|]|\lambda|\widetilde{\eta}_n\|H_n^{-1}(\omega)L_n^{-1}(\omega)\| +\\ + [|\lambda|\varepsilon_n + \gamma_n\|K(\omega)\|][1 + \|H_n^{-1}(\omega)L_n^{-1}(\omega)\widetilde{H}_n(\omega)K(\omega)\|].\end{aligned} \tag{21}$$

Доказательство. В силу условий теоремы согласно [4] для фиксированного $\omega \in \Omega$ справедлива оценка

$$\|\overset{*}{x}(\omega) - \overline{x}_n(\omega)\| = \|\overset{*}{x}(\omega) - H_n^{-1}(\omega)\overset{*}{z}_n(\omega)\| \le \widetilde{p}_n\|\overset{*}{x}(\omega)\|, \tag{22}$$

где константа $\widetilde{p}_n$ определяется в соответствии с (21), а функция $\overline{x}_n(\omega)$ является непрерывной в области Ω. Далее, с учетом неравенства треугольника

$$\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\| \le \|\overset{*}{x}(\omega) - \overline{x}_n(\omega)\| + \|\overline{x}_n(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\|,$$

откуда, принимая во внимание (17), (18) и (22), получаем

$$\begin{aligned}\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\| = \|\overset{*}{x}(\omega) - H_n^{-1}(\omega)\widehat{z}_n(\omega)\| \le\\ \le \widetilde{p}_n\|\overset{*}{x}(\omega)\| + \|H_n^{-1}(\omega)\varphi_n(\omega, u(\omega)) - H_n^{-1}(\omega)\varphi_n(\omega, \widehat{u}(\omega))\|.\end{aligned} \tag{23}$$

Так как линейный непрерывный оператор $H_n(\omega)$, действующий из банахова пространства X_n взаимно однозначно на банахово пространство Z_n, имеет непрерывный (а следовательно, ограниченный) обратный оператор $H_n^{-1}(\omega)$, то с учетом (20) можно воспользоваться очевидным неравенством

$$\|H_n^{-1}(\omega)\varphi_n(\omega,u(\omega)) - H_n^{-1}(\omega)\varphi_n(\omega,\widehat{u}(\omega))\| \le$$
$$\le \|H_n^{-1}(\omega)\|\,\|\varphi_n(\omega,u(\omega)) - \varphi_n(\omega,\widehat{u}(\omega))\| = \|H_n^{-1}(\omega)\|\,\|\Delta\varphi_n(\omega)\|, \quad \omega\in\Omega.$$

Отсюда с учетом (23) приходим к оценке (19). □

На основании данной теоремы легко получить оценку приближенного и точного решений, не использующую данных, относящихся к точному решению $\overset{*}{x}(\omega)\in X$

$$\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\| \le \frac{\widetilde{p}_n}{1-\widetilde{p}_n}\|\widehat{x}_n(\omega)\| + \|H_n^{-1}(\omega)\|\,\|\Delta\varphi_n(\omega)\|, \quad \widetilde{p}<1, \;\; \omega\in\Omega.$$

При заданном N и оптимальном расположении узлов интерполяции $\{\omega_{(i)}\}$ в области Ω (по аналогии с [1], [2], [3]) величина $\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\|$ достигает наименьшего значения

$$\sup_{\omega}\inf_{\{\omega_{(i)}\}}\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\| \le \sup_{\omega}\inf_{\{\omega_{(i)}\}}[\widetilde{p}_n\|\overset{*}{x}(\omega)\| + \|H_n^{-1}(\omega)\|\,\|\Delta\varphi_n(\omega)\|] \le \delta.$$

Условия сходимости последовательности $\{\widehat{x}_n(\omega)\}$ к точному решению $\overset{*}{x}(\omega)$ уравнения (8) устанавливает

Теорема 2. *Если оператор $K(\omega)$ имеет непрерывный обратный, и при каждом $n=1,2,\dots$ выполнены условия* (11), (12) *и* (13), *причем*

$$\lim\widetilde{\eta}_n\|H_n(\omega)\| = \lim\varepsilon_n\|H_n^{-1}(\omega)\widetilde{H}_n(\omega)\| = \lim\gamma_n\|H_n^{-1}(\omega)\widetilde{H}_n(\omega)\| = 0$$

при $n\to\infty$ и $\lim\|H_n^{-1}(\omega)\|\,\|\Delta\varphi_n(\omega)\| = 0$ при $n,N,K\to\infty$, то при достаточно больших n для всех $\omega\in\Omega$ имеет место сходимость последовательности решений $\{\widehat{x}_n(\omega)\}$ к точному решению $\overset{*}{x}(\omega)$ и справедлива оценка

$$\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\| \le c_{n0}\widetilde{\eta}_n\|H_n^{-1}(\omega)\| + c_{n1}\varepsilon_n\|H_n^{-1}(\omega)\widetilde{H}_n(\omega)\| +$$
$$+ c_{n2}\gamma_n\|H_n^{-1}(\omega)\widetilde{H}_n(\omega)\| + \|H_n^{-1}(\omega)\|\,\|\Delta\varphi_n(\omega)\|.$$

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из неравенства треугольника и соответствующих оценок, приведенных в [4]. Соотношение $\lim\|H_n^{-1}(\omega)\|\,\|\Delta\varphi_n(\omega)\| = 0$ при $n,N,K\to\infty$ указывает на то, что методы интерполяции, используемые при построении параметризованного решения $\widehat{x}_n(\omega)$, являются сходящимися.

Замечание 1. При построении параметризованных решений операторных уравнений описанным выше способом вместо рассмотренных выше процедур интерполяции могут использоваться известные процедуры аппроксимации (приближения). Очевидно, что в этом случае отмеченные ранее характеристические свойства могут не выполняться, при этом в качестве $\|\Delta\varphi_n(\omega)\|$ рассматриваются нормы соответствующих остаточных членов аппроксимации.

Замечание 2. Если рассмотренный выше подход к построению параметризованных решений применяется непосредственно к уравнению (9), то необходимо поставить в соответствие набору узлов $\{\omega_{(i)}\}$ семейство $\{\overset{*}{x}_n(\omega_{(i)})\}$ опорных решений этого уравнения. По аналогии с (14)–(18) точное и приближенное решения уравнения (9) можно представить в виде $\overset{*}{x}_n(\omega) = \xi_n(\omega,\psi(\omega))$, $\widehat{x}_n(\omega) = \xi_n(\omega,\widehat{\psi}(\omega))$, где $\widehat{\psi}(\omega) = (\widehat{\psi}_1(\omega),\dots,\widehat{\psi}_K(\omega))$, $\widehat{\psi}_k(\omega) = \theta(\omega,w_k)$, $w_k\in W_k\subset R^N$, $k\in\{1,2,\dots,K\}$. Здесь компоненты вектора $w_k = (w_{(1)k},\dots,w_{(N)k})$ находятся из системы уравнений $\widehat{\psi}_k(\omega_{(i)}) = \theta(\omega_{(i)},w_k) = \psi_{(i)k}$, $i=1,2,\dots,N$, $k\in\{1,2,\dots,K\}$. Для оценки близости $\overset{*}{x}(\omega)$ и $\widehat{x}_n(\omega)$ можно воспользоваться оценкой $\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\| \le p_n\|\overset{*}{x}(\omega)\| + \|\Delta\xi_n(\omega)\|$, где $\Delta\xi_n(\omega) = \xi_n(\omega,\psi(\omega)) - \xi_n(\omega,\widehat{\psi}(\omega))$, $p_n = 2|\lambda|\eta_n\|K_n^{-1}(\omega)\| + [|\lambda|\varepsilon_n + \gamma_n\|K(\omega)\|][1+\|K_n^{-1}(\omega)P_n(\omega)K(\omega)\|]$.

4. Параметризованные решения метода Галеркина. Остановимся подробнее на важном для практики случае, когда $Z_n = X_n$, а в качестве $F_n(\omega)$ рассматривается оператор $P_n(\omega)F(\omega)$, что позволяет перейти от (9) к новому приближенному уравнению

$$K_n(\omega)x_n(\omega) \equiv x_n(\omega) - \lambda P_n(\omega)F(\omega)x_n(\omega) = P_n(\omega)f(\omega). \tag{24}$$

Очевидно, что в этом случае можно положить $\widetilde{\eta}_n = 0$, и, следовательно, формулировки приведенных выше теорем упрощаются.

Пусть X_n — конечномерное (размерности n) пространство X. Каждый элемент $x_n(\omega) \in X_n$ с учетом второго замечания по аналогии с (18) единственным образом представим в форме (при этом $K = n$)

$$x_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\omega)\xi_k, \quad \xi_k \in X_n, \tag{25}$$

где $\psi(\omega) = (\psi_1(\omega), \ldots, \psi_n(\omega))$ — вектор искомых параметризованных коэффициентов, а совокупность $\{\xi_k\}$ образует базис в X_n.

Рассмотрим полную в X_n систему $\{Q_j(\omega)\}$ линейных параметризованных функционалов $Q_j(\omega)$ таких, что из равенств $Q_j(\omega)x_n(\omega) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, следует $x_n(\omega) = 0$. В этом случае вместо (24) можно ограничиться рассмотрением системы равенств

$$Q_j(\omega)P_n(\omega)K(\omega)x_n(\omega) = Q_j(\omega)P_n(\omega)f(\omega), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Разыскивая решение уравнения (24) в форме (25), приходим к параметризованной системе линейных алгебраических уравнений метода Галеркина а абстрактной форме (по аналогии с [4], [5])

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k(\omega)Q_j(\omega)\xi_k - \lambda \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\omega)Q_j(\omega)P_n(\omega)F(\omega)\xi_k = Q_j(\omega)P_n(\omega)f(\omega), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Если система функционалов $\{Q_j(\omega)\}$ биортогональна базису $\{\xi_k\}$, то с учетом (26) получаем

$$\psi_j(\omega) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\omega)Q_j(\omega)P_n(\omega)F(\omega)\xi_k = Q_j(\omega)P_n(\omega)f(\omega), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В частности, если X — гильбертово пространство, а $P_n(\omega)$ — оператор ортогонального проектирования, то, предполагая систему $\{\xi_k\}$ ортонормальной, имеем

$$\psi_j(\omega) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\omega)\langle F(\omega)\xi_k, \xi_j\rangle = \langle f(\omega), \xi_j\rangle, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{27}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — символ скалярного произведения.

Решая систему уравнений (27) относительно $\{\psi_k(\omega)\}$ для совокупности узлов $\{\omega_{(i)}\}$ (где $i = 1, 2, \ldots, N$), найдем семейство опорных решений $\{\overset{*}{x}_n(\omega_{(i)})\}$ уравнения (24), которое с учетом второго замечания по аналогии с (14) может быть представлено в виде $\{\overset{*}{x}_n(\omega_{(i)}) = \xi\psi_{(i)}^T\}$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — вектор базисных функций, $\psi_{(i)} = (\psi_{(i)1}, \ldots, \psi_{(i)n})$ — вектор искомых коэффициентов, которые находятся из (27) для узла $\omega_{(i)} \in \Omega$, при этом $\psi_{(i)k} = \psi_k(\omega_{(i)})$, $k = 1, 2, \ldots, n$; T — символ транспонирования.

По аналогии с (15), (16) с учетом второго замечания можно воспользоваться следующей интерполяцией:

$$\widehat{\psi}_k(\omega) = \sum_{j=1}^{N} w_{(j)k}\theta_{(j)}(\omega), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

где совокупность коэффициентов $w_{(1)k}, \ldots, w_{(N)k}$ для фиксированного k находится как решение системы уравнений

$$\widehat{\psi}_k(\omega_{(i)}) = \sum_{j=1}^{N} w_{(i)k}\theta_{(j)}(\omega_{(i)}) = \psi_{(i)k}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{29}$$

Приближенное параметризованное решение уравнения (24) может быть представлено в виде $\widehat{x}_n(\omega) = \xi\widehat{\psi}^{\,T}(\omega)$, где $\widehat{\psi}(\omega) = (\widehat{\psi}_1(\omega), \ldots, \widehat{\psi}_n(\omega))$. При этом $\widehat{x}_n(\omega_{(i)}) = \xi\widehat{\psi}^{\,T}(\omega_{(i)}) = \xi\psi^T_{(i)} = \overset{*}{x}_n(\omega_{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Если в качестве точного решения уравнения (24) принять $\overset{*}{x}_n(\omega) = \xi\psi^T(\omega)$, то с учетом второго замечания $\|\overset{*}{x}(\omega) - \widehat{x}_n(\omega)\| \le p_n\|\overset{*}{x}(\omega)\| + \|\xi\Delta\psi^T(\omega)\|$, где $\Delta\psi(\omega) = \psi(\omega) - \widehat{\psi}(\omega)$, $p_n = [|\lambda|\varepsilon_n + \gamma_n\|K(\omega)\|][1 + \|K_n^{-1}(\omega)P_n(\omega)K(\omega)\|]$.

Можно воспользоваться несколько иным подходом к построению параметризованного решения $\widehat{x}_n(\omega)$ по сравнению с рассмотренным выше. Для этого представим $\widehat{x}_n(\omega)$ в следующем виде

$$\widehat{x}_n(\omega) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} w_{(j)k}\theta_{(j)}(\omega)\xi_k. \tag{30}$$

Задавшись совокупностью узлов $\{\omega_{(i)}\}$, составим с учетом (27) и (30) систему линейных алгебраических уравнений относительно массива $\{w_{(j)k}\}$ искомых коэффициентов $w_{(j)k}$

$$\sum_{p=1}^{N} w_{(p)j}\theta_{(p)}(\omega_{(i)}) - \lambda\sum_{k=1}^{n}\sum_{d=1}^{N} w_{(d)k}\theta_{(d)}(\omega_{(i)})\langle F(\omega_{(i)})\xi_k, \xi_j\rangle =$$
$$= \langle f(\omega_{(i)}), \xi_j\rangle, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \;\; i = 1, 2, \ldots, N. \tag{31}$$

Предполагается, что при выбранной совокупности узлов $\{\omega_{(i)}\}$ система (31) не вырождена.

5. Пример. По аналогии с [4] рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$x^{(2P)}(\omega, t) - \lambda\sum_{r=1}^{2P} p_r(\omega, t)x^{(2P-r)}(\omega, t) = y(\omega, t), \quad t \in [a, b] \subset R^1, \;\; \omega \in [c, d] \subset R^1 \tag{32}$$

при однородных краевых условиях

$$x^{(r)}(\omega, a) = x^{(r)}(\omega, b) = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, P - 1, \tag{33}$$

где для фиксированного $\omega \in \Omega$ выполняется следующее: $x(\omega, t) \in X = C^{(2P)}[a, b]$, $p_r(\omega, t) \in C^{(1)}[a, b]$, $y(\omega, t) \in Y = C^{(1)}[a, b]$. Будем рассматривать уравнение (32) как функциональное в пространстве $2P$-непрерывно дифференцируемых по t функций $x(\omega, t)$, удовлетворяющих краевым условиям (33). В этом случае с учетом (1) имеем $x(\omega) = x(\omega, t)$, $G(\omega) = G$, $Gx(\omega, t) = x^{(2P)}(\omega, t)$,

$$T(\omega)x(\omega, t) = \sum_{r=1}^{2P} p_r(\omega, t)x^{(2P-r)}(\omega, t).$$

Полагаем также, что выполняются условия теоремы о неявной функции, обеспечивающие требуемую гладкость решения $\overset{*}{x}(\omega, t)$ задачи (32), (33) по параметру ω в замкнутом шаре $\Omega = [c, d]$.

За X_n примем (с учетом (25)) множество функций вида

$$x_n(\omega, t) = (t - a)^P(b - t)^P\sum_{k=1}^{n}\psi_k(\omega)t^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\psi_k(\omega)\xi_k(t), \tag{34}$$

так что краевые условия (33) удовлетворяются автоматически.

Если воспользоваться интерполяционным методом (иначе методом совпадения (коллокации) [4]), то коэффициенты $\psi_{(i)k} = \psi_k(\omega_{(i)})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, соответствующие i-му опорному решению

$\overset{*}{x}_n(\omega_{(i)}, t)$, могут быть найдены из условия удовлетворения уравнения (32) в некоторой заданной системе точек (узлов) коллокации $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$x_n^{(2P)}(\omega_{(i)}, t_j) - \lambda \sum_{r=1}^{2P} p_r(\omega_{(i)}, t_j) x^{(2P-r)}(\omega_{(i)}, t_j) = y(\omega_{(i)} t_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{35}$$

Решая систему (35) для каждого $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, поставим в соответствие набору $\{\omega_{(i)}\}$ семейство $\{\overset{*}{x}_n(\omega_{(i)}, t)\}$ частных решений уравнения (2), которое в нашем случае принимает следующий вид: $Gx_n(\omega) - \lambda \Phi_n T x_n(\omega) = \Phi_n y(\omega)$, где $x_n(\omega) = x_n(\omega, t)$, $x_n(\omega) = \widetilde{x}(\omega)$, $\Phi_n = \widetilde{\Phi}(\omega)$. Отображение Φ_n пространства Y на $\widetilde{Y} = Y_n$ определим, принимая в качестве $y_n(\omega, t) = \Phi_n y(\omega, t)$ для фиксированного ω интерполяционный полином $(n-1)$-й степени, имеющий в узлах $t_1, t_2, \dots, t_n$ те же значения, что и $y(\omega, t)$.

По аналогии с [1]–[3], используя интерполяцию на основе многочлена Лагранжа с учетом (28), (29) имеем

$$\widehat{\psi}_k(\omega) = \sum_{j=1}^{N} w_{(j)k} \theta_{(j)}(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \psi_{(j)k} L_{(j)}(\omega), \tag{36}$$

где

$$w_{(j)k} = \psi_{(j)k}, \quad \theta_{(j)}(\omega) = L_{(j)}(\omega),$$
$$L_{(j)}(\omega) = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{N} \frac{\omega - \omega_{(s)}}{\omega_{(j)} - \omega_{(s)}}, \quad \omega_{(j)}, \omega_{(s)} \in \Omega = [c, d],$$
$$\widehat{\psi}_k(\omega_{(i)}) = \sum_{j=1}^{N} \psi_{(j)k} L_{(j)}(\omega_{(i)}) = \psi_{(j)k}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \ \ k = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, в силу (34), (36) приближенное параметризованное решение краевой задачи (32), (33) имеет вид

$$\widehat{x}_n(\omega, t) = (t-a)^P (b-t)^P \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} \sum_{j=1}^{N} \psi_{(j)k} \prod_{s=1}^{N} \frac{\omega - \omega_{(s)}}{\omega_{(j)} - \omega_{(s)}}, \tag{37}$$

при этом $\widehat{x}_n(\omega_{(i)}, t_r) = \overset{*}{x}_n(\omega_{(i)}, t_r)$, $i = 1, 2, \dots, N$, $r = 1, 2, \dots, n$.

Применительно к данному примеру условия (3), (4) и (5) выполнены соответственно с константами $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = O(1/n)$ и $\mu_2 = O(1/n)$, если вспомнить, что по условию $y(\omega, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая (по t) функция. В случае, когда узлы $\{t_r\}$ чебышевские, справедливо $\|\overset{*}{x}(\omega, t) - \overset{*}{x}_n(\omega, t)\| = O(\ln n / n)$.

По аналогии с [2], [3] для оценки погрешности интерполяции можно воспользоваться неравенством

$$|\psi_k(\omega) - \widehat{\psi}_k(\omega)| \le \frac{Q_N}{N!} \prod_{i=1}^{N} |\omega - \omega_{(i)}|, \quad \omega \in [c, d], \tag{38}$$

при этом узлы $\{\omega_{(i)}\}$ являются чебышевскими, т. е.

$$\omega_{(i)} = \frac{d+c}{2} - \frac{d-c}{2} \cos\Big(\frac{2i-1}{2N} \pi\Big),$$

то

$$\max_{\omega \in [c,d]} \prod_{i=1}^{N} |\omega - \omega_{(i)}| = \frac{(d-c)^N}{2^{2N-1}}.$$

Таким образом, с учетом (34), (37) и (38) имеем оценку

$$|\overset{*}{x}_n(\omega,t)-\widehat{x}_n(\omega,t)|\le|(t-a)^P(b-t)^P|\frac{Q_N}{N\,!}\frac{(d-c)^N}{2^{2N-1}}\sum_{k=1}^{n}|t|^{k-1}$$

при этом $|\overset{*}{x}_n(\omega,t)-\widehat{x}_n(\omega,t)|\to 0$ при $n,N\to\infty$ для всех $\omega\in[c,d]$ и $t\in[a,b]$. Таким образом, равномерная сходимость

$$\max_{t,\omega}|\overset{*}{x}(\omega,t)-\widehat{x}_n(\omega,t)|\to 0,\quad t\in[a,b],\ \ \omega\in[c,d],$$

при $n,N\to\infty$, с учетом свойств гладкости приближенного и точного решений задачи (32), (33), следует из сходимости метода коллокации и сходимости метода интерполяции многочлена Ланграража.

Литература

1. Булычев Ю.Г. *Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – № 10. – С. 1482–1490.
2. Булычев Ю.Г. *Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – Т. 31. – № 9. – С. 1305–1319.
3. Булычев Ю.Г. *Численно-аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений с использованием обобщенной интерполяции* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 4. – С. 520–532.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
5. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.
6. Вайникко Г.М. *Возмущенный метод Галеркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – № 4. – С. 723–751.
7. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
8. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений.* Т. 1. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
9. Бабенко К.И. *Основы численного анализа.* – М.: Наука, 1986. – 744 с.
10. Иванов В.В. *Методы вычислений на ЭВМ*: Справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 582 с.

Ростовское высшее военное
командно-инженерное
училище ракетных войск

Поступили
первый вариант 12.02.1996
окончательный вариант 02.12.1996