МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Специальность (направление): 010800.68 – Механика и математическое моделирование
Специализация: механика жидкости, газа и плазмы

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Магистерская диссертация)

НЕСИММЕТРИЧНОЕ НАТЕКАНИЕ СТРУИ ЖИДКОСТИ НА ПЛАСТИНКУ

Работа завершена:

"___" _____ 201_ г. _____ (А.З. Сулейманов)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
д.ф.-м.н. аэрогидромеханики
"___" _____ 201_ г. _____ (Д.В. Маклаков)

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. аэрогидромеханики
"___" _____ 201_ г. _____ (А.Г. Егоров)

Казань – 2014

Содержание

1. Введение…….3
2. Постановка задачи…….4
3. Применение интегральных соотношений для вычисления силы и момента……..5
4. Параметризация с помощью полукруга……..…9
5. Вычисление физических параметров δ, δ_1,δ_2, α_1, α_2 через математичес - кие параметры a, c и k ...……..……...…11
6. Построение конформного отображения z(t)…….13
7. Вывод системы уравнений для определения математических параметров a , c , k……...…14
8. Вычисление коэффициента нормального давления на пластинку и коэффициента момента……...…15
9. Код программы на Математика 8……..…17
10. Результаты расчетов……....26
11. Заключение……..38
12. Список используемой литературы……...…39

Введение

Теория струй является одним из наиболее развитых разделов гидромеханики. Первые задачи по теории струй были поставлены и решены Г. Гельмгольцем (1868) и Г. Кирхгофом (1868). Существенный вклад в эту теорию был внесен Н. Е. Жуковским (1890) и С. А. Чаплыгиным. Современное состояние теории струй описано в книжках [1]-[2]. С. А. Чаплыгин поражал современников искусством находить решения сложных задач теории струй в уме. При этом он использовал так называемый метод особых точек. С. А. Чаплыгин нигде не формулировал этот метод в качестве принадлежащего ему метода, как бы считал этот метод само собой разумеющимся. Метод С. А. Чаплыгина позволяет получить решение многих задач теории струй в достаточно простой аналитической форме. К числу таких задач относится и задача о натекании струи жидкости конечной ширины на пластинку. Постановку этой задачи можно найти во многих монографиях по теории струй [3]-[5]. Однако следует отметить удивительный факт: числовых расчетов по данной задаче в случае несимметричного натекания струи проведено не было. Либо рассматривали симметричный случай натекания струи на пластинку, перпендикулярную потоку, либо выведены лишь общие формулы без числовых примеров [4]. Целью данной работы работы является восполнение этого пробела.

Постановка задачи

Плоская горизонтальная струя ширины δ натекает на пластинку DF, расположенную под углом атаки α (рис.1). Начало координат помещено в точку F. В точке E поток разделяется, и струя делится на две струйки – верхнюю, ширины δ_1, и нижнюю, ширины δ_2. Оси верхней и нижней струй наклонены под углами α_1 и α_2, соответственно, к горизонтальному направлению. Начало координат помещено в точку F. Через A, B и C обозначены бесконечно удаленные точки потока. Через h обозначено расстояние от оси струи до точки F. Это расстояние мы считали положительным, если точка F находится выше оси струи. Обозначим через l длину пластинки FD, через V_0 и P_0 – постоянные скорость и давление на границах струй. Заданными параметрами в этой задаче являются V_0, l, δ, h и α. Безразмерными заданными геометрическими параметрами будут α и $\bar{\delta} = \frac{\delta}{l}$, $\bar{h} = \frac{h}{l}$. Необходимо определить силу воздействия струи на пластинку и момент этой силы относительно точки F, толщины струй δ_1 и δ_2, углы наклона осей струй α_1 и α_2.

Применение интегральных соотношений для вычисления силы и момента

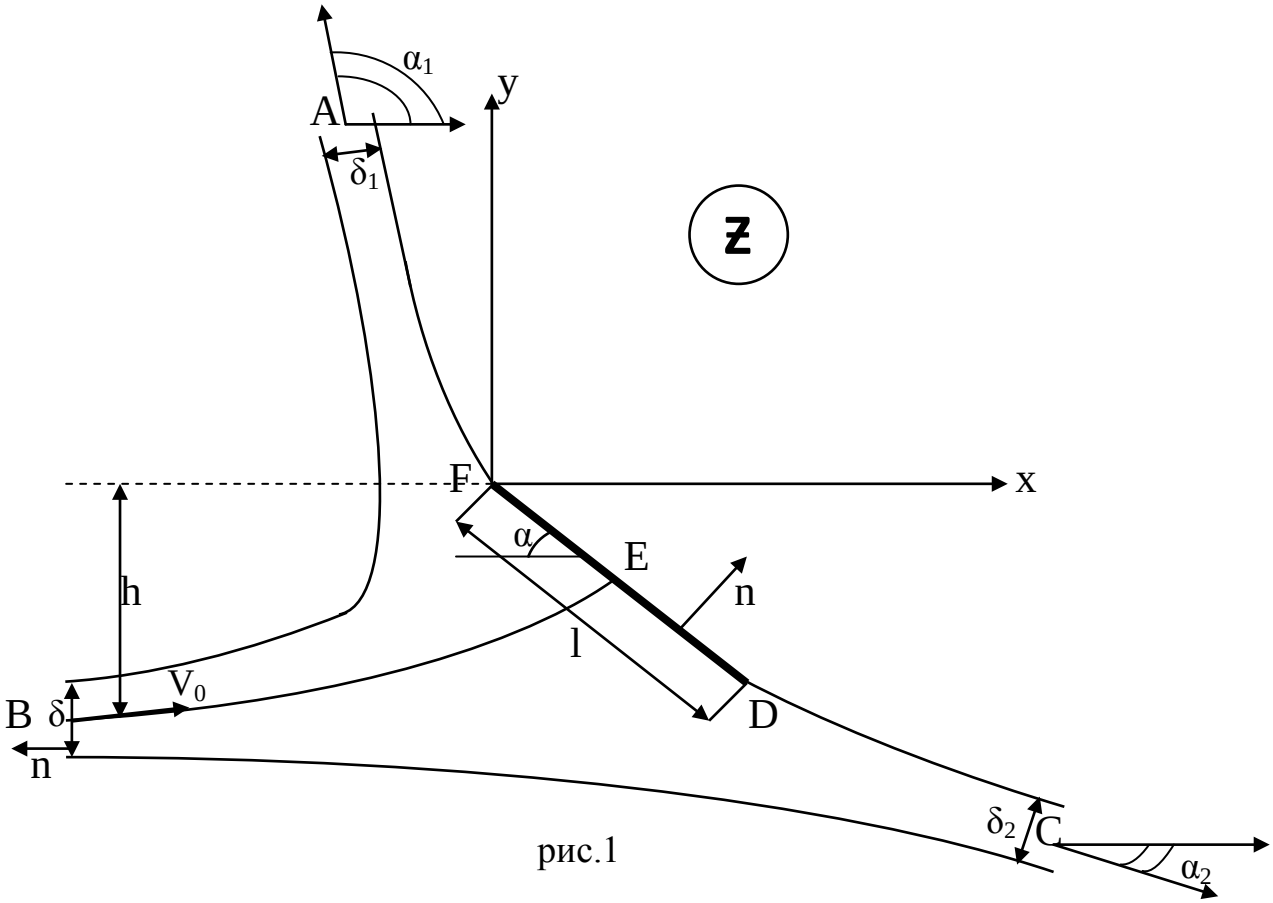


рис.1

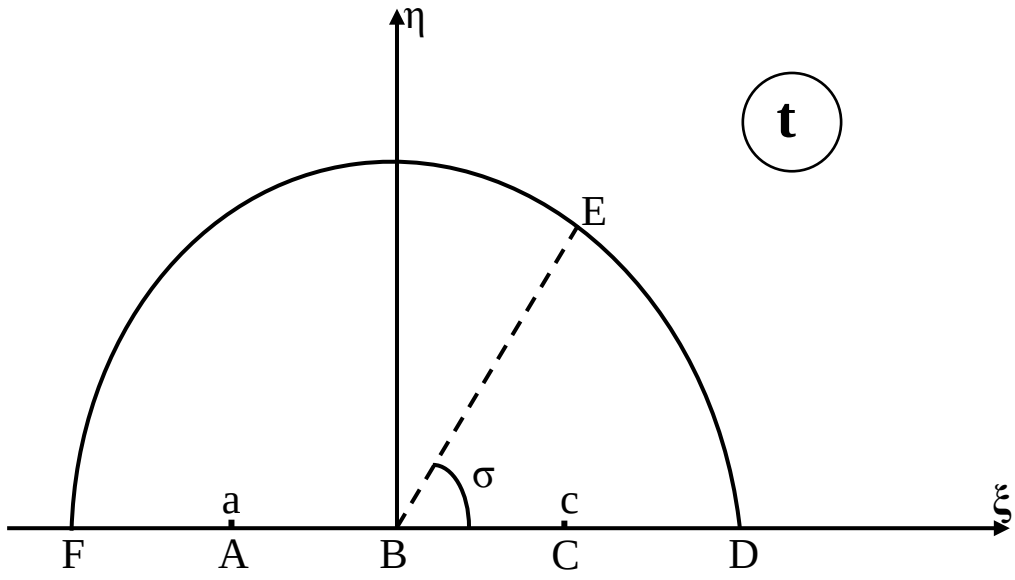


рис.2

Выделим в области течения контрольный объем, проведя через удаленные точки A, B и C сечения, перпендикулярные осям струй. Границу

контрольного объема обозначим Σ. Запишем уравнение об изменении количества движения применительно к этому объему [6] (стр. 53).

$$\oint_{\Sigma} \rho \bar{V} V_n \, ds = -\oint_{\Sigma} P \, \bar{n} ds \tag{1}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\bar{V}$ - вектор скорости, V_n - нормальная скорость, $\bar{n}$ - внешняя нормаль, P – давление на границе. Заметим, что, если Σ – любой замкнутый контур, то

$$\oint_{\Sigma} \bar{n} \, ds = 0 \tag{2}$$

В самом деле, пусть $\bar{n} = (n_x, n_y)$. Надо доказать, что

$$\oint_{\Sigma} n_x \, ds = 0, \qquad \oint_{\Sigma} n_y \, ds = 0 \tag{3}$$

Рассмотрим векторное поле $\bar{Q} = (1,0)$. По теореме Гаусса – Остроградского

$$\oint_{\Sigma} n_x \, ds = \oint_{\Sigma} \bar{Q} \, \bar{n} ds = \oint_{S} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) dxdy = 0 \, ,$$

где через S мы обозначили область, ограниченную контуром Σ. Аналогичным способом, для векторного поля $\bar{Q} = (0,1)$ выводим второе равенство в (3). С помощью (2) уравнение (3) можно записать так:

$$\oint_{\Sigma} \rho \bar{V} V_n \, ds = -\oint_{\Sigma} (P - P_0) \, \bar{n} ds$$

Сила, действующая на пластинку со стороны жидкости очевидно равна

$$\bar{R} = \int_{D}^{F} (P - P_0) \, \bar{n} ds$$

Так как всюду на струях $P = P_0$, то

$$\oint_{\Sigma} \rho \bar{V} V_n \, ds = -\bar{R}$$

Но V_n = 0 всюду на границах контрольного объема, за исключением сечений, проведенных в точках A, B и C.

Имеем

в точке B: $\bar{V} = V_0, V_n = -V_0$;

в точке C: $\bar{V} = V_0 e^{i\alpha_2}, V_n = V_0$;

в точке A: $\bar{V} = V_0 e^{i\alpha_1}, V_n = V_0$.

Поэтому

$$-\rho V_0^2 \delta + \rho V_0^2 \delta_2 e^{i\alpha_2} + \rho V_0^2 \delta_1 e^{i\alpha_1} = -\bar{R}$$

или

$$\bar{R} = \rho V_0^2 \left(\delta - \delta_1 e^{i\alpha_1} - \delta_2 e^{i\alpha_2}\right) \tag{4}$$

Формула (4) позволяет подсчитать силу $\bar{R}$, если известны $\delta_1, \delta_2, \alpha_1, \alpha_2$. Запишем теперь уравнения моментов количества движения:

$$\oint_{\Sigma} \rho (\bar{r} \times \bar{V}) V_n \, ds = -\oint_{\Sigma} (\bar{r} \times P\bar{n}) \, ds \tag{5}$$

где $\bar{r} = (x, y)$ – радиус-вектор. Так как задача плоская, то под векторными произведениями $(\bar{r} \times \bar{V})$и $(\bar{r} \times P\bar{n})$ будем понимать проекции этого векторного произведения на ось z. Искомый момент

$$M = \int_{D}^{F} \bar{r} \times \bar{n} (P - P_0) \, \bar{n} ds \tag{6}$$

Покажем, что для любого замкнутого контура

$$\oint_{\Sigma} \bar{r} \times \bar{n} \, ds = 0 \tag{7}$$

В самом деле, $(\bar{r} \times \bar{n}) = x n_y - y n_x$. Рассмотрим векторное поле $\bar{Q} = (-y, x)$.

Тогда по теореме Гаусса – Остроградского

$$\oint_{\Sigma} (\bar{r} \times \bar{n})\, ds = \oint_{\Sigma} \bar{Q}\, \bar{n} ds = \iint_{S} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

Комбинируем (5) и (6) и учитываем, что на струях $P = P_0$. Получаем

$$\oint_{\Sigma} \rho(\bar{r} \times \bar{V}) V_n\, ds = -M$$

Проведем оси струй в удаленных точках A и B и обозначим через h_1 и h_2 расстояния этих осей до точки F. Эти расстояния считаем положительными, если точка F лежит выше соответствующей оси. Учитываем, что $V_n = 0$ всюду, кроме сечений в точках A, B и C. Тогда

$$-M = \int_{A} \rho\, (\bar{r} \times \bar{V}) V_n ds + \int_{B} \rho\, (\bar{r} \times \bar{V}) V_n ds + \int_{C} \rho\, (\bar{r} \times \bar{V}) V_n ds\,,$$

где $\int_{A} \rho\, (\bar{r} \times \bar{V}) V_n ds, \int_{B} \rho\, (\bar{r} \times \bar{V}) V_n ds, \int_{C} \rho\, (\bar{r} \times \bar{V}) V_n ds$ – это интегралы по соответствующим сечениям. Теперь мы можем записать

$$-M = -\rho V_0^2 \delta h + \rho V_0^2 \delta_1 h_1 + \rho V_0^2 \delta_2 h_2\,,$$

$$M = \rho V_0^2 (\delta h - \delta_1 h_1 - \delta_2 h_2) \qquad (8)$$

Формула (8) позволяет найти искомый момент, однако кроме δ_1 и δ_2 необходимо теперь знать h_1 и h_2.

Параметризация с помощью полукруга

Область течения отобразим конформно на верхний полукруг параметрической плоскости $t = \xi + i\eta$. Соответствие точек видно из рис.1 и рис.2. Параметры a, σ и – это математические параметры задачи, подлежащие определению. Методом особых точек С. А. Чаплыгина находим $\frac{dw}{dt}$. Для этого необходимо выяснить характер особенностей у этой функции в параметрической плоскости t.

У нас в точке B расположен источник, поэтому при $t = 0$ - полюс I порядка. В точках A и C расположены стоки, соответственно, при $t = a$ и $t = c$ – тоже полюсы I порядка.

С помощью принципа симметрии Римана – Шварца искомая функция $\frac{dw}{dt}$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость. При этом полюсы $t = a$ и $t = c$ перейдут в полюсы $t = \frac{1}{a}$ и $t = \frac{1}{c}$.

Поток разделяется в точке E. В $t = e^{i\sigma}$ функция $\frac{dw}{dt}$ имеет нуль I порядка (обтекается прямой угол). Кроме того, $\frac{dw}{dt}$ – комплексно-сопряженная скорость фиктивного течения, которая на действительном диаметре действительна. Отсюда, $\mathrm{Im}\frac{dw}{dt} = 0, -1 \leq \mathrm{t} \leq 1$. И это дает нам возможность продолжить функцию с верхнего полукруга на нижний. При этом в симметричной точке $t = e^{-i\sigma}$ также будет нуль I порядка. В точках $t = 1$ и $t = -1$ тоже будут нули I порядка (т.к. обтекается прямой угол).

Таким образом, функция $\frac{dw}{dt}$ примет следующий вид:

$$\frac{dw}{dt} = \varphi_0 \frac{\left(t - e^{i\sigma}\right)\left(t - e^{-i\sigma}\right)(1 - t^2)}{t(t - a)\left(t - \frac{1}{a}\right)(t - c)(t - \frac{1}{c})},$$

где $\varphi_0 > 0$ - параметр, имеющий размерность потенциала скорости. Обозначим $\varphi_0 = kV_0$, где k – параметр, имеющий размерность длины.

Тогда

$$\frac{dw}{dt} = kV_0 \frac{(t^2 - 2t\cos\sigma + 1)(1 - t^2)}{t(t-a)\left(t - \frac{1}{a}\right)(t-c)(t - \frac{1}{c})} = kV_0 F(t) \qquad (9)$$

Тем же методом особых точек находим $\frac{dw}{V_0 dz}$.

$$\frac{dw}{V_0 dz} = \frac{1 - te^{-i\sigma}}{1 - te^{i\sigma}} = f(t) \qquad (10)$$

В точке D при $t = 1$ должно быть $\frac{dw}{V_0 dz} = e^{i\alpha}$. Отсюда следует, что

$$\alpha = \pi - \sigma, \qquad \sigma = \pi - \alpha \qquad (11)$$

Уравнение (10) позволяет найти параметр σ, если известен угол атаки α. Неизвестными в задаче становятся k, a, c.

Вычисление физических параметров δ, δ_1,δ_2, α_1, α_2 через математические параметры a, c и k.

Обозначим расходы в струях через q, q_1 и q_2. Тогда

$$q = V_0\delta, \quad q_1 = V_0\delta_1, \quad q_2 = V_0\delta_2$$

Область изменения комплексного потенциала w изображен на рис.3

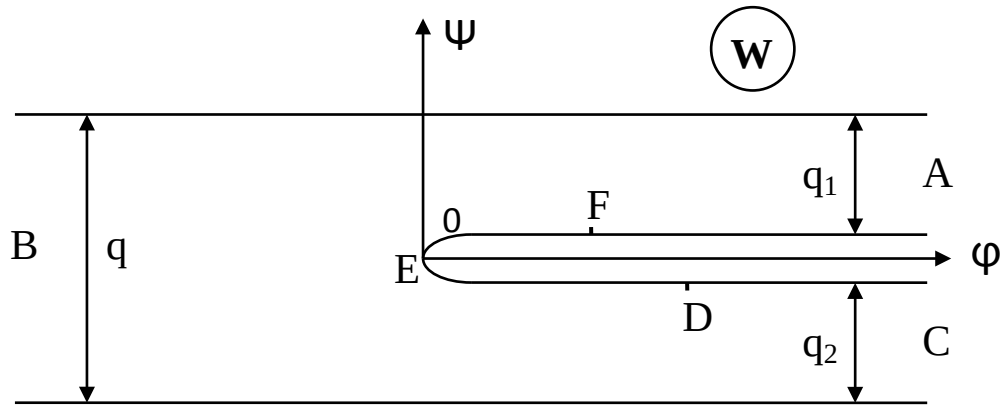


рис.3

Интегрируем функцию $\frac{dw}{dt}$ по полуокружностям бесконечно малого радиуса против часовой стрелки около точек A, B и C. Тогда

$$iq = \int_B kV_0\, F(t)dt = kV_0\pi i \operatorname*{Res}_{t=0} F(t),$$

$$-iq_2 = \int_C kV_0\, F(t)dt = kV_0\pi i \operatorname*{Res}_{t=c} F(t),$$

$$-iq_1 = \int_A kV_0\, F(t)dt = kV_0\pi i \operatorname*{Res}_{t=a} F(t).$$

После вычисления вычетов получается

$$q = kV_0\pi, \quad q_1 = kV_0\pi c\frac{(1-2a\cos\sigma + a^2)}{(c-a)(1-ac)}, q_2 = -kV_0\pi a\frac{(1-2c\cos\sigma + c^2)}{(c-a)(1-ac)}$$

Отсюда находим

$$\delta = k\pi, \quad \delta_1 = k\pi c\frac{(a^2-2a\cos\sigma + 1)}{(c-a)(1-ac)}, \delta_2 = -k\pi a\frac{(c^2-2c\cos\sigma + 1)}{(c-a)(1-ac)} \quad (12)$$

Теперь найдем углы наклона осей струй. Из формулы (10) следует, что

$$\frac{1-ae^{-i\sigma}}{1-ae^{i\sigma}}=e^{-i\alpha_1}\ ,\quad \frac{1-ce^{-i\sigma}}{1-ce^{i\sigma}}=e^{-i\alpha_2} \tag{13}$$

Отсюда выводим

$$\alpha_1=-2\mathrm{arctg}\frac{a\sin\sigma}{1-a\cos\sigma}\ ,\qquad \alpha_2=-2\mathrm{arctg}\frac{c\sin\sigma}{1-c\cos\sigma} \tag{14}$$

Так как у нас $-1<a<0$, $0<c<1$, то всегда будет $\alpha_1>0$, $\alpha_2<0$.

Построение конформного отображения z(t)

Имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw}\frac{dw}{dt} = \frac{1}{V_0}\frac{V_0 dz}{dw}\frac{dw}{dt} = k\frac{F(t)}{f(t)}.$$

После элементарных выкладок получаем

$$\frac{dz}{dt} = k\frac{(1-t^2)(1-te^{-i\sigma})^2}{t(t-a)(t-\frac{1}{a})(t-c)(t-\frac{1}{c})} = kG(t)$$

Раскладываем функцию $G(t)$ на простейшие дроби:

$$G(t) = \frac{A_0}{t} + \frac{A_1}{t-a} + \frac{A_2}{t-\frac{1}{a}} + \frac{C_1}{t-c} + \frac{C_2}{t-\frac{1}{c}}, \qquad \text{где}$$

$A_0 = 1$,

$$A_1 = -\frac{c\left(1-ae^{i\sigma}\right)^2}{(c-a)(1-ac)},$$

$$A_2 = -\frac{c\left(e^{i\sigma}-a\right)^2}{(c-a)(1-ac)},$$

$$C_1 = \frac{a\left(1-ce^{i\sigma}\right)^2}{(c-a)(1-ac)},$$

$$C_2 = \frac{a\left(e^{i\sigma}-c\right)^2}{(c-a)(1-ac)}$$

После интегрирования находим, что

$z(t) = k[\omega(t) - A]$, где

$$\omega(t) = A_0 \ln t + A_1 \ln(t-a) + A_2 \ln\left(t-\frac{1}{a}\right) + C_1 \ln(t-c) + C_2 \ln\left(t-\frac{1}{c}\right) \quad (15)$$

$$A = \omega(-1) \quad (16)$$

Вывод системы уравнений для определения математических параметров $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{k}$

Будем рассматривать вектор $\overrightarrow{DB}$ как комплексное число. Тогда $\arg\overrightarrow{DB} = \pi - \alpha = \sigma$. Отсюда вытекает, что $l = k[\omega(-1) - \omega(1)]e^{-i\sigma} = kI(a,c,\alpha)$, где $\mathrm{I}(a,c,\alpha) = \frac{4c(1+a^2)\mathrm{arcth}\alpha - 4a(1+c^2)\mathrm{arcth}c\cos\alpha - 4c\ln\left[\frac{(a-1)(1+c)}{(c-1)(1+a)}\right]}{(a-c)(ac-1)} + \frac{2(a-c)c\pi\sin\alpha}{(a-c)(ac-1)}$;

Отсюда получим первое уравнение:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{l} = \frac{\pi}{\mathrm{I}(a,c,\alpha)} \tag{17}$$

Кроме того,

$$h = -\left[\lim_{\xi\to+0} \mathrm{Im}\, k[\omega(\xi) - A] + k\frac{\pi}{2}\right] = k\mathrm{I}_1(a,c,\alpha)\ ,$$

Вычисляем предел и получаем

$$\mathrm{I}_1(a,c,\alpha) = -\frac{1}{2(a-c)(ac-1)}(c+a)(1-ac+c^2)\pi + 2ac(2\pi\cos\alpha) + \alpha\pi\cos 2\alpha$$
$$+2\left(\ln(-\frac{1}{ac}) + 2\ln\left[-\frac{a(1+c)}{1+a}\right]\right)\sin\alpha) - 2(c(\ln(1+a) + a(a\ln\left(-\frac{1+a}{a}\right)$$
$$+c\ln\left(\frac{c}{1+c}\right))) - a\ln(1+c))\sin 2\alpha$$

Отсюда выводим второе уравнение:

$$\bar{h} = \frac{\mathrm{I}_1(a,c,\alpha)}{\mathrm{I}(a,c,\alpha)} \tag{18}$$

Система (17), (18) представляет собой замкнутую систему трансцендентных уравнений для определения параметров a и c. Эта система решалась численно с помощью стандартной функции FindRoot пакета Математика 8.

Вычисление коэффициента нормального давления на пластинку и коэффициента момента

Пусть параметры a и c определены. Воспользуемся формулой (4), но учтем формулы (13). Получаем

$$R = \rho V_0^2 \left(\delta - \delta_1 \frac{1 - ae^{i\sigma}}{1 - ae^{-i\sigma}} - \delta_2 \frac{1 - ce^{i\sigma}}{1 - ce^{-i\sigma}} \right)$$

Подставим снова выражения (12). Получим

$$\vec{R} = \rho V_0^2 \frac{ac(e^{2i\sigma} - 1)k\pi}{1 - ac} = \rho V_0^2 \frac{2ie^{i\sigma} \sin\sigma\, k\pi}{1 - ac} ac$$

Тогда коэффициент нормального давления на пластинку будет

$$R_n = -\frac{4 \sin\sigma\, \pi ac}{(1 - ac)\mathrm{I}(a, c, \alpha)} = -\frac{4 \sin\alpha\, \pi ac}{(1 - ac)\mathrm{I}(a, c, \alpha)}$$

Если $a \to 0, c \to 0$, то мы получим пластинку в безграничном потоке. Вычислив предел, приходим к формуле Релея:

$$R_n = \lim_{\substack{a \to 0 \\ c \to 0}} -\frac{4 \sin\alpha\, \pi ac}{(1 - ac)\mathrm{I}(a, c, \alpha)} = \frac{2\pi \sin\alpha}{4 + \pi \sin\alpha}$$

Для вычисления коэффициента момента, необходимо найти расстояния h_1 и h_2 от осей струй до точки F.

Ясно, что

$$h_1 = -\left[\lim_{\xi \to a - 0} \operatorname{Im} k[\omega(\xi) - A] e^{-i\alpha_1} + \frac{\delta_1}{2} \right] = kH_1(a, c, \alpha)$$

$$h_2 = -\left[\lim_{\xi \to c - 0} \operatorname{Im} k[\omega(\xi) - A] e^{-i\alpha_2} + \frac{\delta_2}{2} \right] = kH_2(a, c, \alpha)$$

Эти пределы были вычислены аналитически с помощью пакета Математика. Установлено, что

$$H_1(a, c, \alpha) = \frac{1}{2(1 - ac)(a - c)} c\pi(-1 - a^2 + 2\cos\alpha_1 + 2a(a\cos(\alpha_1 - \sigma) -$$

$$2\cos(\alpha_1 - \sigma) + \cos\sigma)) + 4a^2 c \operatorname{arcctth}(1 - 2\mathrm{a}) \sin\alpha_1 - (2\mathrm{c} \ln\big(-\mathrm{a}(1 + \mathrm{a})\big) +$$

$$a(\ln(a-c)^2) - 2\ln\big(-a(1+c)\big) + c^2\,(\ln\left(\left(-\frac{a(1-c)}{c}\right)^2\right) -$$

$$-2\ln(-\frac{a(1+c)}{c}))))\sin\alpha_1 - (-2c\ln(1-a) + a(-4\mathrm{arccth}(1+2\mathrm{c}) +$$

$$\ln\left(a-\frac{1}{c}\right)^2 + c(2a\ln(1+a) + c\ln(a-c)^2 - 2c\ln(1+c))))\sin(\alpha_1 - 2\sigma) +$$

$$2ac\left(-2\ln(1-a^2) + \ln\left(a-\frac{1}{c}\right)^2 + \ln(a-c)^2 + 2\ln c - 4\ln\left(\frac{1+c}{1+a}\right)\right) *$$

$$* \sin(\alpha_1 - \sigma))$$

$$H_2(a,c,\alpha) = \frac{1}{2(1-ac)(a-c)}(a(1+c^2)\pi + 2(ac(c-a)\pi\cos\alpha_2 + a(a-c)$$

$$* c\pi\cos(\alpha_2 - 2\sigma) - ac\pi\cos\sigma - ac^2\ln\left(-1+\frac{1}{c}\right)\sin\alpha_2 + \mathrm{aln}\big(c(1+c)\big) *$$

$$* \sin\alpha_2 + \ln\left(\frac{-a+c}{c+ac}\right)\sin\alpha_2 + a^2c\ln\left(\frac{1-ac}{c+ac}\right)\sin\alpha_2 - a\ln(1-c) *$$

$$* \sin(\alpha_2 - 2\sigma) + ac^2\ln(1+c)\sin(\alpha_2 - 2\sigma)\,ca^2\ln\left(\frac{-a+c}{1+a}\right)\sin(\alpha_2 - 2\sigma) +$$

$$c\ln\left(\frac{1-ac}{1+a}\right)\sin(\alpha_2 - 2\sigma) + 2ac(2\ln(1+a) + \ln\left(\frac{-1+c}{(1+c)(c-a)(ac-1)}\right)) *$$

$$* \sin(\alpha_2 - \sigma))).$$

Код программы на Математика 8:

Ayaz_last.nb *

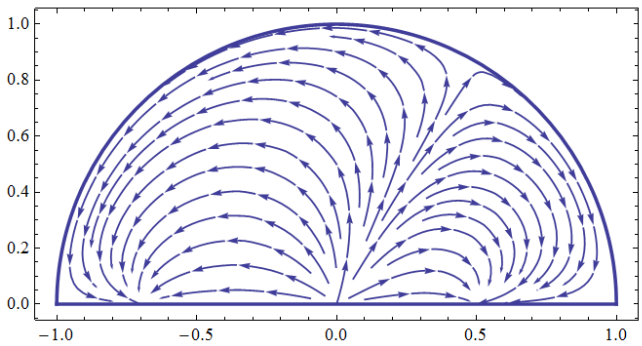
```
(*Основные функции*)
F[t_] = (t^2 - 2 t Cos[σ] + 1) (1 - t^2) / t / (t - a) / (t - 1 / a) / (t - c) / (t - 1 / c)
f[t_] = (1 - t E^(-I σ)) / (1 - t E^(I σ))
```

$$\frac{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2-2\,t\,\mathrm{Cos}[\sigma]\right)}{t\left(-\frac{1}{a}+t\right)(-a+t)\left(-\frac{1}{c}+t\right)(-c+t)}$$

$$\frac{1-e^{-i\,\sigma}\,t}{1-e^{i\,\sigma}\,t}$$

```
(*Фиктивное течение в параметрической плоскости*)
rul = {a → -0.7, c → 0.5, σ → Pi / 3}
gr = StreamPlot[{Re[F[ξ + I η]], -Im[F[ξ + I η]]} /. rul, {ξ, -1, 1}, {η, 0, 1},
   RegionFunction → Function[{x, y}, x^2 + y^2 < 1]];
gr1 = ParametricPlot[{Cos[x], Sin[x]}, {x, 0, Pi}, PlotStyle → Thick];
gr2 = Plot[0, {x, -1, 1}, PlotStyle → Thick];
Show[gr, gr1, gr2, AspectRatio → Automatic]
```

$$\left\{a \to -0.7,\ c \to 0.5,\ \sigma \to \frac{\pi}{3}\right\}$$




```
δ = k Pi Residue[F[t], {t, 0}]
δ1 = -k Pi Residue[F[t], {t, a}]
δ2 = -k Pi Residue[F[t], {t, c}]
FullSimplify[δ1 + δ2]
```

$k\,\pi$

$$\frac{c\,k\,\pi\left(1+a^2-2\,a\,\mathrm{Cos}[\sigma]\right)}{(a-c)\,(-1+a\,c)}$$

$$-\frac{a\,k\,\pi\left(1+c^2-2\,c\,\mathrm{Cos}[\sigma]\right)}{(a-c)\,(-1+a\,c)}$$

$k\,\pi$

```
dz[t_] = FullSimplify[F[t] / f[t]]
a0 = Residue[dz[t], {t, 0}]
a1 = Residue[dz[t], {t, a}]
a2 = Residue[dz[t], {t, 1 / a}]
c1 = Residue[dz[t], {t, c}]
c2 = Residue[dz[t], {t, 1 / c}]
dz1[t_] = a0 / t + a1 / (t - a) + a2 / (t - 1 / a) + c1 / (t - c) + c2 / (t - 1 / c)
FullSimplify[dz[t] - dz1[t]]
ω[t_] = a0 Log[t] + a1 Log[t - a] + a2 Log[t - 1 / a] + c1 Log[t - c] + c2 Log[t - 1 / c]
assum = {-1 < a < 0, 0 < c < 1, 0 < σ < Pi};
aa = FullSimplify[ComplexExpand[ω[-1]], assum]
```

$$\frac{a\,c\,\left(-1+e^{i\sigma}\,t\right)^2\left(-1+t^2\right)}{(a-t)\,t\,(-c+t)\,(-1+a\,t)\,(-1+c\,t)}$$

$$1$$

$$\frac{c\,\left(-1+a\,e^{i\sigma}\right)^2}{(-a+c)\,(-1+a\,c)}$$

$$-\frac{c\,\left(-a+e^{i\sigma}\right)^2}{(a-c)\,(-1+a\,c)}$$

$$\frac{a\,\left(-1+c\,e^{i\sigma}\right)^2}{(a-c)\,(-1+a\,c)}$$

$$\frac{a\,\left(c-e^{i\sigma}\right)^2}{(a-c)\,(-1+a\,c)}$$

$$\frac{1}{t}-\frac{c\,\left(-a+e^{i\sigma}\right)^2}{(a-c)\,(-1+a\,c)\,\left(-\frac{1}{a}+t\right)}+\frac{c\,\left(-1+a\,e^{i\sigma}\right)^2}{(-a+c)\,(-1+a\,c)\,(-a+t)}+$$

$$\frac{a\,\left(c-e^{i\sigma}\right)^2}{(a-c)\,(-1+a\,c)\,\left(-\frac{1}{c}+t\right)}+\frac{a\,\left(-1+c\,e^{i\sigma}\right)^2}{(a-c)\,(-1+a\,c)\,(-c+t)}$$

$$0$$

$$\mathrm{Log}[t]-\frac{c\,\left(-a+e^{i\sigma}\right)^2\mathrm{Log}\left[-\frac{1}{a}+t\right]}{(a-c)\,(-1+a\,c)}+\frac{c\,\left(-1+a\,e^{i\sigma}\right)^2\mathrm{Log}[-a+t]}{(-a+c)\,(-1+a\,c)}+$$
$$\frac{a\,\left(c-e^{i\sigma}\right)^2\mathrm{Log}\left[-\frac{1}{c}+t\right]}{(a-c)\,(-1+a\,c)}+\frac{a\,\left(-1+c\,e^{i\sigma}\right)^2\mathrm{Log}[-c+t]}{(a-c)\,(-1+a\,c)}$$

$$-\frac{1}{(a-c)\,(-1+a\,c)}\,e^{i\sigma}\Big(\mathrm{Cos}[\sigma]$$
$$\left(\left(1+a^2\right)c\,\mathrm{Log}\left[-\frac{1}{a}\right]+2\left(1+a^2\right)c\,\mathrm{Log}[1+a]+a\left(1+c^2\right)\left(-i\,\pi+\mathrm{Log}[c]-2\,\mathrm{Log}[1+c]\right)\right)+$$
$$2\,a\,c\left(i\,\pi+\mathrm{Log}\left[-\frac{a}{c}\right]+2\,\mathrm{Log}\left[\frac{1+c}{1+a}\right]\right)+$$
$$\left(a\left(1-2\,a\,c+c^2\right)\pi-i\left(\left(-1+a^2\right)c\,\mathrm{Log}\left[-\frac{1}{a}\right]+a\left(-1+c^2\right)\mathrm{Log}[c]\right)\right)\mathrm{Sin}[\sigma]\Big)$$

```
(* Первое уравнение *)
ii = FullSimplify[(ω[-1] - ω[1]) * E^(-I σ), assum]
iiα = Simplify[ii /. σ → Pi - α]
ll = k ii
eq1 = δ / ll /. {σ → Pi - α}
```

$$\Big(2\Big(-2\left(1+a^2\right)c\,\mathrm{ArcTanh}[a]\,\mathrm{Cos}[\sigma]+$$
$$a\left(2\left(1+c^2\right)\mathrm{ArcTanh}[c]\,\mathrm{Cos}[\sigma]-2\,c\,\mathrm{Log}\left[\frac{(-1+a)\,(1+c)}{(1+a)\,(-1+c)}\right]+(a-c)\,c\,\pi\,\mathrm{Sin}[\sigma]\right)\Big)\Big)\Big/\big((a-$$
$$c)\,(-1+a\,c)\big)$$

$$\Big(2\Big(2\left(1+a^2\right)c\,\mathrm{ArcTanh}[a]\,\mathrm{Cos}[\alpha]+a\Big(-2\left(1+c^2\right)\mathrm{ArcTanh}[c]\,\mathrm{Cos}[\alpha]-$$
$$2\,c\,\mathrm{Log}\left[\frac{(-1+a)\,(1+c)}{(1+a)\,(-1+c)}\right]+(a-c)\,c\,\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha]\Big)\Big)\Big)\Big/\big((a-c)\,(-1+a\,c)\big)$$

$$\Big(2\,k\Big(-2\left(1+a^2\right)c\,\mathrm{ArcTanh}[a]\,\mathrm{Cos}[\sigma]+$$
$$a\left(2\left(1+c^2\right)\mathrm{ArcTanh}[c]\,\mathrm{Cos}[\sigma]-2\,c\,\mathrm{Log}\left[\frac{(-1+a)\,(1+c)}{(1+a)\,(-1+c)}\right]+(a-c)\,c\,\pi\,\mathrm{Sin}[\sigma]\right)\Big)\Big)\Big/\big((a-$$
$$c)\,(-1+a\,c)\big)$$

$$((a-c)\ (-1+a\,c)\,\pi)\Big/\Big(2\Big(2\,(1+a^2)\,c\,\mathrm{ArcTanh}[a]\,\mathrm{Cos}[\alpha]+a\Big(-2\,(1+c^2)\,\mathrm{ArcTanh}[c]\,\mathrm{Cos}[\alpha]-2\,c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{(-1+a)\ (1+c)}{(1+a)\ (-1+c)}\Big]+(a-c)\,c\,\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha]\Big)\Big)\Big)$$

```
(* Второе уравнение *)
assum1 = {-1 < a < 0, 0 < c < 1, 0 < σ < Pi, 0 < ξ < c};
hx = k Im[ω[ξ] - aa]
hh = -(FullSimplify[Limit[hx, ξ → 0, Assumptions → assum1 ], assum1] + δ / 2)
hhn = FullSimplify[hh / k /. σ → Pi - α]
eq2 = FullSimplify[hh / ll /. σ → Pi - α]
```

$$k\,\mathrm{Im}\Big[\mathrm{Log}[\xi]-\frac{c\,(-a+e^{i\sigma})^2\,\mathrm{Log}[-\frac{1}{a}+\xi]}{(a-c)\ (-1+a\,c)}+\frac{c\,(-1+a\,e^{i\sigma})^2\,\mathrm{Log}[-a+\xi]}{(-a+c)\ (-1+a\,c)}+\frac{a\,(c-e^{i\sigma})^2\,\mathrm{Log}[-\frac{1}{c}+\xi]}{(a-c)\ (-1+a\,c)}+\frac{a\,(-1+c\,e^{i\sigma})^2\,\mathrm{Log}[-c+\xi]}{(a-c)\ (-1+a\,c)}+\frac{1}{(a-c)\ (-1+a\,c)}\,e^{i\sigma}\Big(\mathrm{Cos}[\sigma]\Big((1+a^2)\,c\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{1}{a}\Big]+2\,(1+a^2)\,c\,\mathrm{Log}[1+a]+a\,(1+c^2)\,(-i\,\pi+\mathrm{Log}[c]-2\,\mathrm{Log}[1+c])\Big)+2\,a\,c\,\Big(i\,\pi+\mathrm{Log}\Big[-\frac{a}{c}\Big]+2\,\mathrm{Log}\Big[\frac{1+c}{1+a}\Big]\Big)+\Big(a\,(1-2\,a\,c+c^2)\,\pi-i\,\Big((-1+a^2)\,c\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{1}{a}\Big]+a\,(-1+c^2)\,\mathrm{Log}[c]\Big)\Big)\,\mathrm{Sin}[\sigma]\Big)\Big]$$

$$-\frac{k\,\pi}{2}-\frac{1}{(a-c)\ (-1+a\,c)}\Big(a\,k\,\Big(\pi\,(1-a\,c+c^2-2\,c\,\mathrm{Cos}[\sigma]+a\,c\,\mathrm{Cos}[2\,\sigma])+2\,c\,\Big(\mathrm{Log}\Big[-\frac{1}{a\,c}\Big]+2\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{a\,(1+c)}{1+a}\Big]\Big)\,\mathrm{Sin}[\sigma]\Big)+k\,\Big(c\,\Big(\mathrm{Log}[1+a]+a\,\Big(a\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{1+a}{a}\Big]+c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{c}{1+c}\Big]\Big)\Big)-a\,\mathrm{Log}[1+c]\Big)\,\mathrm{Sin}[2\,\sigma]\Big)$$

$$-\frac{1}{2\,(a-c)\ (-1+a\,c)}\Big((c+a\,(1-a\,c+c^2))\,\pi+2\,a\,c\,\Big(2\,\pi\,\mathrm{Cos}[\alpha]+a\,\pi\,\mathrm{Cos}[2\,\alpha]+2\,\Big(\mathrm{Log}\Big[-\frac{1}{a\,c}\Big]+2\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{a\,(1+c)}{1+a}\Big]\Big)\,\mathrm{Sin}[\alpha]\Big)-2\,\Big(c\,\Big(\mathrm{Log}[1+a]+a\,\Big(a\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{1+a}{a}\Big]+c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{c}{1+c}\Big]\Big)\Big)-a\,\mathrm{Log}[1+c]\Big)\,\mathrm{Sin}[2\,\alpha]\Big)$$

$$\Big((c+a\,(1-a\,c+c^2))\,\pi+2\,a\,c\,\Big(2\,\pi\,\mathrm{Cos}[\alpha]+a\,\pi\,\mathrm{Cos}[2\,\alpha]+2\,\Big(\mathrm{Log}\Big[-\frac{1}{a\,c}\Big]+2\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{a\,(1+c)}{1+a}\Big]\Big)\,\mathrm{Sin}[\alpha]\Big)-2\,\Big(c\,\Big(\mathrm{Log}[1+a]+a\,\Big(a\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{1+a}{a}\Big]+c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{c}{1+c}\Big]\Big)\Big)-a\,\mathrm{Log}[1+c]\Big)\,\mathrm{Sin}[2\,\alpha]\Big)\Big/\Big(-8\,(1+a^2)\,c\,\mathrm{ArcTanh}[a]\,\mathrm{Cos}[\alpha]+8\,a\,(1+c^2)\,\mathrm{ArcTanh}[c]\,\mathrm{Cos}[\alpha]+4\,a\,c\,\Big(2\,\mathrm{Log}\Big[\frac{(-1+a)\ (1+c)}{(1+a)\ (-1+c)}\Big]+(-a+c)\,\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha]\Big)\Big)$$

```
(*Вычисление коэффициента нормального давления *)
rr =
 FullSimplify[
  (δ - δ1 * (1 - a E^(I σ)) / (1 - a E^(-I σ)) - δ2 (1 - c E^(I σ)) / (1 - c E^(-I σ)))]
rn1 = FullSimplify[-2 rr / I / E^(I σ)]
rn = rn1 / k / ii /. σ → Pi - α
(*Proverka formuly Releya*)
reley1 = Limit[rn, a → 0, Assumptions → assum]
reley = Limit[reley1, c → 0, Assumptions → assum]
```

$$-\frac{a\,c\,(-1+e^{2\,i\,\sigma})\,k\,\pi}{-1+a\,c}$$

$$\frac{4\,a\,c\,k\,\pi\,\mathrm{Sin}[\sigma]}{-1+a\,c}$$

$$(2\,a\,(a-c)\,c\,\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha])\Big/\Big(2\,(1+a^2)\,c\,\mathrm{ArcTanh}[a]\,\mathrm{Cos}[\alpha]+a\left(-2\,(1+c^2)\,\mathrm{ArcTanh}[c]\,\mathrm{Cos}[\alpha]-2\,c\,\mathrm{Log}\left[\frac{(-1+a)\,(1+c)}{(1+a)\,(-1+c)}\right]+(a-c)\,c\,\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha]\right)\Big)$$

$$(2\,c^2\,\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha])\Big/\Big(2\,(1+c^2)\,\mathrm{ArcTanh}[c]\,\mathrm{Cos}[\alpha]+c\left(-2\,\mathrm{Cos}[\alpha]+2\,\mathrm{Log}\left[\frac{1+c}{1-c}\right]+c\,\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha]\right)\Big)$$

$$\frac{2\,\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{4+\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha]}$$

```
(*Вычисление координаты центра давления dd*)
Clear[α1]
assum2 = {-1 < a < 0, 0 < c < 1, 0 < σ < Pi, -1 < ξ < a};
lm1 = Limit[Im[a1 Log[ξ - a] * (1 - a E^(-I σ)) / (1 - a E^(I σ))], ξ → a,
   Assumptions → assum2];
lm2 =
  FullSimplify[
   ComplexExpand[Im[(Simplify[ω[ξ] - a1 Log[ξ - a]] - aa) * E^(-I α1) /. ξ → a]], assum];
```

```
hh1 = -FullSimplify[(lm1 + lm2) * k + δ1 / 2, assum]

assum3 = {-1 < a < 0, 0 < c < 1, 0 < σ < Pi, 0 < ξ < c};
lm1a = Limit[Im[c1 Log[ξ - c] * (1 - c E^(-I σ)) / (1 - c E^(I σ))], ξ → c,
   Assumptions → assum3];
lm2a =
  FullSimplify[
   ComplexExpand[Im[(Simplify[ω[ξ] - c1 Log[ξ - c]] - aa) * E^(-α2 I) /. ξ → c]], assum];
hh2 = -FullSimplify[(lm1a + lm2a) * k + δ2 / 2, assum]
mm = 2 (δ hh - δ1 hh1 - δ2 hh2);
dd =
  mm / rn1 / k / ii /. {α1 → -2 ArcTan[a Sin[σ] / (1 - a Cos[σ])],
     α2 → -2 ArcTan[c Sin[σ] / (1 - c Cos[σ])]} /. {σ → Pi - α};
Simplify[D[dd, k]]
dd = dd /. {k → 1}
(*Проверка формулы Релея*)
FullSimplify[Limit[dd /. {a → -2 c}, c → 0, Assumptions -> assum]]
```

$$-\frac{1}{2\,(a-c)\,(-1+a\,c)}\,k\Big(c\,\pi\,\big(-1-a^2+2\,\mathrm{Cos}[\alpha1]+2\,a\,(a\,\mathrm{Cos}[\alpha1-2\,\sigma]-2\,\mathrm{Cos}[\alpha1-\sigma]+\mathrm{Cos}[\sigma])\big)+$$

$$4\,a^2\,c\,\mathrm{ArcCoth}[1-2\,a]\,\mathrm{Sin}[\alpha1]-\Big(2\,c\,\mathrm{Log}[-a\,(1+a)]+a\left(\mathrm{Log}\left[(a-c)^2\right]-2\,\mathrm{Log}[-a\,(1+c)]+c^2\left(\mathrm{Log}\left[\left(a-\frac{1}{c}\right)^2\right]-2\,\mathrm{Log}\left[-\frac{a\,(1+c)}{c}\right]\right)\right)\Big)\,\mathrm{Sin}[\alpha1]-\Big(-2\,c\,\mathrm{Log}[1-a]+a\Big(-4\,\mathrm{ArcCoth}[1+2\,c]+\mathrm{Log}\left[\left(a-\frac{1}{c}\right)^2\right]+c\,\big(2\,a\,\mathrm{Log}[1+a]+c\,\mathrm{Log}\left[(a-c)^2\right]-2\,c\,\mathrm{Log}[1+c]\big)\Big)\Big)\,\mathrm{Sin}[\alpha1-2\,\sigma]+2\,a\,c\left(-2\,\mathrm{Log}\left[1-a^2\right]+\mathrm{Log}\left[\left(a-\frac{1}{c}\right)^2\right]+\mathrm{Log}\left[(a-c)^2\right]+2\,\mathrm{Log}[c]-4\,\mathrm{Log}\left[\frac{1+c}{1+a}\right]\right)\mathrm{Sin}[\alpha1-\sigma]\Big)$$

$$-\frac{1}{2\,(a-c)\,(-1+a\,c)}\,k\Big(a\,(1+c^2)\,\pi+2\Big(a\,c\,(-a+c)\,\pi\,\mathrm{Cos}[\alpha2]+a\,(a-c)\,c\,\pi\,\mathrm{Cos}[\alpha2-2\,\sigma]-a\,c\,\pi\,\mathrm{Cos}[\sigma]-a\,c^2\,\mathrm{Log}\left[-1+\frac{1}{c}\right]\mathrm{Sin}[\alpha2]+a\,\mathrm{Log}[c\,(1+c)]\,\mathrm{Sin}[\alpha2]+c\,\mathrm{Log}\left[\frac{-a+c}{c+a\,c}\right]\mathrm{Sin}[\alpha2]+a^2\,c\,\mathrm{Log}\left[\frac{1-a\,c}{c+a\,c}\right]\mathrm{Sin}[\alpha2]-a\,\mathrm{Log}[1-c]\,\mathrm{Sin}[\alpha2-2\,\sigma]+a\,c^2\,\mathrm{Log}[1+c]\,\mathrm{Sin}[\alpha2-2\,\sigma]+a^2\,c\,\mathrm{Log}\left[\frac{-a+c}{1+a}\right]\mathrm{Sin}[\alpha2-2\,\sigma]+c\,\mathrm{Log}\left[\frac{1-a\,c}{1+a}\right]\mathrm{Sin}[\alpha2-2\,\sigma]+2\,a\,c\,(2\,\mathrm{Log}[1+a]+\mathrm{Log}[(-1+c)/((1+c)\,(-a+c)\,(-1+a\,c))])\,\mathrm{Sin}[\alpha2-\sigma]\Big)\Big)$$

$$0$$

$$\Big((a-c)\,(-1+a\,c)^2\,\mathrm{Csc}[\alpha]$$
$$\Big(\pi\Big(-\frac{\pi}{2}-1/((a-c)\,(-1+a\,c))\,\Big(\Big(c\,\Big(\mathrm{Log}[1+a]+a\,\Big(a\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{1+a}{a}\Big]+c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{c}{1+c}\Big]\Big)\Big)-$$
$$a\,\mathrm{Log}[1+c]\Big)\,\mathrm{Sin}[2\,(\pi-\alpha)]+a\,\Big(\pi\,\Big(1-a\,c+c^2+a\,c\,\mathrm{Cos}[2\,(\pi-\alpha)]+$$
$$2\,c\,\mathrm{Cos}[\alpha]\Big)+2\,c\,\Big(\mathrm{Log}\Big[-\frac{1}{a\,c}\Big]+2\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{a\,(1+c)}{1+a}\Big]\Big)\,\mathrm{Sin}[\alpha]\Big)\Big)\Big)+$$
$$1/\big(2\,(a-c)^2\,(-1+a\,c)^2\big)\,c\,\pi\,\big(1+a^2+2\,a\,\mathrm{Cos}[\alpha]\big)$$
$$\Big(c\,\pi\,\Big(-1-a^2+2\,\mathrm{Cos}\Big[2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{a\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+a\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]+2\,a\,\Big(-\mathrm{Cos}[\alpha]+2\,\mathrm{Cos}\Big[$$
$$\alpha-2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{a\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+a\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]+a\,\mathrm{Cos}\Big[2\,(\pi-\alpha)+2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{a\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+a\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]\Big)\Big)-$$
$$2\,a\,c\,\Big(-2\,\mathrm{Log}[1-a^2]+\mathrm{Log}\Big[\Big(a-\frac{1}{c}\Big)^2\Big]+\mathrm{Log}[(a-c)^2]+2\,\mathrm{Log}[c]-4\,\mathrm{Log}\Big[\frac{1+c}{1+a}\Big]\Big)$$
$$\mathrm{Sin}\Big[\alpha-2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{a\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+a\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]-$$
$$4\,a^2\,c\,\mathrm{ArcCoth}[1-2\,a]\,\mathrm{Sin}\Big[2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{a\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+a\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]+\Big(2\,c\,\mathrm{Log}[-a\,(1+a)]+$$

$$a\,\Big(\mathrm{Log}[(a-c)^2]-2\,\mathrm{Log}[-a\,(1+c)]+c^2\,\Big(\mathrm{Log}\Big[\Big(a-\frac{1}{c}\Big)^2\Big]-2\,\mathrm{Log}\Big[-\frac{a\,(1+c)}{c}\Big]\Big)\Big)\Big)$$
$$\mathrm{Sin}\Big[2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{a\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+a\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]+\Big(-2\,c\,\mathrm{Log}[1-a]+a\,\Big(-4\,\mathrm{ArcCoth}[1+2\,c]+$$
$$\mathrm{Log}\Big[\Big(a-\frac{1}{c}\Big)^2\Big]+c\,\big(2\,a\,\mathrm{Log}[1+a]+c\,\mathrm{Log}[(a-c)^2]-2\,c\,\mathrm{Log}[1+c]\big)\Big)\Big)$$
$$\mathrm{Sin}\Big[2\,(\pi-\alpha)+2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{a\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+a\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]\Big)-1/\big(2\,(a-c)^2\,(-1+a\,c)^2\big)$$
$$a\,\pi\,\big(1+c^2+2\,c\,\mathrm{Cos}[\alpha]\big)\,\Big(a\,\big(1+c^2\big)\,\pi+2\,\Big(a\,c\,\pi\,\mathrm{Cos}[\alpha]+a\,c\,(-a+c)\,\pi\,\mathrm{Cos}\Big[2\,\mathrm{ArcTan}\Big[$$
$$\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]+a\,(a-c)\,c\,\pi\,\mathrm{Cos}\Big[2\,(\pi-\alpha)+2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]-$$
$$2\,a\,c\,(2\,\mathrm{Log}[1+a]+\mathrm{Log}[(-1+c)/((1+c)\,(-a+c)\,(-1+a\,c))])\,\mathrm{Sin}\Big[$$
$$\alpha-2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]+a\,c^2\,\mathrm{Log}\Big[-1+\frac{1}{c}\Big]\,\mathrm{Sin}\Big[2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]-$$
$$a\,\mathrm{Log}[c\,(1+c)]\,\mathrm{Sin}\Big[2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]-c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{-a+c}{c+a\,c}\Big]$$
$$\mathrm{Sin}\Big[2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]-a^2\,c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{1-a\,c}{c+a\,c}\Big]\,\mathrm{Sin}\Big[2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]+$$
$$a\,\mathrm{Log}[1-c]\,\mathrm{Sin}\Big[2\,(\pi-\alpha)+2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]-$$

$$a\,c^2\,\mathrm{Log}[1+c]\,\mathrm{Sin}\Big[2\,(\pi-\alpha)+2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]-$$
$$a^2\,c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{-a+c}{1+a}\Big]\,\mathrm{Sin}\Big[2\,(\pi-\alpha)+2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]-$$
$$c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{1-a\,c}{1+a}\Big]\,\mathrm{Sin}\Big[2\,(\pi-\alpha)+2\,\mathrm{ArcTan}\Big[\frac{c\,\mathrm{Sin}[\alpha]}{1+c\,\mathrm{Cos}[\alpha]}\Big]\Big]\Big)\Big)\Big)\Big)\Big/$$
$$\Big(4\,a\,c\,\pi\,\Big(2\,\big(1+a^2\big)\,c\,\mathrm{ArcTanh}[a]\,\mathrm{Cos}[\alpha]+a\,\Big(-2\,\big(1+c^2\big)\,\mathrm{ArcTanh}[c]\,\mathrm{Cos}[\alpha]-$$
$$2\,c\,\mathrm{Log}\Big[\frac{(-1+a)\,(1+c)}{(1+a)\,(-1+c)}\Big]+(a-c)\,c\,\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha]\Big)\Big)\Big)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{3\,\mathrm{Cos}[\alpha]}{4\,(4+\pi\,\mathrm{Sin}[\alpha])}$$

```
(*Численное решение системы*)

resh[δbar1_, hbar1_, an_, cn_] :=
 FindRoot[Evaluate[{eq1 == δbar1, eq2 == hbar1} /. {α → αat}],
  {{a, an, -1 + eps, -eps}, {c, cn, eps, 1 - eps}}]

eps = 10^(-14)
δbar = 1.
```

```
αat = 45 / 180 * Pi
smax = 0.5
nn = 100
res = Table[Module[{hbar, st}, hbar = (i - 1) Sin[αat] / (nn - 1) * smax;
    If[i == 1, an[i] = -0.5; bn[i] = 0.5, an[i] = ad[i - 1]; bn[i] = bd[i - 1]];
    st = resh[δbar, hbar, Evaluate[an[i]], Evaluate[bn[i]]]; ad[i] = st[[1, 2]];
    bd[i] = st[[2, 2]]; {hbar, rn /. st /. α → αat, (dd /. st /. α → αat)}], {i, 1, nn}];
```

$$\frac{1}{100\,000\,000\,000\,000}$$

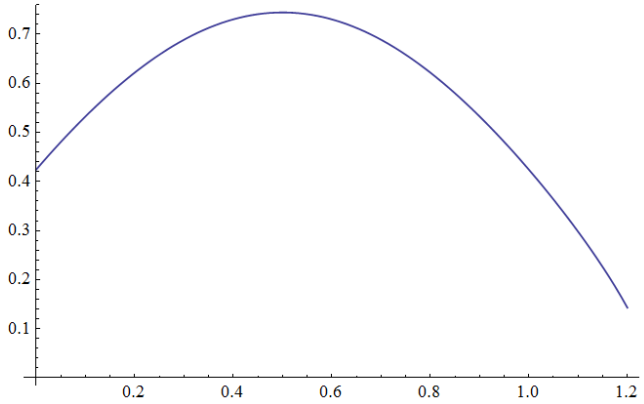
1.

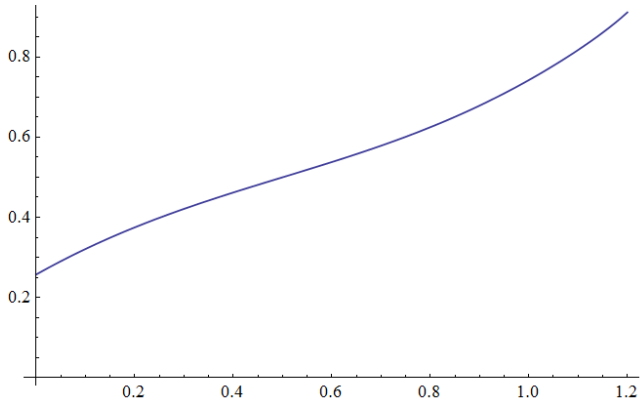
$$\frac{\pi}{4}$$

0.5

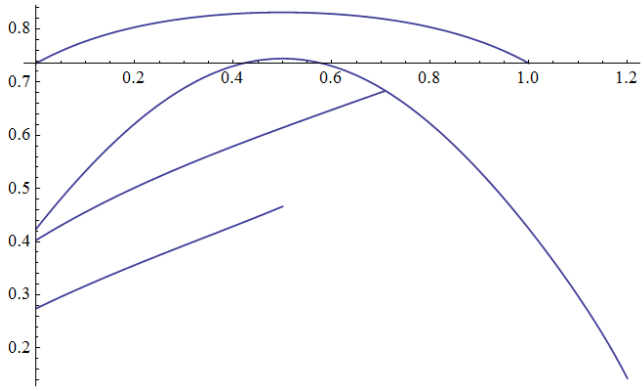
100

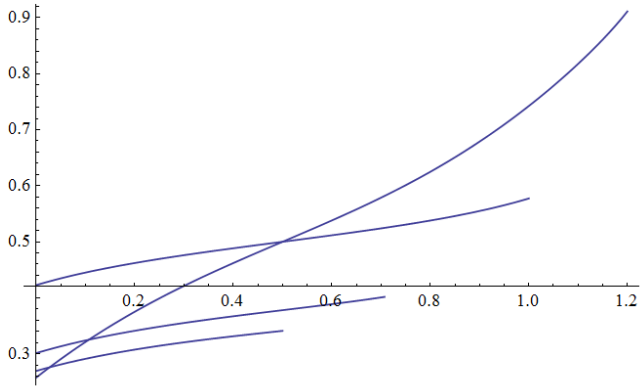
```
grn2 = ListPlot[res /. {x_, y_, z_} → {x, y}, Joined → True]
grm2 = ListPlot[res /. {x_, y_, z_} → {x, z}, Joined → True]
```






```
Show[grn1, grn2, grn3, grn4, PlotRange → All]
Show[grm1, grm2, grm3, grm4, PlotRange → All]
```



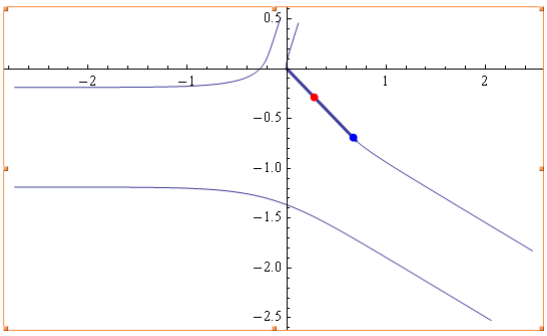



```
(* картинка*)
δbar = 1.
hz = 0.4
lz = 0.4
αat = 46. / 180 * Pi
ss = 0.4 + hz / Sin[αat]
gcirc = Graphics[{Red, Disk[{lz Cos[αat], -lz Sin[αat]}, 0.04]}];
gcirc1 = Graphics[{Blue, Disk[{ss Cos[αat], -ss Sin[αat]}, 0.04]}];
hbar = ss * Sin[αat]
st = resh[δbar, hbar, -0.5, 0.5]
ar = st[[1, 2]]
cr = st[[2, 2]]
zz[ξ_] = (ω[ξ] - aa) / ii /. st /. σ → Pi - αat
dl1 = ar + 1
epsa = 0.0001
eps1 = dl1 * epsa
dl2 = cr - ar
eps2 = dl2 * epsa
dl3 = 1 - cr
eps3 = dl3 * epsa
```

```
fig1 = ParametricPlot[{Re[zz[ξ]], Im[zz[ξ]]}, {ξ, -1, ar - eps1}, PlotRange → All];
fig2 = ParametricPlot[{Re[zz[ξ]], Im[zz[ξ]]}, {ξ, ar + eps1, -eps2}, PlotRange → All];
fig3 = ParametricPlot[{Re[zz[ξ]], Im[zz[ξ]]}, {ξ, eps2, cr - eps3}, PlotRange → All];
fig4 = ParametricPlot[{Re[zz[ξ]], Im[zz[ξ]]}, {ξ, cr + eps3, 1}, PlotRange → All];
figpl = ParametricPlot[{Cos[αat] * x, -Sin[αat] x}, {x, 0, 1}, PlotStyle → Thick];
Show[fig1, fig2, fig3, fig4, figpl, gcirc, gcirc1, PlotRange → All]
```

```
1.

0.4

0.4

0.802851

0.956065

0.687736
```

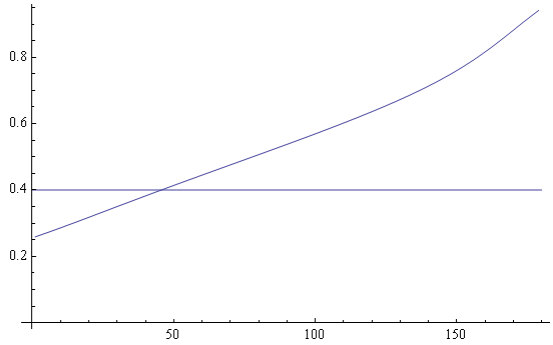
```
{a → -0.596044, c → 0.523302}

-0.596044

0.523302

0.31831 ((3.71204 - 0.61916 i) - (0.392082 - 0.711225 i) Log[-1.91094 + ξ] -
    (0.697108 - 0.416664 i) Log[-0.523302 + ξ] + Log[ξ] -
    (0.0568415 + 0.179056 i) Log[0.596044 + ξ] + (0.180931 + 0.0505579 i) Log[1.67773 + ξ])

0.403956

0.0001

0.0000403956

1.11935

0.000111935

0.476698

0.0000476698
```




```
(*Диаграмма устойчивости*)

lz = 0.4
eps = 10^(-14)
hz = 0.4
δbar = 1.
nn = 179
res = Table[Module[{hbar, st}, αat = i / 180 * Pi; hbar = lz * Sin[αat] + hz;
    If[i == 1, an[i] = -0.5; bn[i] = 0.5, an[i] = ad[i - 1]; bn[i] = bd[i - 1]];
    st = resh[δbar, hbar, Evaluate[an[i]], Evaluate[bn[i]]]; ad[i] = st[[1, 2]];
    bd[i] = st[[2, 2]]; {αat, rn /. st /. α → αat, (dd /. st /. α → αat)}], {i, 1, nn}];
grst = ListPlot[res /. {x_, y_, z_} → {x / Pi * 180, z}, Joined → True];
grd = Plot[lz, {x, 0, 180}];
Show[grst, grd]

0.4
```

$$\frac{1}{100\,000\,000\,000\,000}$$

```
0.4

1.

179
```



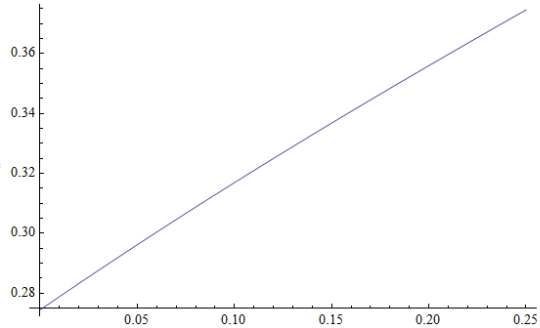

```
res[[90]]
```

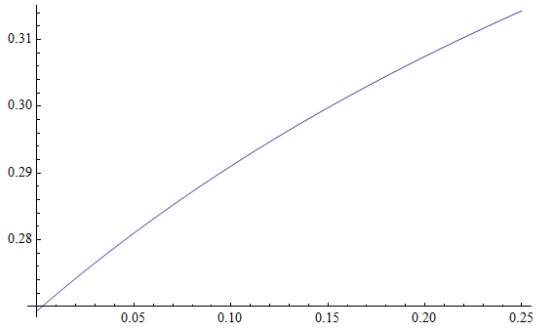
$\left\{\frac{\pi}{2}, 0.744322, 0.5\right\}$

Результаты расчетов

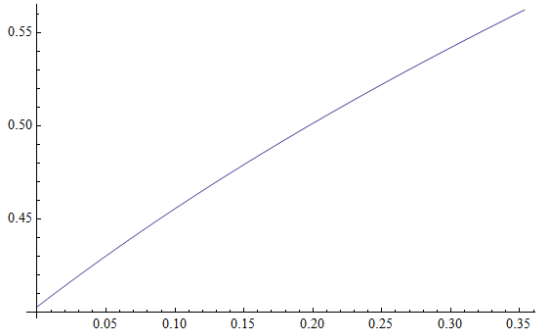
$\bar{\delta}$ – ширина струи, s_{max} – ось струи, α – угол атаки

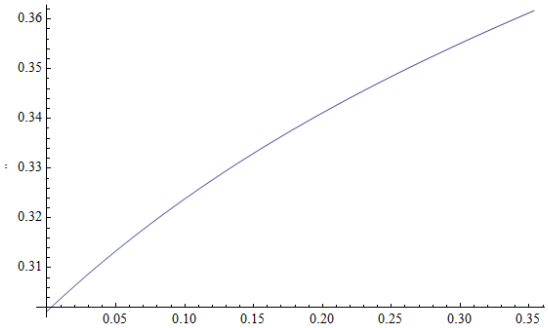
1) $\bar{\delta} = 1$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 30°$



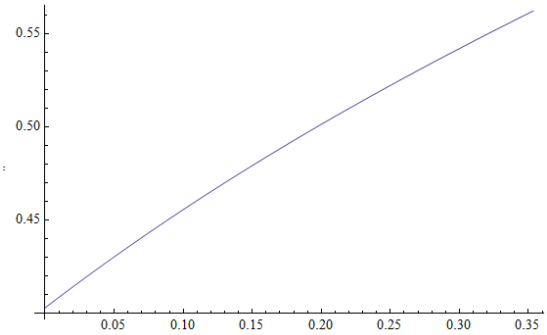


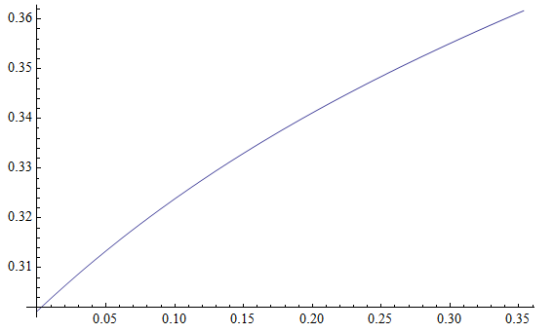
$\bar{\delta} = 1$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 45°$



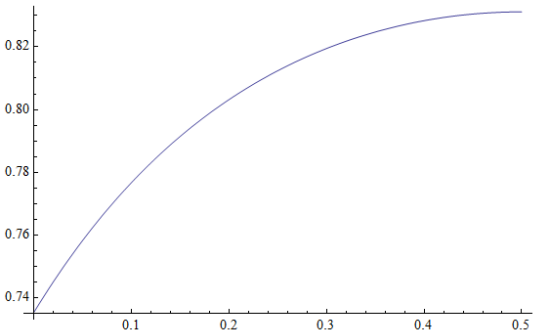


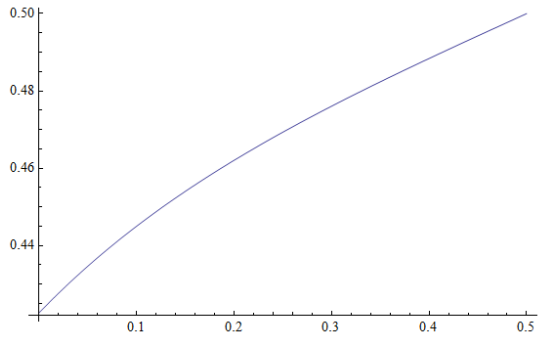
$\bar{\delta} = 1$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 60°$



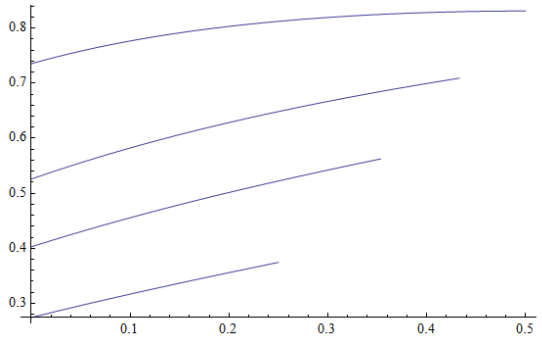


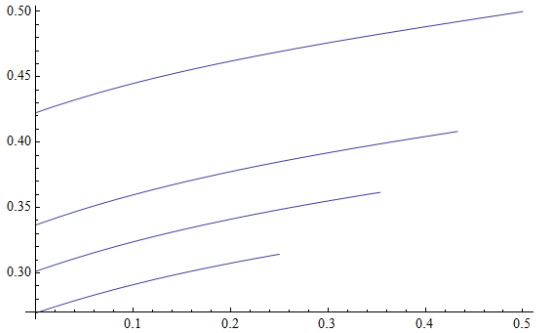
$\bar{\delta} = 1$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 90°$



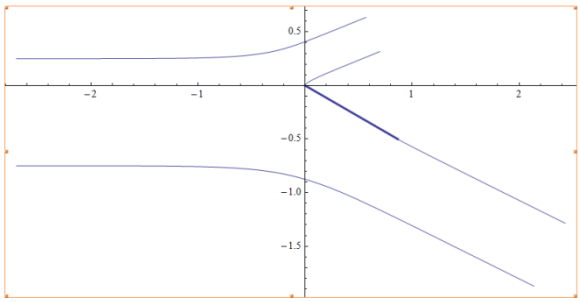


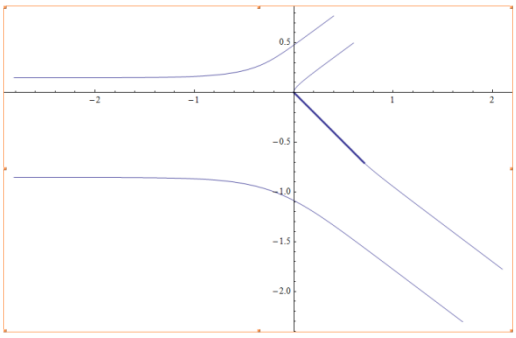
Общее

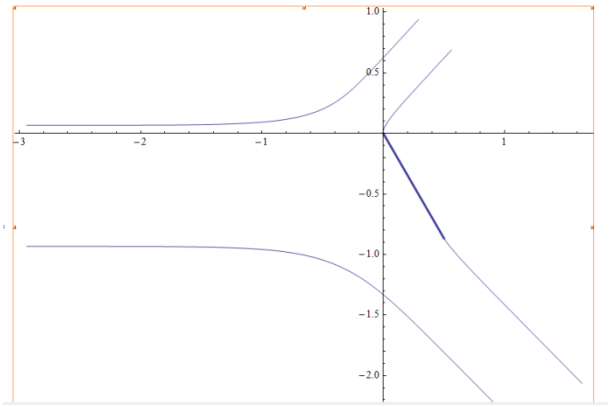


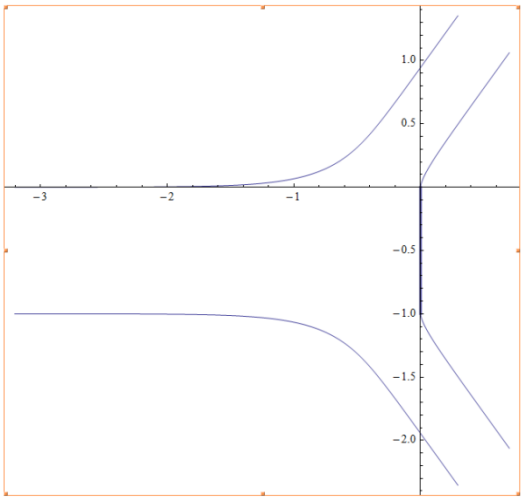


Картина натекания струи жидкости на пластину при углах атаки $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$, $\alpha = 90°$:

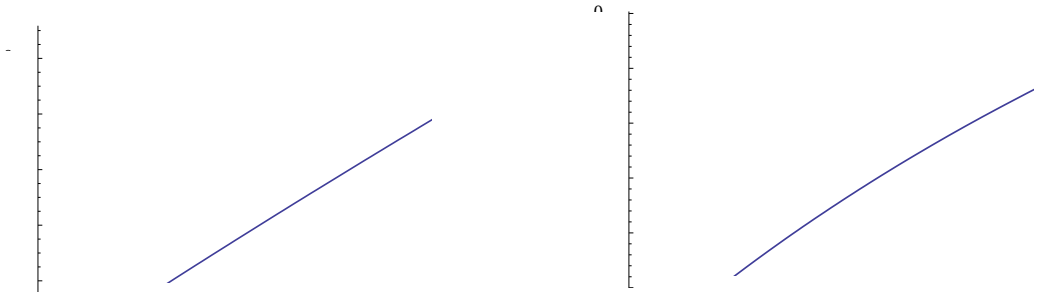




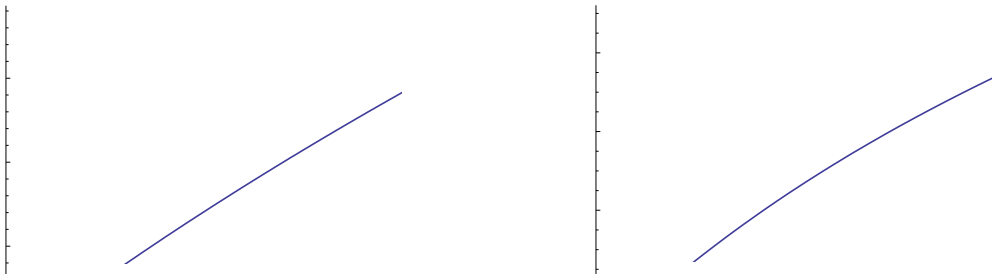




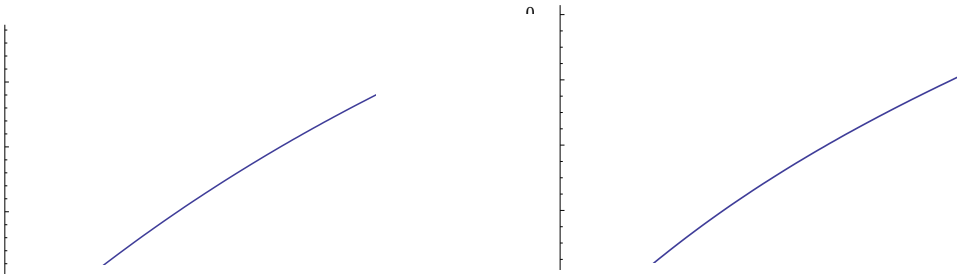
2) $\bar{\delta} = 0.8$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 30°$



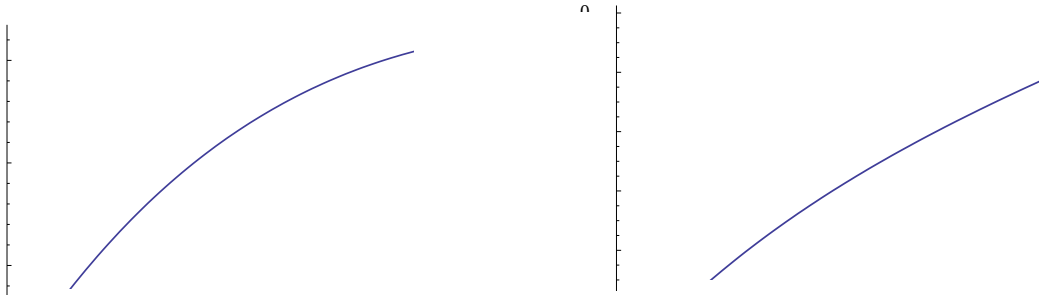
$\bar{\delta} = 0.8$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 45°$



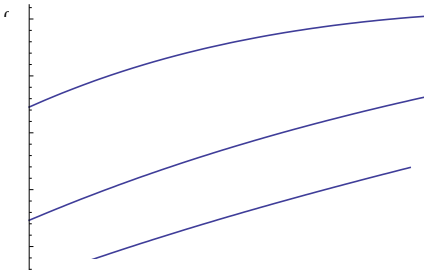
$\bar{\delta} = 0.8$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 60°$

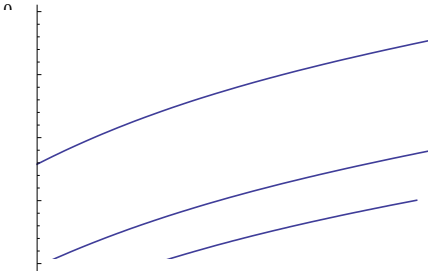


$\bar{\delta} = 0.8$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 90°$

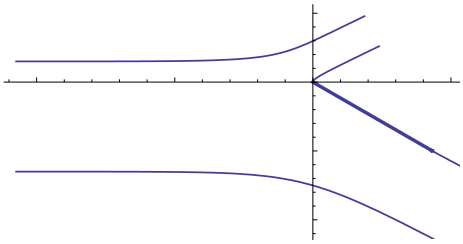


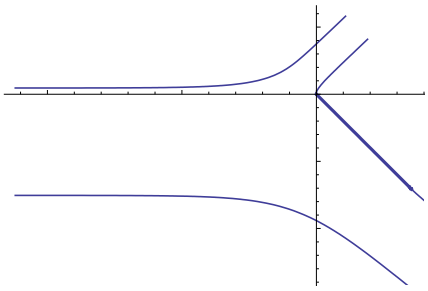
Общее

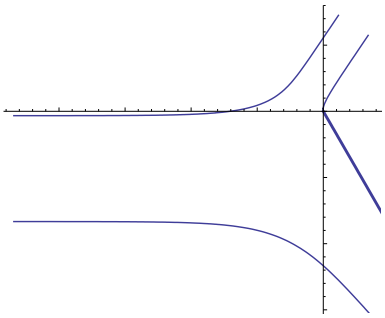


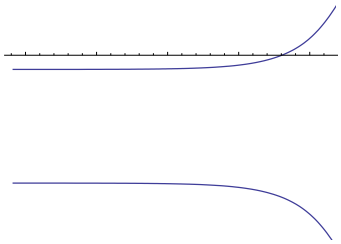


Картина натекания струи жидкости на пластину при углах атаки $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$, $\alpha = 90°$:

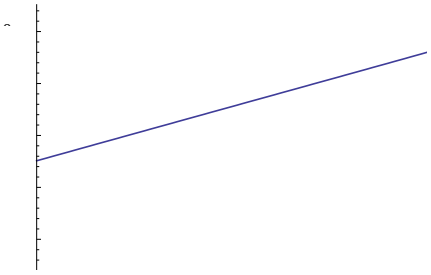


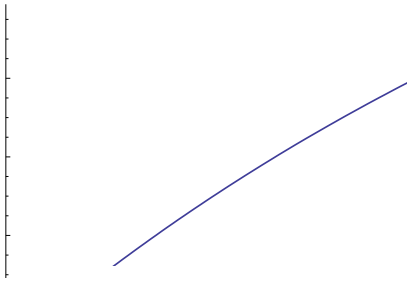




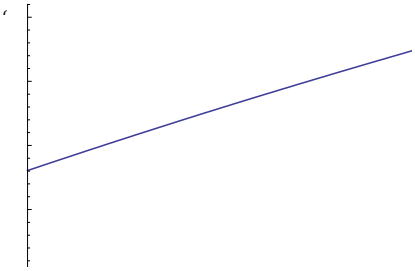


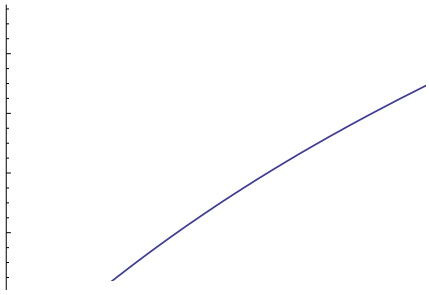
3) $\bar{\delta} = 0.6$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 30°$



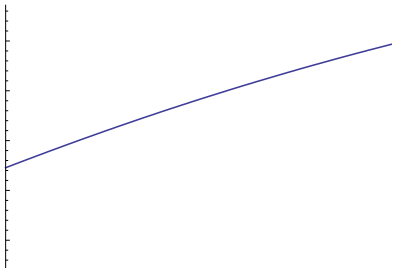


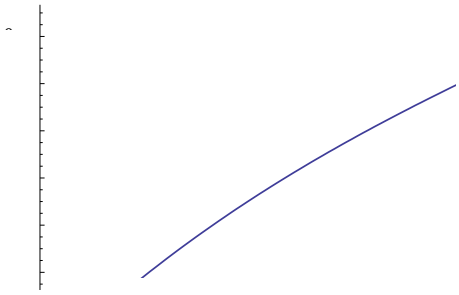
$\bar{\delta} = 0.6$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 45°$



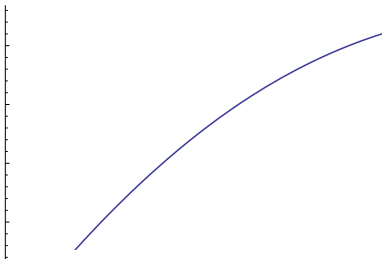


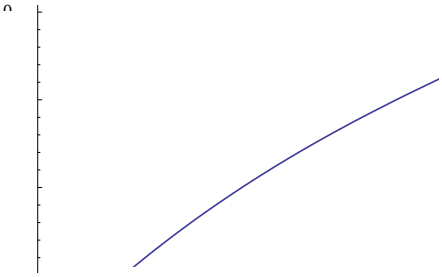
$\bar{\delta} = 0.6$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 60°$



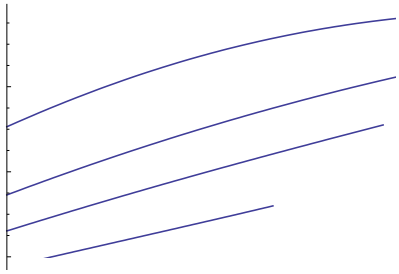


$\bar{\delta} = 0.6$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 90°$

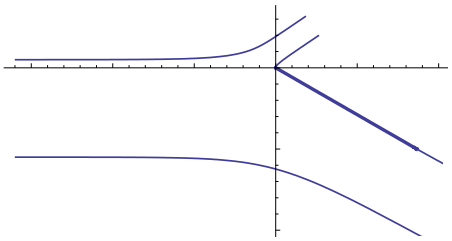


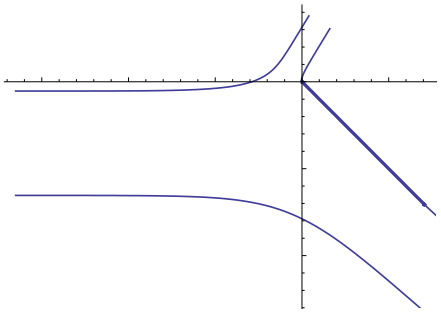


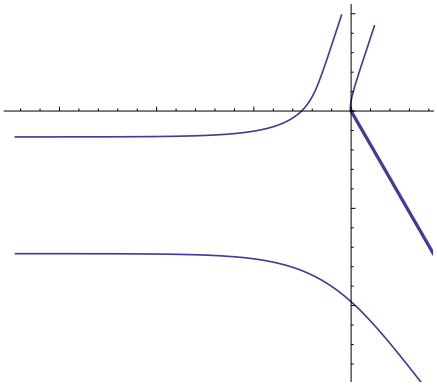
Общее

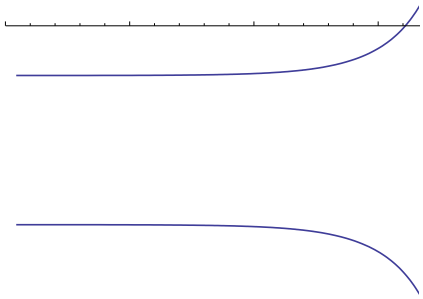


Картина натекания струи жидкости на пластину при углах атаки $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$, $\alpha = 90°$:

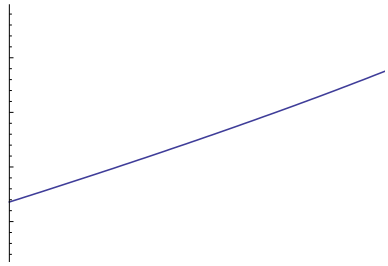


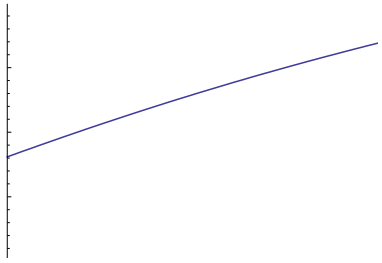




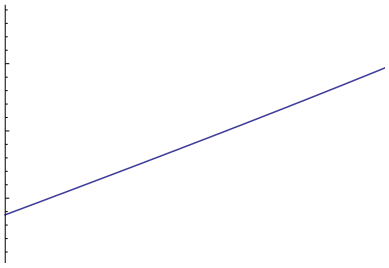


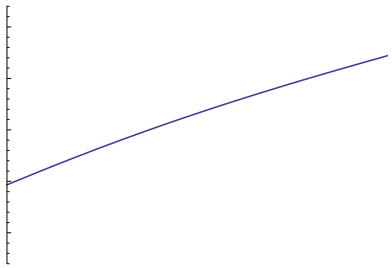
4) $\bar{\delta} = 0.4$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 30°$



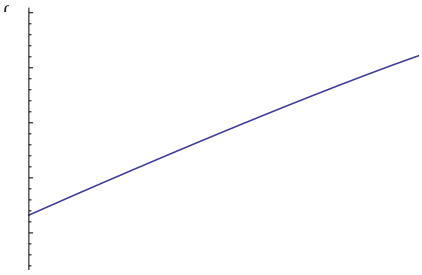


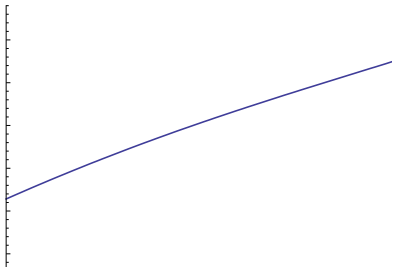
$\bar{\delta} = 0.4$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 45°$



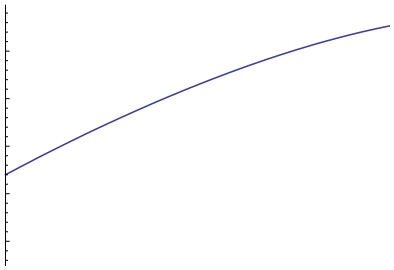


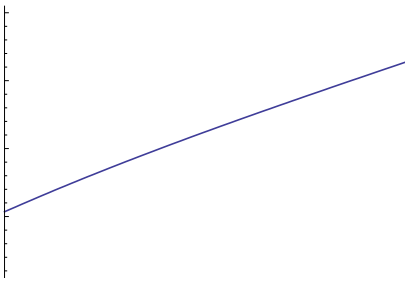
$\bar{\delta} = 0.4$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 60°$



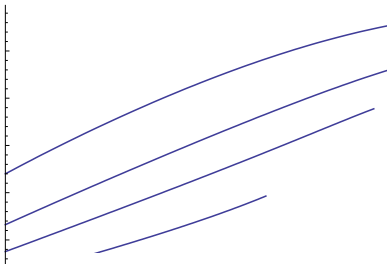


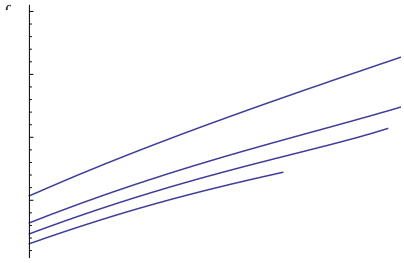
$\bar{\delta} = 0.4$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 90°$



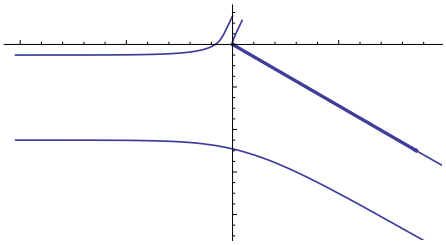


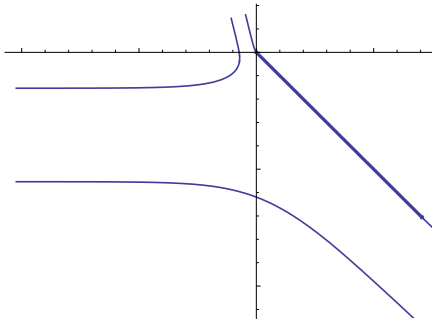
Общее

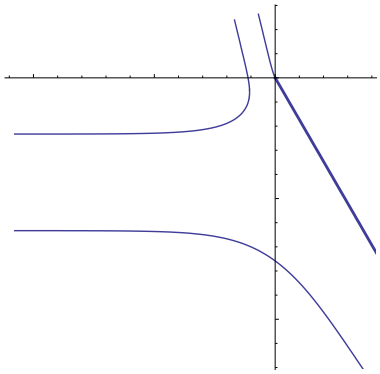


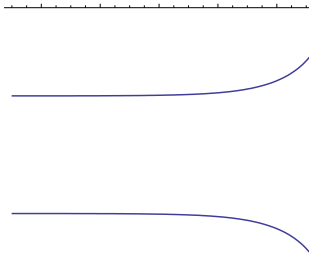


Картина натекания струи жидкости на пластину при углах атаки $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$, $\alpha = 90°$:

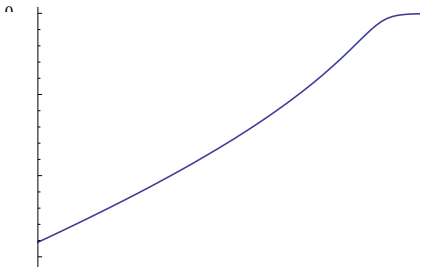


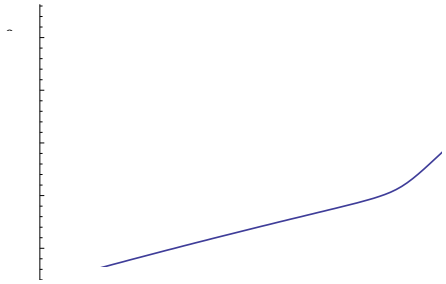




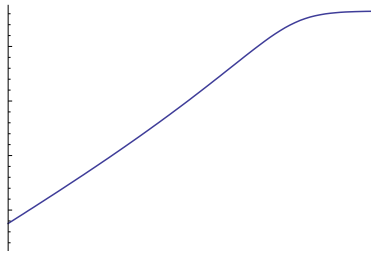


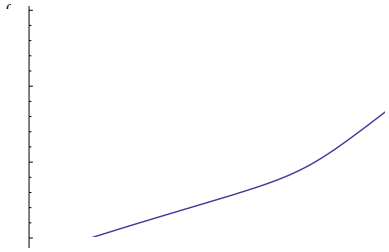
5) $\bar{\delta} = 0.2$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 30°$



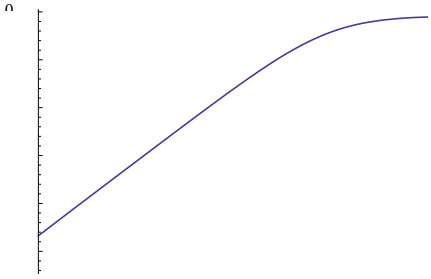


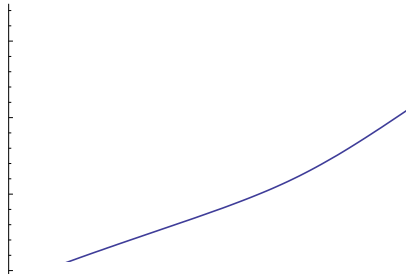
$\bar{\delta} = 0.2$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 45°$



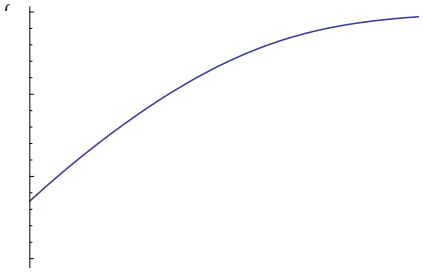


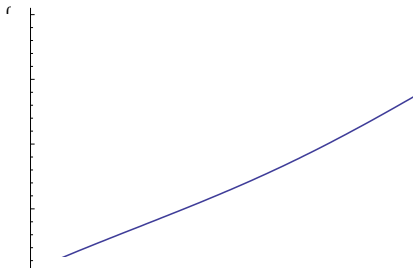
$\bar{\delta} = 0.2$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 60°$



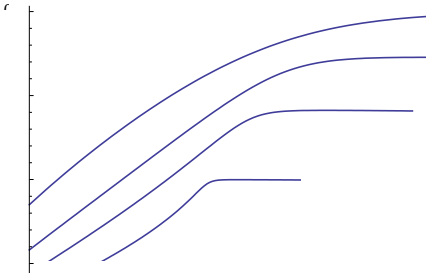


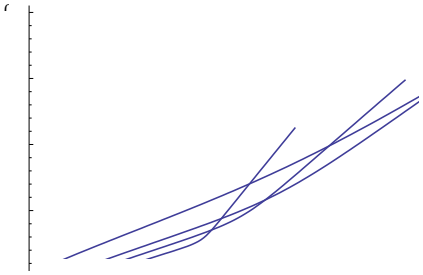
$\bar{\delta} = 0.2$, $s_{max} = 0.5$, $\alpha = 90°$



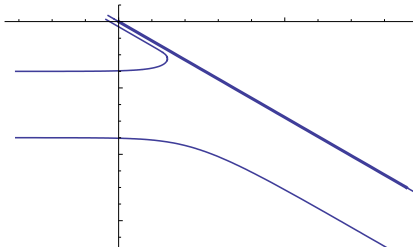


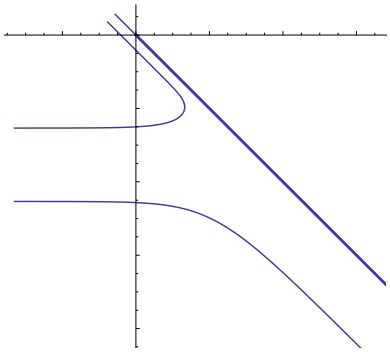
Общее

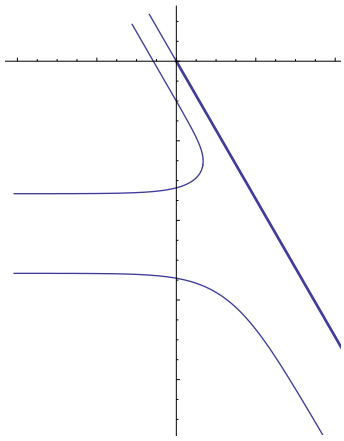


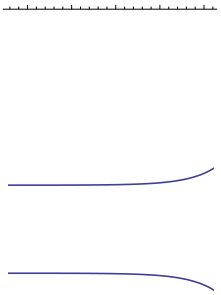


Картина натекания струи жидкости на пластину при углах атаки $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$, $\alpha = 90°$:

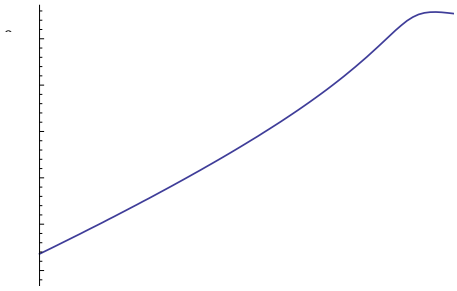


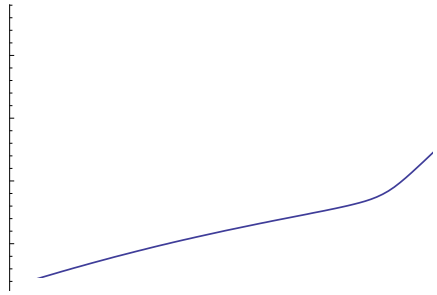




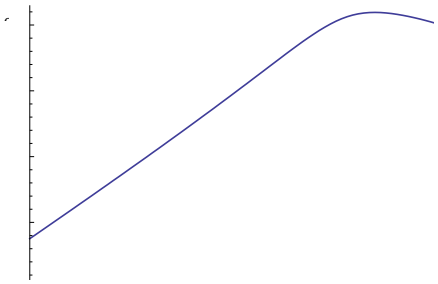


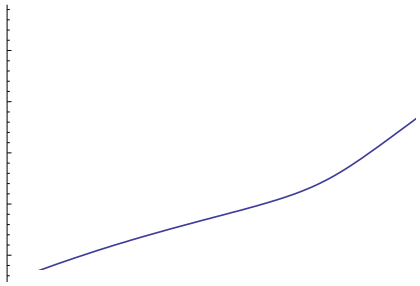
6) $\bar{\delta} = 0.4$, $s_{max} = 1$, $\alpha = 30°$



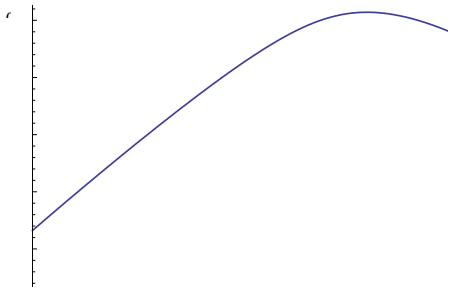


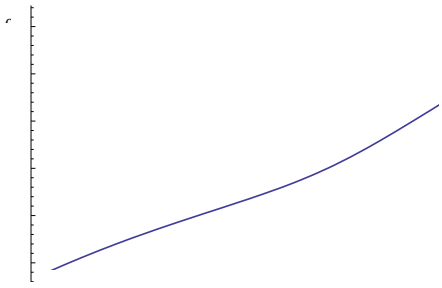
$\bar{\delta} = 0.4$, $s_{max} = 1$, $\alpha = 45°$



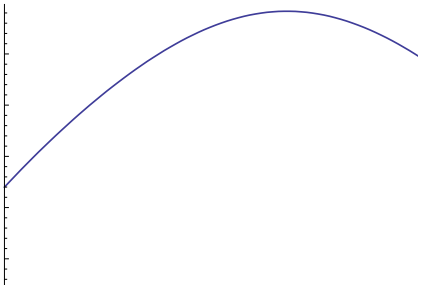


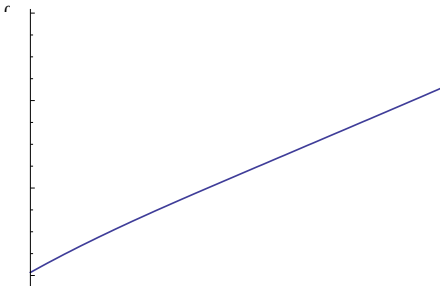
$\bar{\delta} = 0.4$, $s_{max} = 1$, $\alpha = 60°$



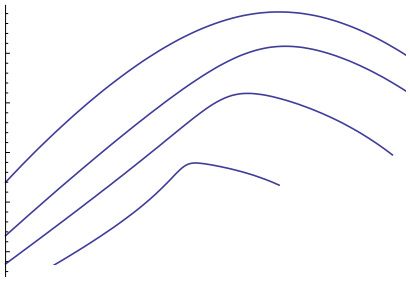


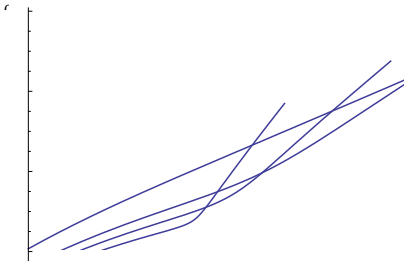
$\bar{\delta} = 0.4$, $s_{max} = 1$, $\alpha = 90°$



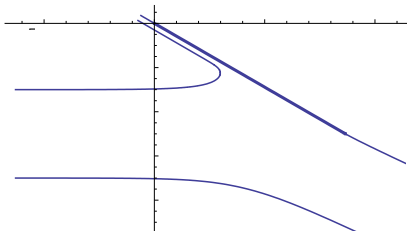


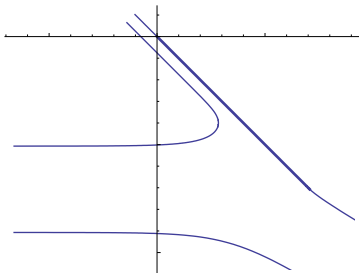
Общее

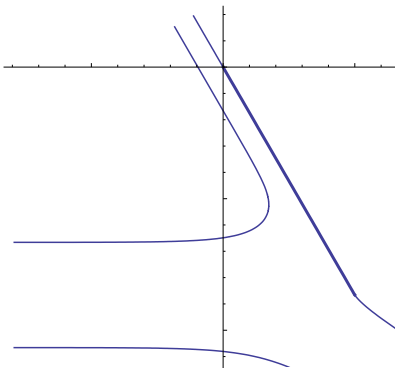


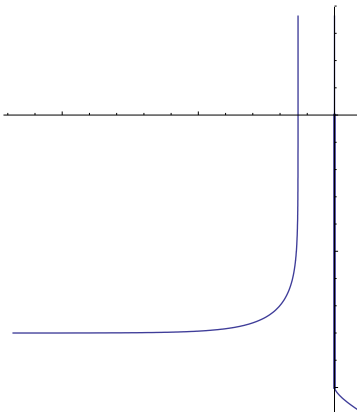


Картина натекания струи жидкости на пластину при углах атаки $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$, $\alpha = 90°$:









Заключение

Решена задача о натекании струи жидкости на наклонную пластинку. С помощью интегральных теорем найдены сила и момент, действующие на пластинку. Проведены числовые расчеты, демонстрирующие влияние толщины струи и сдвига ее оси на геометрию течения и силовые характеристики.

Список используемой литературы

1. FRANC, J.-P. MICHEL, J.-M. 2004 Fundamentals of Cavitation. Fluid Mechanics and its Applications, vol. 76, Kluwer Academic.
2. Alexey G. Terentiev, Ivan N.Kirschner, James S. Uhlman. The HIDRODINAMICS OF CAVITATING FLOW, 2011 Backbone Publishing Company.
3. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М. Наука 1979 г., 536 с.
4. Биркгоф, Сарантонелло Струи, следы и каверны. М. 1964 г.
5. Д. В. Маклаков. Аналог теоремы Кутта – Жуковского при обтекании профиля с отрывом струй.
6. Л. И. Седов Механика сплошной среды, том 2, М. Наука 1970 г., 568 с.