ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 517.926

В.Н. БОБОЧКО

НЕСТАБИЛЬНЫЕ И КРАТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРА В СИСТЕМЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon W(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 W'(x,\varepsilon) - A(x)W(x,\varepsilon) = h(x), \\ &BW(0,\varepsilon) + CW(x_0,\varepsilon) + DW(a,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\alpha + W^0 \text{ при } \varepsilon \to +0, \quad x \in I = [0;a]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $A(x)$ — квадратная матрица n-го порядка, $h(x)$ — известная вектор-функция, $W(x,\varepsilon)$ — искомая вектор-функция, $B = \{b_{ij}\}$, $C = \{c_{ij}\}$, $D = \{d_{ij}\}$ — матрицы, в которых $b_{ii} = 1$, $i = \overline{1, q-1}$; $c_{qq} = 1$; $d_{ii} = 1$; $i = \overline{q+1, n}$, а все остальные элементы этих матриц тождественно равны нулю, α и W^0 — заданные начальные векторы.

Задачу (1) будем изучать при выполнении следующих условий.

Условие 1°. $A(x), h(x) \in C^\infty[I]$.

Условие 2°. Спектр матрицы $A(x)$ действительный и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) \equiv \dots \equiv \lambda_p(x) < \lambda_{p+1}(x) < \dots < \lambda_{q-1}(x) < \lambda_q(x) < \\ < \lambda_{q+1}(x) < \lambda_{q+2}(x) < \dots < \lambda_{q+s}(x) \equiv \dots \equiv \lambda_n(x), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda_i(x) \neq 0$, $i = \overline{1, q-2} \cup \overline{q+2, n}$, $x \in I$.

Нестабильные элементы спектра матрицы $A(x)$ представимы в виде

$$\begin{gathered} \lambda_{q-1}(x) = x\widetilde{\lambda}_{q-1}(x), \quad \lambda_q(x) = (x-x_0)\widetilde{\lambda}_q(x), \quad \lambda_{q+1}(x) = (x-a)\widetilde{\lambda}_{q+1}(x), \\ \widetilde{\lambda}_m(x) < 0, \quad m = \overline{q-1, q+1}, \quad 0 < x_0 < a. \end{gathered} \tag{3}$$

Из структуры $\operatorname{Sp} A(x)$ видно, что решение невырожденного векторного уравнения

$$-A(x)\omega(x) = h(x) \tag{4}$$

в общем случае имеет разрывы второго рода в точках $x = 0$, $x = x_0$ и $x = a$.

Цель данной работы состоит

1) в построении достаточно гладкого решения сингулярно возмущенного уравнения (СВУ) (1) для всех $x \in I$ и достаточно малых значений параметра $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1$;

2) в доказательстве того, что для построенного решения задачи (1) на некотором компакте отрезка I, не содержащем точек $x = 0$, $x = x_0$ и $x = a$, имеет место предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \to +0} W(x,\varepsilon) = \omega(x),$$

где $\omega(x)$ — решение векторного уравнения (4).

Задача Коши для системы СВУ (1) изучена в [1], а задача (1) в случае, когда $q+s = n$, $p = 1$, означает, что $\operatorname{Sp} A(x)$ состоит только из простых элементов, т. е. спектр матрицы $A(x)$ не имеет кратных элементов. Теории сингулярно возмущенных задач (СВЗ) с нестабильным спектром предельного оператора, в том числе и с точками поворота, в случае простых элементов спектра посвящены работы [1]–[5]. Случай кратных элементов спектра предельного оператора при исследовании неоднородных СВЗ со стабильным спектром изучался в [6]. Задача (1) с кратными элементами спектра матрицы $A(x)$, насколько автору известно, еще не изучалась. Фундаментальная система решений для уравнения (1) с кратными элементами спектра исследовалась в [7].

В данной работе будем предполагать, что кратным элементам $\lambda_p(x)$ и $\lambda_{q+s}(x)$ соответствуют простые элементарные делители, т. е. матрица $A(x)$ является матрицей простой структуры. Для исследования СВЗ (1) с кратными стабильными элементами спектра матрицы $A(x)$ будет применен метод, разработанный автором для простых элементов спектра (см. [1]–[5]). Широко практикуемый процесс диагонализации мы не применяем. Задача (1) содержит в себе как частные случаи двухточечную краевую задачу ($C = 0$) и задачу Коши ($C = D = 0$) при незначительном изменении условий (2), а полученные результаты содержат в себе как частные случаи результаты [8] и соответствуют классической теории интегрирования обыкновенных систем дифференциальных уравнений (см. главу XI монографии [9]).

Замечание. Задачу (1) можно было бы исследовать и при более общих условиях (3) (см. [3], с. 174-175). Однако основное внимание этой работы будет обращено на построение линейно независимых решений исследуемой задачи при наличии кратных элементов спектра матрицы $A(x)$.

1. Расширение возмущенной задачи

1.1. *Определение регуляризующих переменных.* Особая точка $\varepsilon = 0$ порождает в решении задачи (1) некоторые существенно особые многообразия (СОМ). Для их выделения, описания и сохранения как единых целых наряду с независимой переменной $x \in I$, используя спектр матрицы $A(x)$, введем в рассмотрение новую вектор-переменную $t = \{t_j\}$, $t_j = \Phi_j(x,\varepsilon)$, $j = \overline{p, q+s}$, компоненты которой имеют вид

$$
\begin{aligned}
t_j &= \varepsilon^{-2}\int_0^x \lambda_j(\tau)d\tau = \varepsilon^{-2}\varphi_j(x) = \Phi_j(x,\varepsilon), \quad j = \overline{p, q-2},\\
t_{q-1} &= \varepsilon^{-1}\left(-2\int_0^x \lambda_{q-1}(\tau)d\tau\right)^{1/2} = \varepsilon^{-1}\varphi_{q-1} = \Phi_{q-1}(x,\varepsilon),\\
t_q &= \varepsilon^{-1}\varphi_q(x) = \Phi_q(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{-1}\Big(-2\displaystyle\int_{x_0}^x \lambda_q(\tau)d\tau\Big)^{1/2} & \text{при } 0 \le x \le x_0;\\ -\varepsilon^{-1}\Big(-2\displaystyle\int_a^{x_0} \lambda_q(\tau)d\tau\Big)^{1/2} & \text{при } x_0 \le x \le a, \end{cases}\\
t_{q+1} &= \varepsilon^{-1}\left(-2\int_0^x \lambda_{q+1}(\tau)d\tau\right)^{1/2} = \varepsilon^{-1}\varphi_{q+1}(x) = \Phi_{q+1}(x,\varepsilon),\\
t_j &= \varepsilon^{-2}\int_a^x \lambda_j(\tau)d\tau = \varepsilon^{-2}\varphi_j(x) = \Phi_j(x,\varepsilon), \quad j = \overline{q+2, q+s}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Следовательно, используя спектр матрицы $A(x)$, мы однозначно описали все компоненты вектор-переменной t, которую будем называть регуляризующей вектор-переменной.

1.2. *Расширение возмущенной задачи.* С вводом в рассмотрение новой вектор-переменной t вместо вектор-функции $W(x,\varepsilon)$ будем изучать новую расширенную вектор-функцию $\widetilde{W}(x,t,\varepsilon)$, причем расширение проводим таким образом, чтобы имело место тождество

$$
\widetilde{W}(x,t,\varepsilon)\big|_{t=\phi(x,\varepsilon)} \equiv W(x,\varepsilon),
\tag{1.2}
$$

где $\Phi(x,\varepsilon) = \{\Phi_i(x,\varepsilon),\ \ i = \overline{p, q+s}\}$.

Дифференцируя тождество (1.2) и подставляя значение полной производной в задачу (1), для определения расширенной вектор-функции $\widetilde{W}(x,t,\varepsilon)$ получим следующую расширенную задачу:

$$\begin{gathered}\widetilde{L}_\varepsilon \widetilde{W}(x,t,\varepsilon)=h(x),\\ G\widetilde{W}\equiv B\widetilde{W}(M_0,\varepsilon)+C\widetilde{W}(M_{x_0},\varepsilon)+D\widetilde{W}(M_a,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\alpha+W^0.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\widetilde{L}_\varepsilon\equiv D_\lambda-A+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x},\\ D_\lambda=\sum_{i=p}^{q+s}\varepsilon^{2-p_i}\varphi_i'(x)\frac{\partial}{\partial t_i},\end{gathered} \tag{1.4}$$

где $p_i=2$, $i=\overline{p,q-2}\cup\overline{q+2,q+s}$, $p_i=1$, $i=\overline{q-1,q+1}$, $M_m=(m,\Phi(m,\varepsilon))$, $m\in\{0,x_0,a\}$.

Мы получили дифференциальное уравнение в частных производных с точечными краевыми условиями, чего в общем случае недостаточно для однозначной разрешимости этой задачи. Однако впоследствии будет показано, что расширенная задача (1.3) асимптотически корректна в описанном нами пространстве безрезонансных решений (ПБР).

2. Инвариантность пространств безрезонансных решений

2.1. *Пространства безрезонансных решений.* Поскольку матрица $A(x)$ является матрицей простой структуры, то

1) каждому простому элементу $\lambda_i(x)$, $i=\overline{p+1,q+s-1}$, спектра матрицы $A(x)$ соответствует один собственный вектор $b_i(x)$ для всех $x\in I$;
2) кратным собственным значениям $\lambda_p(x)$ и $\lambda_{q+s}(x)$ будут соответствовать собственные векторы $b_i(x)$, $i=\overline{1,p}$, и $b_i(x)$, $i=\overline{q+s,n}$;
3) система собственных векторов $\{b_i(x)\}$, $i=\overline{1,n}$, полная и линейно независимая для всех $x\in I$.

Построим систему собственных векторов $b_k^*(x)$ матрицы $A^*(x)$, сопряженной к матрице $A(x)$, таким образом, чтобы эта система вместе с векторами $b_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, образовала биортонормированную систему векторов, т. е. чтобы имели место равенства $(b_i(x),b_k^*(x))=\delta_{ik}$ (см. [11], с. 218).

Замечание. Случай, когда алгебраические кратности элементов $\lambda_p(x)$ и $\lambda_{q+s}(x)$ не совпадают с их геометрическими кратностями, требует дополнительных исследований.

Рассмотрим множества (подпространства) функций

$$\begin{aligned}&Y_{rij}=\{b_i(x)\alpha_{rij}(x)\exp\widetilde{t}_j\},\quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{p,q+s},\\ &V_{ril}=\{b_i(x)g_{ril}(x)\psi(t_{q+l-2})\},\quad l=\overline{1,3},\\ &X_{ri}=\{b_i(x)\omega_{ri}(x)\},\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\alpha_{rij}(x),g_{rip}(x),\omega_i(x)\in C^\infty[I]$. Для удобства использования знака суммы в формулах (2.1) введены обозначения $\widetilde{t}_j\equiv t_j$, $j=\overline{p,q-2}\cup\overline{q+2,q+s}$, $\widetilde{t}_j=-t_j^2/2$, $j=\overline{q-1,q+1}$. Существенно особые многообразия $\psi(t_{q+l-2})$, $l=1,2,3$, являются решениями задач

$$\psi'(t_j)+t_j\psi(t_j)=1,\quad \psi(0)=0,\quad j=\overline{q-1;q+1},$$

т. е.

$$\psi(t_j)=\exp\{-t_j^2/2\}\int_0^{t_j}\exp\frac{\tau^2}{2}d\tau. \tag{2.2}$$

Следовательно, СОМ (2.2) являются целыми функциями с асимптотическим свойством

$$\psi^{(k)}(t_j) \sim t_j^{k-1} \quad \text{при } t_j \to +\infty.$$

Из пространств (2.1) составим новое пространство

$$Y_r = \mathop{\oplus}_{i=1}^{n} Y_{ri} = \mathop{\oplus}_{i=1}^{n} \Big[\mathop{\oplus}_{j=p}^{q+s} Y_{rij} \mathop{\oplus}_{l=1}^{3} V_{ril} \oplus X_{ri} \Big]. \tag{2.3}$$

Элемент пространства безрезонансных решений (2.3) имеет вид

$$W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \Big\{ \sum_{j=p}^{q+s} \alpha_{rij}(x) \exp \widetilde{t}_j + \sum_{l=1}^{3} g_{ril}(x)\psi(t_{q+l-2}) + \omega_{ri}(x) \Big\} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \widetilde{W}_{ri}(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} W_{ri}(x,t). \tag{2.4}$$

2.2. *Инвариантность пространств безрезонансных решений.* Изучим действие расширенного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$ на элемент с ПБР (2.3), т. е. на $W_r(x,t) \in Y_r$. Сначала подействуем оператором $P_0 = D_\lambda - A(x)$ на элемент $W_r(x,t) \in Y_r$. В результате получим тождество

$$P_0 W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \Big\{ \sum_{j=p}^{q+s} \alpha_{rij}(x)[\lambda_j(x) - \lambda_i(x)] \exp \widetilde{t}_j + \sum_{l=1}^{3} [\lambda_{q+l-2}(x) - \lambda_i(x)] g_{ril}(x)\psi(t_{q+l-2}) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{l=1}^{3} \varphi'_{q+l-2}(x) g_{ril}(x) - \lambda_i(x)\omega_{ri}(x) \Big\}. \tag{2.5}$$

Далее изучим действие оператора $\partial/\partial x$ на элемент с ПБР (2.3). Имеем

$$\frac{\partial W_r(x,t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \Big\{ \sum_{j=p}^{q+s} \alpha'_{rij}(x) \exp \widetilde{t}_j + \sum_{l=1}^{3} g_{ril}(x)\psi(t_{q+l-2}) + \omega'_{ri}(x) \Big\} + \sum_{i=1}^{n} b'_i(x) W_{ri}(x,t).$$

Для того чтобы результат действия оператора $\partial/\partial x$ принадлежал ПБР (2.3), разложим векторы $b'_i(x)$ следующим образом:

$$b'_i(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} (b'_i(x), b^*_\nu(x)) \cdot b_\nu(x), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.6}$$

С учетом равенств (2.6) получим

$$\frac{\partial W_r(x,t)}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} b_i(x) \Big\{ \sum_{j=p}^{q+s} \Big[D_i \alpha_{rij}(x) + \sum_{\nu=1,\, \nu\neq i}^{n} (b'_\nu(x), b^*_i(x)) \alpha_{r\nu j}(x) \Big] \exp \widetilde{t}_j \Big\} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} b_i(x) \Big\{ \sum_{l=1}^{3} \Big[D_i g_{ril}(x) + \sum_{\nu=1,\, \nu\neq i}^{n} (b'_\nu(x), b^*_i(x)) \cdot g_{r\nu l}(x) \Big] \psi(t_{q+l-2}) + D_i \omega_{ri}(x) +$$

$$+ \sum_{\nu=1,\, \nu\neq i}^{n} (b'_\nu(x), b^*_i(x)) \cdot \omega_{r\nu}(x) \Big\} = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \cdot \Big\{ \sum_{j=p}^{q+s} \widetilde{\alpha}_{rij}(x) \exp \widetilde{t}_j + \sum_{l=1}^{3} \widetilde{g}_{ril}(x)\psi(t_{q+l-2}) + \widetilde{\omega}_{ri}(x) \Big\} \in Y_r, \tag{2.7}$$

где

$$d_i \equiv \frac{\partial}{\partial x} + (b'_i(x), b^*_i(x)), \quad i = \overline{1,n}.$$

Объединив полученные результаты (2.5) и (2.7), запишем результат действия расширенного оператора (см. (1.4)) на элемент пространства безрезонансных решений (2.3). Имеем

$$\widetilde{L}_\varepsilon W_r(x,t) \equiv (R_0 + \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2) W_r(x,t).$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
R_0W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\Big\{ &\sum_{j=p}^{q+s}[\lambda_j(x)-\lambda_i(x)]\alpha_{rij}(x)\cdot \exp\widetilde{t}_j + \\
&+\sum_{l=1}^{3}[\lambda_{q+l-2}(x)-\lambda_i(x)]\cdot g_{ril}(x)\cdot\psi(t_{q+l-2})-\lambda_i(x)\cdot\omega_{ri}(x)\Big\},
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

$$
R_1W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\sum_{l=1}^{3}\varphi'_{q+l-2}(x)\cdot g_{ril}(x), \tag{2.9}
$$

$$
R_2W_r(x,t) \equiv \frac{\partial W_r(x,t)}{\partial x}.
$$

Подведя итог, можно сделать следующие выводы.

1. Используя новую вектор-переменную $t=\{t_j\}$ (см. формулы (1.1)), мы описали и сохранили как единые целые все существенно особые многообразия $\exp\widetilde{t}_j$, $j=\overline{p,q+s}$, и $\psi(t_{q+l-2})$, $l=\overline{1,3}$, содержащиеся в решении расширенной задачи (1.3).

2. Используя спектр матрицы $A(x)$ и описанные СОМ, мы ввели в рассмотрение ПБР (2.3), которые являются инвариантными относительно операторов R_k, $k=0,1,2$, а следовательно, и относительно расширенного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$.

3. Оператор R_0 является главным оператором расширенного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$ в пространстве (2.3).

4. Из выводов 2 и 3 следует, что расширенная задача (1.3) регулярна относительно малого параметра $\varepsilon>0$ в ПБР (2.3).

Следовательно, нами проведена регуляризация сингулярно возмущенной задачи (1).

3. Теория разрешимости итерационных уравнений

3.1. *Формализм построения ряда решения расширенной задачи.* Вследствие того, что расширенная задача (1.3) регулярна по малому параметру $\varepsilon>0$ в ПБР (2.3), асимптотику решения этой задачи будем строить в виде ряда

$$
\widetilde{W}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=-1}^{+\infty}\varepsilon^r\cdot W_r(x,t), \quad W_r(x,t)\in Y_r. \tag{3.1}
$$

Для определения коэффициентов ряда (3.1) получим следующую рекуррентную систему задач:

$$
R_0W_{-1}(x,t)=0, \quad GW_{-1}=\alpha, \tag{3.2}
$$

$$
R_0W_0(x,t)=h(x)-R_1w_{-1}(x,t), \quad GW_0=W^0, \tag{3.3}
$$

$$
R_0W_r(x,t)=-R_1W_{r-1}(x,t)-R_2W_{r-2}(x,t), \quad GW_r=0. \tag{3.4}
$$

Нам необходимо показать, что серия рекуррентных задач (3.2)–(3.4) асимптотически корректна в ПБР (2.3).

3.2. *Теория разрешимости итерационных уравнений.* Рассмотрим уравнение

$$
R_0W_r(x,t)=h_r(x,t) \tag{3.5}
$$

и изучим вопрос о разрешимости этого уравнения в ПБР (2.3). Поскольку ПБР (2.3) инвариантны относительно оператора R_0, то с необходимостью должно выполняться условие $h_r(x,t)\in Y_r$.

Впоследствии нам необходимо будет иметь явное выражение правой части итерационного уравнения (3.5). Поэтому запишем

$$h_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\Big\{ \sum_{j=p}^{q+s} \beta_{rij}(x)\cdot \exp\widetilde{t}_j + \sum_{l=1}^{3} m_{ril}(x)\cdot\psi(t_{q+l-2}) + S_{ri}(x)\Big\} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} h_{ri}(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\cdot \widetilde{h}_{ri}(x,t), \quad (3.6)$$

где коэффициенты при базовых элементах являются известными, достаточно гладкими функциями при $x \in I$.

Используя тождество (2.8), легко записать структуру ядра оператора R_0. Имеем

$$\operatorname{Ker} R_0 = \{b_j(x)\exp\widetilde{t}_j,\ \ j=\overline{p+1,q+s-1},\ \ b_i(x)\exp t_p,\ \ i=\overline{1,p},$$
$$b_i(x)\exp t_{q+s},\ \ i=\overline{q+s,n},\ \ b_{q+l-2}(x)\psi(t_{q+l-2}),\ \ l=\overline{1,3}\}.$$

Будем предполагать, что правая часть итерационного уравнения (3.5) не содержит элементов ядра оператора R_0.

Замечание. Для исследования существования решения уравнения (3.5) в [1]–[3] была использована теория сопряженных пространств и операторов, т. е. изучен вопрос о нормальной разрешимости оператора R_0. В последующих работах автора (см. [4]–[5]) и в данной работе, использовано понятие приводимости линейного оператора R_0 над ПБР (2.3) (см. [10], с. 36).

Из тождества (2.8) видно, что оператор R_0 приводим над пространством Y_{ri}, $i=\overline{1,n}$. Это означает, что оператор R_0 полностью определяется своими частями $R_{0i}: Y_r \to Y_{ri}$, $i=\overline{1,n}$, т. е. оператор R_0 является прямой суммой операторов R_{0i}

$$R_0 \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} R_{0i}.$$

С учетом структуры функций (2.4) и тождества (2.8) векторное уравнение (3.5) можно записать следующим образом:

$$R_0 W_r(x,t) \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} R_{0i} \sum_{k=1}^{n} W_{rk}(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} R_{0i} W_{ri}(x,t) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) R_{0i}\widetilde{W}_{ri}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\widetilde{h}_i(x,t).$$

Система векторов $b_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, линейно независима. Следовательно, векторное уравнение (3.5) распадается на n скалярных уравнений

$$R_{0i}\widetilde{W}(x,t) = \widetilde{h}_i(x,t), \quad i=\overline{1,n}, \quad (3.7)$$

т. е. вместо векторного уравнения (3.5) будем исследовать n скалярных уравнений (3.7), каждое из которых уже задано в пространстве

$$\widetilde{Y}_{ri} = \bigoplus_{j=p}^{q+s} \widetilde{Y}_{rij} \bigoplus_{l=1}^{3} V_{ril} \oplus X_{ri}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Для каждого из уравнений (3.7) снова проделаем процедуру, аналогичную предыдущей. Зафиксируем $i=\overline{1,n}$. Тогда

1) оператор R_{0i} приводим над пространством Y_{ri};
2) подпространство Y_{ri} инвариантно относительно оператора R_{0i};
3) $\widetilde{h}_{ri}(x,t) \in \widetilde{Y}_{ri}$;
4) каждое из подпространств $(q+s-p+4)$-мерного пространства является одномерным;

5) базис подпространства Y_{ri} есть множество функций

$$B(\widetilde{Y}_{ri}) = \{\exp \widetilde{t}_j, \;\; j = \overline{p, q+s}; \;\; \psi(t_{q+s-2}), \;\; l = \overline{1,3}\}.$$

Таким образом, приравняв коэффициенты при одинаковых базисных элементах в уравнении (3.7), однозначно определим все коэффициенты решения $W_r(x,t)$, кроме коэффициентов, находящихся в виде множителей при элементах ядра оператора R_0. Имеем

$$\alpha_{rij}(x) = [\lambda_j(x) - \lambda_i(x)]^{-1} \cdot \beta_{rij}(x), \quad i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{p, q+s}, \;\; i \neq j, \tag{3.8}$$

$$g_{ril}(x) = [\lambda_{q+l-2}(x) - \lambda_i(x)]^{-1} \cdot m_{ril}(x), \quad i = \overline{1,n}, \;\; l = \overline{1,3}, \;\; i \neq q+l-2, \tag{3.9}$$

$$\omega_{ri}(x) = \lambda_i^{-1}(x) \cdot S_{ri}(x), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.10}$$

Замечание. Для того чтобы коэффициенты $\omega_{ri}(x)$ были достаточно гладкими функциями при $x \in I$, необходимо предположить, что имеют место точечные условия

$$S_{r(q+l-2)}(x_l) = 0, \quad l = \overline{1,3}, \tag{3.11}$$

где $x_1 = 0$, $x_2 = x_0$, $x_3 = a$.

Таким образом, сформулируем в виде теоремы полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть*: 1) *правая часть уравнения* (3.5) *принадлежит пространству* (2.5) *и представима в виде равенства* (3.6);

2) $h_r(x,t)$ *не содержит элементов ядра оператора* R_0;

3) *имеют место точечные условия* (3.11).

Тогда в пространстве Y_r существует решение векторного уравнения (3.5), *представимое в виде*

$$W_r(x,t) = Z_r(x,t) + y_r(x,t), \tag{3.12}$$

где

$$Z_r(x,t) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \alpha_{rip}(x) \exp t_p + \sum_{i=p+1}^{q+s-1} b_i(x) \alpha_{rii}(x) \exp \widetilde{t}_i +$$
$$+ \sum_{i=q+s}^{n} b_i(x) \alpha_{ri(q+s)}(x) \exp t_{q+s} + \sum_{l=1}^{3} b_{q+s-2}(x) g_{r(q+s-2)l}(x) \psi(t_{q+s-2}), \tag{3.13}$$

коэффициенты при базовых элементах являются произвольными, достаточно гладкими функциями при $x \in I$,

$$y_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \Big\{ \sum_{j=p,\, j\neq i}^{q+s} \alpha_{rij}(x) \exp \widetilde{t}_j + \sum_{l=1,\, i\neq q+s-2}^{3} g_{ril}(x) \psi(t_{q+s-2}) + \omega_{ri}(x) \Big\}, \tag{3.14}$$

а коэффициенты в решении (3.14) *суть однозначно определенные функции согласно формулам* (3.8)–(3.10).

4. Построение главного члена асимптотики решения расширенной задачи

Приступим к последовательному решению серии итерационных задач (3.2)–(3.4). Решением однородного уравнения (3.2) в пространстве Y_{-1} будет функция $W_{-1}(x,t) = Z_{-1}(x,t)$, определенная формулой (3.13) при $r = -1$.

Перед тем, как приступить к решению следующего уравнения (3.3), сначала вычислим его правую часть. Учитывая тождество (2.9), имеем

$$H_0(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) h_i(x) - \sum_{l=1}^{3} b_{q+l-2}(x) \varphi'_{q+l-2}(x) g_{(-1)(q+l-2)}(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} S_{0i}(x). \tag{4.1}$$

Для правой части уравнения (3.3) имеют место условия 1) и 2) теоремы 1. Для того чтобы имело место условие 3) этой теоремы, используем произвольность коэффициентов, содержащихся в равенстве (4.1). Зададим точечные условия

$$g_{(-1)(q+l-2)}(x_l) = [\varphi'_{q+l-2}(x_l)]^{-1} h_{q+l-2}(x_l) = [\varphi'_{q+l-2}(x_l)]^{-1}(h(x_l), b^*_{q+l-2}(x_l)), \tag{4.2}$$

где $x_l \in \{0, x_0, a\}$. При выполнении условий (4.2) в пространстве Y_0 существует решение уравнения (3.3), представимое в виде (3.12) при $r = 0$, в котором

$$y_0(x,t) \equiv \omega_0(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \cdot \lambda_i^{-1}(x) \cdot S_{0i}(x).$$

На следующем этапе для того, чтобы к построению решения уравнения (3.4) при $r = 1$ можно было бы применить теорему 1, получим следующие дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений ($r = -1$):

$$\begin{aligned} &\alpha'_{rm}(x) + B_m \cdot \alpha_{rm}(x) = 0, \quad m \in \{p, q+s\}, \\ &D_i \alpha_{rii}(x) = 0, \quad D_i g_{ri}(x) = 0, \quad i = \overline{p+1, q+s}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

а также и начальные условия

$$g_{0(q+l-2)}(x_l) = 0, \quad l = \overline{1,3}. \tag{4.4}$$

Здесь $(\widetilde{b}_{ij}(x) = (b'_i(x), b^*_j(x))$, $B_p(x) = ((\widetilde{b}_{ij}(x)))^p_{i,j=1}$, $b_{q+s}(x) = ((\widetilde{b}(x)))^n_{i,j=q+s}$ — квадратные матрицы соответствующих порядков, а $\alpha_{r\,p} = (\alpha_{r\,1\,p}, \ldots, \alpha_{r\,p\,p})$, $\alpha_{r\,(q+s)} = (\alpha_{r\,(q+s)\,(q+s)}, \ldots, \alpha_{r\,n\,(q+s)})$ — векторы соответствующих размерностей.

Таким образом, для определения элементов $\alpha_{rii}(x)$, $i = \overline{p+1; q+s-1}$, по аналогии с предыдущим (см. [3]), мы получили скалярные дифференциальные уравнения, а для определения компонент векторов α_{rp} и $\alpha_{r(q+s)}$ получили линейные системы дифференциальных уравнений порядков, соответствующих кратностям элементов $\lambda_p(x)$ и $\lambda_{q+s}(x)$.

Следовательно, при выполнении условий (4.3) и (4.4)

1) однозначно определены функции $g_{(-1)(q+l-2)}(x)$, $l = \overline{1,3}$;
2) функции $\alpha_{(-1)ii}(x)$, $i = \overline{1,n}$, определены с точностью до произвольных постоянных множителей $\alpha^0_{(-1)ii}$;
3) в пространстве Y_1 существует решение уравнения (3.4) при $r = 1$, представимое по формуле (3.12) при $r = 1$.

Проделав еще один итерационный цикл,

1) однозначно определим функции $g_{0(q+l-2)}(x) \equiv 0$, $l = \overline{1,3}$;
2) функции $\alpha_{0ii}(x)$, $i = \overline{1,n}$, определим с точностью до произвольных постоянных множителей α^0_{0ii} как решения однородных уравнений (4.3) при $r = 0$;
3) согласно теореме 1, обеспечим существование решения уравнения (3.4) при $r = 2$ в пространстве Y_2.

Таким образом, решая постепенно итерационные уравнения (3.2)–(3-4) при $r = 1, 2$, мы определили функцию

$$\widetilde{W}_0(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-1} W_{-1}(x,t) + W_0(x,t) \equiv \varepsilon^{-1} Z_{-1}(x,t) + Z_0(x,t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \omega_{0i}(x).$$

5. Однозначная разрешимость итерационных задач

Решение уравнения (3.2) содержит n произвольных постоянных $\alpha^0_{(-1)ii}$, $i=\overline{1,n}$. Для определения этих постоянных подставим краевые условия (3.2) в построенное решение $W_{-1}(x,t)$ (см. (3.12) при $r=-1$). В результате подстановки получим систему n алгебраических уравнений вида ($r=-1$)

$$\Delta(\varepsilon)C_r=\Gamma_r, \tag{5.1}$$

где $C_r=(C_{r1},\dots,C_{rn})$ — неизвестный вектор, а

$$\Gamma_{-1}=(\alpha_1,\dots,\alpha_{q-1}-\Gamma_{(-1)(q-1)};\ \alpha_q-\Gamma_{(-1)q};\ \alpha_{q+1}-\Gamma_{(-1)(q+1)};\ 0;\dots;0)$$

— заданный вектор.

Определитель матрицы $\Delta(\varepsilon)$ можно записать в виде блочного определителя

$$|\Delta(\varepsilon)|=\begin{vmatrix} & \Delta_{11} & & \Delta_{1s} & \\ a_{1q} & \dots & b_{qq}(x_0) & \dots & a_{nq} \\ & \Delta_{s1} & & \Delta_{ss} & \end{vmatrix},$$

где все члены определителей $|\Delta_{s1}|$ и $|\Delta_{1s}|$ являются достаточно малыми числами при $\varepsilon\to+0$, а

$$\Delta_{11}=\|b_{ik}(0)\|,\quad i,k=\overline{1;q-1};\qquad \Delta_{ss}=\|b_{ik}(a)\|,\quad i,k=\overline{q+1;n}.$$

Пусть

$$\det\Delta_{11}\neq 0,\qquad \det\Delta_{ss}\neq 0,\qquad b_{qq}(x_0)\neq 0.$$

Тогда при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon>0$ определитель матрицы $\Delta(\varepsilon)$ тоже не равен нулю, причем имеет место асимптотическое равенство

$$\det\Delta(\varepsilon)=b_{qq}(x_0)\det\Delta_{11}\det\Delta_{ss}+O(\varepsilon).$$

Следовательно, из системы (5.1) однозначно определим вектор C_{-1}, т. е. нами будет однозначно определено решение задачи (3.2).

Замечание. Благодаря убывающим экспонентам, для достаточно малых значений параметра $\varepsilon>0$ построенное решение $\varepsilon^{-1}W_{-1}(x,t)$ все же остается ограниченным на любом компакте отрезка $[0,a]$, не содержащем точек $x=0$, $x=x_0$ и $x=a$. Часто на практике ограничиваются только главным членом асимптотики решения. Поэтому полезно бы получить главный член асимптотики решения исследуемой задачи в наиболее простом виде, что нами и будет сделано.

Исходя из структуры известного вектора Γ_{-1}, зададим начальный вектор α следующим образом:

$$\alpha=B\cdot y^*_{-1}(M_0)+C\cdot y^*_{-1}(M_{x_0})+D\cdot y^*_{-1}(M_a), \tag{5.2}$$

где

$$y^*_{-1}(x)\equiv\sum_{l=1}^{3}b_{q+l-2}(x)\cdot\varphi'_{q+l-2}(x)\cdot g_{(-1)(q+l-2)}(x). \tag{5.3}$$

При задании начального вектора α в виде (5.2)–(5.3), система (5.1) при $r=-1$ превращается в однородную систему, т. е. $C_{-1}=0$. Следовательно, решением первой итерационной задачи (3.2) будет функция

$$y_{-1}(x,t)\equiv\sum_{l=1}^{3}b_{q+l-2}(x)\cdot g_{(-1)(q+l-2)}(x)\cdot\psi(t_{q+l-2}).$$

Для однозначного определения решения уравнения (3.3) подставим краевые условия (3.3) в функцию (3.12) при $r=0$. Для определения неизвестного вектора C_0 получим систему (5.1) при

$r = 0$. Определив из полученной системы однозначно вектор C_0, получим однозначно определенное решение итерационной задачи (3.3).

Продолжая далее решать итерационные задачи (3.4) при $r > 2$, методом математической индукции можно показать, что серия задач (3.2)–(3.4) асимптотически корректна в пространствах безрезонансных решений Y_r, $r \geq -1$.

6. Оценка остаточного члена асимптотического ряда решения

Запишем решение расширенной задачи (1.3) в виде

$$W(x,t,\varepsilon) \equiv W_m(x,t,\varepsilon) + \xi_{m+1}(x,t,\varepsilon), \tag{6.1}$$

где $W_m(x,t,\varepsilon) \equiv \sum\limits_{r=-1}^{m} \varepsilon^r \cdot W_r(x,t)$ — частичная m-сумма ряда (3.1), а $\xi_{m+1}(x,t,\varepsilon)$ — остаточный член этого ряда.

Проведем сужение в тождестве (6.1) при $t = \Phi(x,\varepsilon)$. Получим

$$W(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) \equiv W_m(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) + \xi_{m+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon).$$

Используя методику работ [4]–[5], можно показать, что имеет место следующая оценка остаточного члена асимптотики решения:

$$|||\xi_{m+1}(x,\Phi(x,\varepsilon))||| < K\varepsilon^{m+1}, \tag{6.2}$$

где константа K не зависит от переменной $x \in I$ и малого параметра $\varepsilon > 0$.

Сформулируем в виде общей теоремы результаты, полученные в этой работе.

Теорема 2. *Пусть для задачи* (1) *имеют место условия* 1° *и* 2°. *Тогда при достаточно малых значениях параметра* $\varepsilon > 0$

1) *введением новой вектор-переменной* t *по формулам* (1.1), *СВЗ* (1) *по определенному закону поставлена в соответствие расширенная задача* (1.3)*;*
2) *в пространстве безрезонансных решений* (2.3) *расширенная задача* (1.3) *регулярна относительно малого параметра* $\varepsilon > 0$;
3) *решение расширенной задачи* (1.3) *представимо в виде асимптотического ряда* (3.1), *коэффициенты которого принадлежат ПБР* (2.3);
4) *сужение асимптотического ряда* (3.1) *при* $t = \Phi(x,\varepsilon)$ *есть асимптотический ряд решения СВЗ* (1);
5) *остаточный член асимптотического ряда решения СВЗ* (1) *имеет оценку, представленную соотношением* (6.2);
6) *на любом компакте отрезка* $[0,a]$, *не содержащем точек* $x = 0$, $x = x_0$ *и* $x = a$, *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} W(x,\varepsilon) = \omega(x),$$

где $\omega(x)$ *— решение вырожденного векторного уравнения* (3).

Литература

1. Бобочко В.Н. *Сингулярно возмущенная задача Коши с нестабильным спектром* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 9. – С. 56–58.
2. Бобочко В.Н. *Задача Валле-Пуссена для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с нестабильным спектром* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 6. – С. 15–24.
3. Бобочко В.М., Маркуш І.І. *Асимптотичне інтегрування диференціальних рівнянь із нестабільним спектром граничного оператора.* – Київ.: ІСДО, 1993. – 214 с.
4. Бобочко В.Н. *Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 9. – С. 1505–1515.

5. Бобочко В.М. *Точка звороту в системі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором* // УМЖ. – 1996. – Т. 48. – № 2. – С. 147–160.
6. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В. П. *Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений*: Учеб. пособие. – Киев: Вища школа, 1989. – 288 с.
7. Территин Х.Л. *Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр* // Математика. – 1957. – Т. 1. – № 2. – С. 29–59.
8. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
9. Матвеев Н.М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.* – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
10. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.
11. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1952. – 492 с.

Кировоградский государственный педагогический университет (Украина)

Поступила 03.04.1996