*Известия вузов. Математика* *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
*2010, №10, с. 87–91* *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0098*

*Н.С. РОЗИНОВА*

# УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ РАЗНОСТИ ДВУХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

*Аннотация.* Рассматривается задача оптимизации на выпуклом множестве квадратичной функции, представленной как разность двух выпуклых функций. С помощью редукции к эквивалентной задаче вогнутого программирования доказано достаточное условие оптимальности в форме неравенства для производной целевой функции по направлениям в допустимых точках соответствующей поверхности уровня.

*Ключевые слова*: задача d. c.-максимизации, необходимые и достаточные условия оптимальности.

*УДК*: 517.977

*Abstract.* We consider a quadratic d. c. optimization problem on a convex set. The objective function is represented as the difference of two convex functions. By reducing the problem to the equivalent concave programming problem we prove a sufficient optimality condition in the form of an inequality for the directional derivative of the objective function at admissible points of the corresponding level surface

*Keywords*: d. c.-maximization problem, necessary and sufficient optimality conditions.

## 1. Введение

Задачи d. c.-оптимизации (d. c. — разность двух выпуклых функций) имеют достаточно высокий уровень общности и образуют своеобразный класс невыпуклых структур [1]–[3]. Первая ступень исследования таких задач связана с выводом условий оптимальности, учитывающих специфику постановки и выделяющих множество экстремальных точек. Интересно отметить, что полученные в этой области результаты являются не только необходимыми, но и достаточными условиями глобальной оптимальности, что ранее было характерно только для выпуклых задач.

В данной работе рассматривается задача максимизации квадратичной d. c.-функции на выпуклом компакте. Показывается, что стандартное условие оптимальности (полная линеаризация целевой функции) эквивалентно условию с частичной линеаризацией по первой из составляющих функций. Представлены две процедуры поиска экстремальных точек задачи.

---

Поступила 18.03.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований №08-01-00709а.

Расширение локального условия на все точки глобального максимума приводит к достаточному условию оптимальности, которое доказывается через редукцию к эквивалентной задаче выпуклой максимизации. В отличие от результата из [3] полученное условие не содержит параметра и формулируется в виде неравенства для производной целевой функции по направлениям в допустимых точках поверхности уровня.

## 2. Необходимое условие оптимальности

Пусть $D \subset R^n$ — выпуклое, компактное множество, $\operatorname{int} D \neq \emptyset$. Введем d. c.-функцию

$$\phi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x), \quad x \in D,$$

с квадратичными, сильно выпуклыми образующими функциями

$$\phi_i(x) = 1/2\langle x - a^i, C_i(x - a^i)\rangle, \quad a^i \in R^n, \quad C_i \in R^{n\times n}, \quad i = 1, 2,$$

где $C_i$ — симметричная, положительно определенная матрица ($C_i > 0$). Обозначим $C = C_1 - C_2$. Это матрица вторых частных производных функции $\phi(x)$.

Будем рассматривать задачу d. c.-оптимизации, а именно, задачу (P):

$$\phi(x) \to \max, \quad x \in D.$$

Выделим крайние случаи

1) $C < 0 \Rightarrow$ (P) — задача выпуклого программирования;

2) $C > 0 \Rightarrow$ (P) — задача вогнутого программирования.

Возьмем за основу промежуточную ситуацию, характерную собственно для d. c.-задач. Предположим, что матрица $C$ является неопределенной, т. е. квадратичная форма $\langle x, Cx\rangle$ принимает на сфере $\langle x, x\rangle = 1$ как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть $y \in D$ — точка локального максимума в задаче (P). Допустим, что $y \in \operatorname{int} D$. Тогда $\nabla\phi(y) = 0$. Поскольку $\nabla^2\phi(y) = C$ — неопределенная матрица, то необходимое условие второго порядка не выполняется, т. е. включение $y \in \operatorname{int} D$ невозможно. Это значит, что всякая точка локального максимума в задаче (P) является граничной точкой допустимого множества $D$.

Сформулируем необходимое условие локального максимума в задаче (P) для точки $y \in D$:

$$\langle \nabla\phi(y), x - y\rangle \leq 0 \quad \forall x \in D. \tag{1}$$

С учетом характера целевой функции представим неравенство (1) в другой форме.

**Лемма.** *Условие* (1) *с* $y \in D$ *эквивалентно неравенству*

$$\langle \nabla\phi_1(y), x - y\rangle \leq \phi_2(x) - \phi_2(y) \quad \forall x \in D. \tag{2}$$

*Доказательство* проводится с учетом выпуклости функции $\phi_2(\cdot)$.

Таким образом, в задаче (P) действуют два варианта необходимого условия локального максимума: условие (1) с полной линеаризацией целевой функции и условие (2) с частичной линеаризацией. Введем соответствующие им задачи выпуклого программирования, а именно, задачу ($P_1$):

$$\langle \nabla\phi(y), x\rangle \to \max, \quad x \in D;$$

и задачу ($P_2$):

$$\langle \nabla\phi_1(y), x\rangle - \phi_2(x) \to \max, \quad x \in D.$$

Пусть $D_1(y) = \mathrm{Argmax}(P_1)$ — множество решений задачи (P$_1$), $x(y)$ — единственное решение задачи (P$_2$). Тогда условия (1), (2) представляются в форме экстремальных соотношений $y \in D_1(y)$ и $y = x(y)$, которые в силу утверждения леммы эквивалентны. Разница между условиями связана с потенциалом улучшения в случае их нарушения.

Пусть условие (1) не выполняется, т. е. $y \notin D_1(y)$. Выделим произвольную точку $\overline{y} \in D_1(y)$. Тогда справедливо неравенство $\langle \nabla\phi(y), \overline{y} - y\rangle > 0$, которое в совокупности с выпуклостью $D$ означает, что вектор $(\overline{y} - y)$ есть допустимое направление локального подъема функции $\phi(\cdot)$ в точке $y$ на множестве $D$: для малых $\alpha \in (0,1]$ $\;y^\alpha \in D$, $\phi(y^\alpha) > \phi(y)$, где $y^\alpha = y + \alpha(\overline{y} - y)$.

Пусть не выполнено условие (2), т. е. $y \neq x(y)$. Тогда с учетом выпуклости функции $\phi_1(\cdot)$ и единственности точки $x(y)$ получаем

$$\phi(x(y)) - \phi(y) \geq \langle \nabla\phi_1(y), x(y) - y\rangle - (\phi_2(x(y)) - \phi_2(y)) > 0. \tag{3}$$

Таким образом, в данном случае имеет место нелокальное улучшение точки $y$ в задаче (P): $\phi(x(y)) > \phi(y)$.

Введем множество точек, которые удовлетворяют необходимому условию локального максимума в задаче (P) (экстремальные точки):

$$\mathrm{Ext}(P) = \{y \in D : y = x(y)\}.$$

Для поиска экстремальных точек представим два итерационных метода на основе вспомогательных задач $(P_1)$ и $(P_2)$.

1. Метод условного градиента с выбором шага по правилу скорейшего подъема [4].

Итерация:

$$\begin{gathered}
k = 0, 1, \ldots, \quad y^k \in D, \quad \overline{y}^k \in D_1(y^k) \ \text{ — решение задачи } (P_1) \text{ для } y = y^k,\\
\delta_k = \langle \nabla\phi(y^k), \overline{y}^k - y^k\rangle \ \text{ — невязка экстремальности,}\\
\delta_k = 0 \Rightarrow y^k \in \mathrm{Ext}(P),\\
\delta_k > 0 \Rightarrow y^{k+1} = y^k + \alpha_k(\overline{y}^k - y^k),\\
\alpha_k = \mathrm{argmax}\{\phi(y^k + \alpha(\overline{y}^k - y^k)), \quad \alpha \in [0,1]\},\\
\text{если } \beta_k = \langle \overline{y}^k - y^k, C(\overline{y}^k - y^k)\rangle \geq 0, \text{ то } \alpha_k = 1,\\
\text{в противном случае } \ \alpha_k = \min\left\{\frac{\delta_k}{|\beta_k|}, 1\right\}.
\end{gathered}$$

Монотонность: $\phi(y^{k+1}) > \phi(y^k)$.

Сходимость: $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$.

2. Метод нелокального улучшения (вспомогательная задача (P$_2$)). Итерация:

$$y^0 \in D, \quad y^{k+1} = x(y^k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Обозначим величину приращения целевой функции $\Delta_k = \phi(y^{k+1}) - \phi(y^k)$. С учетом оценки (3) для $y = y^k$ получаем

$$\Delta_k \geq 0, \quad \Delta_k = 0 \Leftrightarrow y^k = x(y^k) \Leftrightarrow y^k \in \mathrm{Ext}(P).$$

Следовательно, $\Delta_k$ — невязка экстремальности для точки $y^k$. В силу монотонности и ограниченности последовательности $\{\phi(y^k)\}$ имеем свойство сходимости: $\Delta_k \to 0$, $k \to \infty$.

## 3. Достаточное условие оптимальности

Сформулируем достаточное условие оптимальности в задаче (P) на основе (1).

Пусть $\mathrm{Argmax}(P)$ — множество точек глобального максимума в задаче (P). Для точки $z \in D$ введем множество $L(z) = \{x : \phi(x) = \phi(z)\}$ (поверхность уровня функции $\phi(\cdot)$ в точке $z$).

**Теорема.** *Пусть* $z \in D$, $\phi(z) > \min\{\phi(x), x \in D\}$. *Если*

$$\langle \nabla\phi(y), x - y\rangle \le 0 \quad \forall x \in D, \quad y \in D \cap L(z), \tag{4}$$

*то* $z \in \mathrm{Argmax}(P)$.

Приведем схему доказательства. Пусть $b = \max\{\phi_2(x), x \in D\}$. Тогда $\phi_2(x) \in [0, b]$ $\forall x \in D$. Представим задачу (P) в эквивалентной форме в пространстве $R^{n+1}$, а именно, в виде задачи ($\mathrm{P}_{n+1}$):

$$\phi_1(x) - x_{n+1} \to \max, \quad x \in D, \quad x_{n+1} \in [0, b], \quad \phi_2(x) \le x_{n+1}.$$

Это задача на максимум выпуклой функции в пределах выпуклого компактного множества.

Запишем [3] достаточное условие оптимальности для точки $(z, \phi_2(z))$ в задаче ($\mathrm{P}_{n+1}$):

$$\langle \nabla\phi_1(y), x - y\rangle - (x_{n+1} - y_{n+1}) \le 0 \tag{5}$$

$$\forall x \in D, \quad x_{n+1} \in [0, b], \quad \phi_2(x) \le x_{n+1},$$

$$\forall y \in D, \quad y_{n+1} \in [0, b], \quad \phi_2(y) \le y_{n+1}, \quad \phi_1(y) - y_{n+1} = \phi_1(z) - \phi_2(z).$$

Неравенство (5) можно переписать в виде (полагаем $x_{n+1} = \phi_2(x)$)

$$\langle \nabla\phi_1(y), x - y\rangle - \phi_2(x) + y_{n+1} \le 0 \tag{6}$$

$$\forall x \in D, \quad y \in D, \quad y_{n+1} \in [0, b], \quad \phi_2(y) \le y_{n+1}, \tag{7}$$

$$\phi_1(y) - y_{n+1} = \phi(z). \tag{8}$$

Далее положим в (6) $x = y$. Тогда $\phi_2(y) \ge y_{n+1}$. Сравнивая с (7), получаем $y_{n+1} = \phi_2(y)$. Соотношения (6)–(8) принимают вид

$$\langle \nabla\phi_1(y), x - y\rangle - (\phi_2(x) - \phi_2(y)) \le 0 \quad \forall x \in D, \quad y \in D, \quad \phi(y) = \phi(z). \tag{9}$$

Остается применить утверждение леммы. Условие (9) эквивалентно (4).

**Замечание.** Очевидно, неравенство (4) является необходимым условием глобального максимума для точки $z \in D$ в задаче (P) (расширение условия (1) на все точки $y \in \mathrm{Argmax}(P)$). Тем же свойством обладает неравенство (9).

Обратим внимание на соотношения (6)–(8) с позиций улучшения точки $z \in D$. Предварительно представим неравенство (6) в эквивалентной форме

$$g(y, y_{n+1}) = \langle \nabla\phi_1(y), x(y) - y\rangle - \phi_2(x(y)) + y_{n+1} \le 0, \tag{10}$$

где $x(y)$ — решение задачи ($\mathrm{P}_2$).

Зафиксируем параметр $y_{n+1} \in [0, b]$ (например, $y_{n+1} = \phi_2(z)$). Допустим, что найдена точка $y$ на поверхности уровня (8) функции $\phi_1(\cdot)$, для которой неравенство (10) не выполняется, т. е. $g(y, y_{n+1}) > 0$. В силу выпуклости функции $\phi_1(\cdot)$

$$\phi_1(x(y)) \ge \phi_1(y) + \langle \nabla\phi_1(y), x(y) - y\rangle.$$

Поскольку $y_{n+1} = \phi_1(y) - \phi(z)$, то $\phi_1(x(y)) - \phi_2(x(y)) - \phi(z) \ge g(y, y_{n+1})$, т. е. имеет место свойство улучшения $\phi(x(y)) > \phi(z)$.

## Литература


[1] Tuy H. *D. C. optimization: Theory, methods and algorithms*, Handbook of global optimization, Ed. by Horst R., Pardalos P.M. (Kluwer Academic Publishers, 1995), V. 2, P. 149–216.
[2] Hiriart-Urruty J.B. *Conditions for global optimality*, Handbook of global optimization, Ed. by Horst R., Pardalos P.M. (Kluwer Academic Publishers, 1995), V. 2, P. 1–26.
[3] Стрекаловский А.С. *Элементы невыпуклой оптимизации* (Новосибирск: Наука, 2003).
[4] Васильев Ф.П. *Методы оптимизации* (Факториал Пресс, М., 2002).



*Н.С. Розинова*

*младший научный сотрудник НИЧ,*
*Иркутский государственный университет,*
*ул. К. Маркса, д. 1, г. Иркутск, 664003,*

`e-mail:` etayne@gmail.com

*N.S. Rozinova*

*Junior Researcher, RD Department,*
*Irkutsk State University,*
*1 K. Marks str., Irkutsk, 664003 Russia,*

`e-mail:` etayne@gmail.com