ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

УДК 517.968:519.6

Р.Т. ВАЛЕЕВА, И.К. РАХИМОВ

ОБ ОДНОМ ПРЯМОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СЛАБОСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Введение

Работа является естественным продолжением работ [1]–[5] по сплайн-тригонометрическому методу Галёркина, предложенному в [1]. Здесь дается теоретическое обоснование указанного метода для слабосингулярного интегрального уравнения I рода с разностными логарифмическими ядрами в главной части интегрального оператора

$$(Ax)(s,\sigma) \equiv \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\sin\frac{\xi-s}{2}\right| \ln\left|\sin\frac{\eta-\sigma}{2}\right| x(\xi,\eta)d\xi\, d\eta + \\ + \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma;\xi,\eta)x(\xi,\eta)d\xi\, d\eta = y(s,\sigma), \quad (1)$$

где $h(s,\sigma;\xi,\eta)$ и $y(s,\sigma)$ — данные непрерывные функции, 2π-периодические относительно аргументов s и σ, а $x(s,\sigma)$ — искомая функция из $L_2([-\pi,\pi]^2)$.

1. Вычислительная схема

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде двумерного сплайна

$$x_{nm}(s,\sigma) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m} \alpha_{kj}\varphi_{kn}(s)\varphi_{jm}(\sigma), \quad n,m\in\mathbb{N}, \quad (2)$$

где $\varphi_{kn}(s)$ и $\varphi_{jm}(\sigma)$ суть 2π-периодические фундаментальные сплайны первой степени по системам узлов соответственно

$$s_{kn} = \frac{2k\pi}{2n+1}, \ \ k=\overline{-n,n}; \ \ \sigma_{jm} = \frac{2j\pi}{2m+1}, \ \ j=\overline{-m,m}. \quad (3)$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_{kj}\in\mathbb{R}$ ($k=\overline{-n,n}$, $j=\overline{-m,m}$) будем определять из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m} \alpha_{kj} c_{rl}(A\varphi_{kn}\varphi_{jm}) = c_{rl}(y), \quad r=\overline{-n,n}, \ \ l=\overline{-m,m}, \quad (4)$$

где

$$c_{rl}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s,\sigma)e^{-i(rs+l\sigma)}ds\, d\sigma, \quad r=0,\pm1,\ldots, \ \ l=0,\pm1,\ldots, \quad (5)$$

— двойные коэффициенты Фурье в комплексной форме функции $f\in L_2([-\pi,\pi]^2)$.

2. Основной результат

Обозначим через $X = L_2([-\pi, \pi]^2)$ пространство квадратично-суммируемых по Лебегу в квадрате $[-\pi, \pi; -\pi, \pi] \equiv [-\pi, \pi]^2$ функций $x = x(s, \sigma)$ с нормой

$$\|x\|_X = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(s, \sigma)|^2 ds\, d\sigma \right\}^{1/2}, \quad x \in X.$$

Пусть $Y = \widetilde{W}_2^{1,2,1}([-\pi, \pi]^2)$ — множество всех непрерывных 2π-периодических по каждой из переменных функций $y = y(s, \sigma)$, имеющих обобщенные производные по Соболеву

$$\frac{\partial}{\partial s} y(s, \sigma), \ \frac{\partial}{\partial \sigma} y(s, \sigma), \ \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial \sigma} y(s, \sigma) \in X.$$

После введения нормы

$$\|y\|_Y = \|y(s, \sigma)\|_X + \left\| \frac{\partial}{\partial s} y(s, \sigma) \right\|_X + \left\| \frac{\partial}{\partial \sigma} y(s, \sigma) \right\|_X + \left\| \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial \sigma} y(s, \sigma) \right\|_X, \quad y \in Y,$$

множество Y превращается в полное линейное нормированное пространство. Обозначим через

$$E_{nm}(\varphi)_X = \inf_{\alpha_{kj} \in \mathbb{R}} \left\| \varphi(s, \sigma) - \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} \alpha_{kj} \varphi_{kn}(s) \varphi_{jm}(\sigma) \right\|_X$$

наилучшее среднеквадратическое приближение функции $\varphi(s, \sigma) \in X$ всевозможными сплайнами вида (2).

Для вычислительной схемы (1)–(4) справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

а) *$y(s, \sigma) \in Y$, а $h(s, \sigma; \xi, \eta) \in Y$ по переменной $(s, \sigma) \in [-\pi, \pi]^2$ равномерно относительно $(\xi, \eta) \in [-\pi, \pi]^2$ и $h(s, \sigma; \xi, \eta) \in X$ по переменной $(\xi, \eta) \in [-\pi, \pi]^2$ равномерно относительно $(s, \sigma) \in \mathbb{R}^2$;*

б) *уравнение (1) имеет единственное решение $x^*(s, \sigma) \in X$ при любой правой части $y(s, \sigma) \in Y$.*

Тогда при всех n и $m \in \mathbb{N}$, хотя бы достаточно больших, СЛАУ (4) имеет единственное решение α_{kj}^* ($k = \overline{-n, n}$, $j = \overline{-m, m}$). Приближенные решения

$$x_{nm}^*(s, \sigma) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} \alpha_{kj}^* \varphi_{kn}(s) \varphi_{jm}(\sigma) \tag{2*}$$

сходятся при $n \to \infty$, $m \to \infty$ к точному решению $x^*(s, \sigma)$ в пространстве X со скоростью

$$\|x^*(s, \sigma) - x_{nm}^*(s, \sigma)\|_X = O\{E_{nm}(x^*)_X\}. \tag{6}$$

Доказательство. В условиях а) теоремы сингулярное интегральное уравнение (1) эквивалентно линейному операторному уравнению

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{7}$$

где

$$G(x; s, \sigma) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \sin \frac{\xi - s}{2} \right| \ln \left| \sin \frac{\eta - \sigma}{2} \right| x(\xi, \eta) d\xi\, d\eta,$$
$$T(x; s, \sigma) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(s, \sigma; \xi, \eta) x(\xi, \eta) d\xi\, d\eta,$$

причем $G : X \to Y$ является непрерывно обратимым, а $T : X \to Y$ — вполне непрерывным операторами. Поэтому (7) является уравнением, приводящимся в смысле ([6], гл. 14) к уравнению второго рода в полном линейном нормированном пространстве X. Отсюда и из условия б) теоремы следует, что операторы $A : X \to Y$ и $G^{-1}A : X \to X$ являются непрерывно обратимыми, причем

$$\|A^{-1}\|_{Y\to X} \le a_1 \le \infty, \quad \|(G^{-1}A)^{-1}\|_{X\to X} = \|A^{-1}G\|_{X\to X} \le a_2 < \infty,$$
$$\|G^{-1}\|_{Y\to X} \le a_3 < \infty, \quad \|G\|_{X\to Y} < a_0 < \infty, \tag{8}$$

где a_i — (здесь и далее) положительные постоянные.

Обозначим через X_{nm} множество всех 2π-периодических сплайнов вида (2), наделенное нормой пространства X. Тогда

$$X_{nm} \subset X \quad \text{и} \quad \dim X_{nm} = (2n+1)(2m+1) < \infty. \tag{9}$$

Пусть Y_{nm} — множество всех двумерных тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m} \beta_{kj} e^{i(ks+j\sigma)}, \quad \beta_{kj} \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

наделенное нормой пространства Y. Тогда

$$Y_{nm} \subset Y \quad \text{и} \quad \dim Y_{nm} = (2n+1)(2m+1) < \infty. \tag{10}$$

Введем оператор проектирования $\Phi_{nm} : Y \to Y_{nm}$ по формуле

$$\Phi_{nm}(f; s, \sigma) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m} c_{kj}(f) e^{i(ks+j\sigma)}, \quad f \in Y, \tag{11}$$

где коэффициенты $c_{kj}(f)$ определяются по формуле (5).

Известно (см., напр., [7], [8]), что Φ_{nm} является линейным проекционным оператором и

$$\|\Phi_{nm}\| = 1, \quad \Phi_{nm} : Y \to Y \quad (n+1, m+1 \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

Более того, операторы Φ_{nm} определены также в пространстве X и

$$\|\Phi_{nm}\| = 1, \quad \Phi_{nm} : X \to X \quad (n+1, m+1 \in \mathbb{N}). \tag{12°}$$

Нетрудно доказать, что СЛАУ (4) эквивалентна операторному уравнению

$$A_{nm}x_{nm} \equiv \Phi_{nm}Gx_{nm} + \Phi_{nm}Tx_{nm} = \Phi_{nm}y \quad (x_{nm} \in X_{nm}, \quad \Phi_{nm}y \in Y_{nm}), \tag{13}$$

где в силу сказанного выше об уравнении (7) и операторах Φ_{nm} оператор $A_{nm} : X_{nm} \to Y_{nm}$ является линейным непрерывным равномерно относительно n и $m \in \mathbb{N}$. Отсюда видно, что (13) не является уравнением, приводящимся к уравнению II рода в обычном смысле (см., напр., [6], гл. 14, § 2). Тем не менее докажем, что (13) является уравнением, приводящимся к уравнению II рода в обобщенном смысле. С этой целью рассмотрим характеристические уравнения вида

$$Gx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{7°}$$
$$G_{nm}x_{mn} \equiv \Phi_{nm}Gx_{nm} = \Phi_{nm}y \quad (x_{nm} \in X_{nm}, \quad \Phi_{nm}y \in Y_{nm}). \tag{13°}$$

Покажем, что не только оператор $G : X \to Y$, но и операторы $G_{nm} : X_{nm} \to Y_{nm}$ являются непрерывно обратимыми при любых натуральных n и $m \in \mathbb{N}$. Прежде всего отметим, что Φ_{nm} и G являются перестановочными:

$$\Phi_{nm}(Gx) = G(\Phi_{nm}x), \quad x \in X. \tag{14}$$

Отсюда и из (8) для любого $x_{nm} \in X_{nm}$ находим

$$\|G_{nm}x_{nm}\|_Y = \|\Phi_{nm}Gx_{nm}\|_Y = \|G\Phi_{nm}x_{nm}\|_Y \ge \frac{1}{\|G^{-1}\|_{Y\to X}}\|\Phi_{nm}x_{nm}\|_X \ge \frac{1}{a_3}\|\Phi_{nm}x_{nm}\|_X. \tag{15}$$

Известно, что для любой функции $f(s,\sigma) \in X$

$$\Phi_{nm} f = \Phi_{n,\infty} \Phi_{\infty,m} f = \Phi_{\infty,m} \Phi_{n,\infty} f,$$

где

$$\Phi_{n,\infty}(f;s,\sigma) = \sum_{k=-n}^{n} c_{k,\infty}(f) e^{iks}, \quad c_{k,\infty}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s,\sigma) e^{-iks} ds,$$

$$\Phi_{\infty,m}(f;s,\sigma) = \sum_{j=-m}^{m} c_{\infty,j}(f) e^{ij\sigma}, \quad c_{\infty,j}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s,\sigma) e^{-ij\sigma} d\sigma.$$

Отсюда

$$c_{kj}(f) = c_{k,\infty} c_{\infty,j}(f) = c_{\infty,j} c_{k,\infty}(f), \quad f \in X. \tag{16}$$

Поэтому с помощью повторного применения леммы 5.2 ([4], гл. I) и равенства Парсеваля для любого $x_{nm} \in X_{nm}$ последовательно находим

$$\|\Phi_{nm} x_{nm}\|_X^2 = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} |c_{kj}(x_{nm})|^2 = \sum_{j=-m}^{m} \sum_{k=-n}^{n} |c_{k,\infty}[c_{\infty,j}(x_{nm})]|^2 \geq$$
$$\geq \sum_{j=-m}^{m} \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{k,\infty}[c_{\infty,j}(x_{nm})]|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-m}^{m} |c_{\infty,j}[c_{k,\infty}(x_{nm})]|^2 \geq$$
$$\geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_{\infty,j}[c_{k,\infty}(x_{nm})]|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^8 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_{\infty,j} c_{k,\infty}(x_{nm})|^2 =$$
$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^8 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_{k,j}(x_{nm})|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^8 \|x_{nm}\|_X^2. \tag{17}$$

Из соотношений (15)–(17) для любого сплайна $x_{nm} \in X_{nm}$ получаем неравенство

$$\|G_{nm} x_{nm}\|_Y \geq \frac{1}{a_3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \|x_{nm}\|_X \quad (n,m \in \mathbb{N}). \tag{18}$$

Известно (см., напр., [6], с. 208–209), что из (18) следует левосторонняя обратимость операторов $G_{nm} : X_{nm} \to Y_{nm}$ при любых n и $m \in \mathbb{N}$ и справедливость неравенств

$$\|(G_{nm})_l^{-1}\| \leq a_3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \quad (n,m \in \mathbb{N}).$$

Отсюда и из соотношений (9) и (10) следует двусторонняя обратимость операторов $G_{nm} : X_{nm} \to Y_{nm}$ и справедливость оценок

$$\|G_{nm}^{-1}\|_{Y_{nm}\to X_{nm}} \leq a_3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \quad (n,m \in \mathbb{N}). \tag{19}$$

В силу (8) и (19) к уравнениям (7°) и (13°) применима лемма 2.2 ([4], гл. I)

$$\|G^{-1}y - G_{nm}^{-1}\Phi_{nm} y\|_X = \|(E - G_{nm}^{-1}\Phi_{nm} G) G^{-1} y\|_X \leq \|E - G_{nm}^{-1}\Phi_{nm} G\|_{X\to X} \rho(G^{-1}y, X_{nm})_X \leq$$
$$\leq \{1 + \|G_{nm}^{-1}\|_{Y_{nm}\to X_{nm}} \|\Phi_{nm}\|_{Y\to Y_{nm}} \|G\|_{X\to Y}\} E_{nm}(G^{-1}y)_X.$$

Отсюда и из соотношений (19), (8), (12) получаем оценку

$$\|G^{-1}y - G_{nm}^{-1}\Phi_{nm} y\|_X = \|(E - G_{nm}^{-1}\Phi_{nm} G) G^{-1} y\|_X \leq$$
$$\leq \left\{1 + a_0 a_3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right\} E_{nm}(G^{-1}y)_X \equiv a_4 E_{nm}(G^{-1}y)_X. \tag{20}$$

В силу (8) и (19) уравнения (7) и (13) эквивалентны операторным уравнениям второго рода соответственно

$$Kx \equiv x + G^{-1}Tx = G^{-1}y \quad (x, G^{-1}y \in X), \tag{21}$$

$$K_{nm}x_{nm} \equiv x_{nm} + G_{nm}^{-1}\Phi_{nm}Tx_{nm} = G_{nm}^{-1}\Phi_{nm}y \quad (x_{nm}, G_{nm}^{-1}\Phi_{nm}y \in X_{nm}), \tag{22}$$

где n и $m \in \mathbb{N}$. Покажем близость этих уравнений в смысле ([9], гл. I; а также [10]). Для их правых частей в силу (20) имеем

$$\delta_{nm} \equiv \|G^{-1}y - G_{nm}^{-1}\Phi_{nm}y\|_X \le a_4 E_{nm}(G^{-1}y)_X. \tag{23}$$

Из (20)–(23) для любого $x_{nm} \in X_{nm}$ $(x_{nm} \neq 0)$ находим

$$\begin{aligned}\|Kx_{nm} - K_{nm}x_{nm}\|_X &= \|G^{-1}Tx_{nm} - G_{nm}^{-1}\Phi_{nm}Tx_{nm}\|_X = \\ &= \|(E - G_{nm}^{-1}\Phi_{nm}G)G^{-1}Tx_{nm}\|_X \le \|x_{nm}\|_X \|(E - G_{nm}^{-1}\Phi_{nm}G)G^{-1}Tz_{nm}\| \le \\ &\le \|x_{nm}\|_X \cdot a_4 E_{nm}(G^{-1}Tz_{nm})_X, \quad z_{nm} = \frac{x_{nm}}{\|x_{nm}\|_X}.\end{aligned} \tag{24}$$

Обозначим через $S = S(0,1)$ единичный шар пространства X с центром в нулевой точке пространства X. Тогда из (24) находим

$$\varepsilon_{nm} \equiv \|K - K_{nm}\|_{X_{nm} \to X} \le a_4 \varepsilon'_{nm}, \tag{25}$$

где в силу теоремы И.М. Гельфанда ([6], с. 322–323)

$$\varepsilon'_{nm} = \sup_{z \in S(0,1)} E_{nm}(G^{-1}Tz)_X = E_{nm}(G^{-1}TS)_X = \rho(G^{-1}TS, X_{nm})_X \to 0 \ \ (n, m \to \infty)$$

ввиду полной непрерывности оператора $T : X \to Y$ и следующей отсюда компактности множества $G^{-1}TS$ в пространстве X.

Как видно из равенства $K = G^{-1}A$, оператор $K : X \to X$ непрерывно обратим и

$$K^{-1} = A^{-1}G, \quad \|K^{-1}\|_{X \to X} \le \|A^{-1}\|_{Y \to X} \|G\|_{X \to Y} \le a_0 a_1 < \infty, \tag{26}$$

а из (23)–(25)

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \delta_{nm} = 0, \quad \lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \varepsilon_{nm} = 0. \tag{27}$$

В силу (26), (27) к уравнениям (21) и (22) применима лемма 2.1 ([4], гл. I), согласно которой операторы $K_{nm} = G_{nm}^{-1}A_{nm} : X_{nm} \to X_{nm}$ непрерывно обратимы при всех n и $m \in \mathbb{N}$ хотя бы достаточно больших и

$$\|K_{nm}^{-1}\|_{X_{nm} \to X_{nm}} = \|(G_{nm}^{-1}A_{nm})^{-1}\|_{X_{nm} \to X_{nm}} \le a_5 < \infty, \tag{28}$$

где a_5 — положительная постоянная, не зависящая от n и $m \in \mathbb{N}$, причем

$$\|x^* - x_{nm}^*\|_X = \|K^{-1}G^{-1}y - K_{nm}^{-1}G_{nm}^{-1}\Phi_{nm}y\|_X = O(\varepsilon_{nm} + \delta_{nm}) \to 0 \quad (n \text{ и } m \to \infty). \tag{29}$$

Теперь докажем справедливость оценки (6). В силу (28) операторы $A_{nm} = G_{nm}K_{nm} : X_{nm} \to Y_{nm}$ непрерывно обратимы хотя бы при достаточно больших n и $m \in \mathbb{N}$, причем благодаря (19) и (28) имеем

$$\|A_{nm}^{-1}\|_{Y_{nm} \to X_{nm}} \le \|K_{nm}^{-1}\|_{X_{nm} \to X_{nm}} \|G_{nm}^{-1}\|_{Y_{nm} \to X_{nm}} \le a_3 a_5 \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = a_6 < \infty, \tag{30}$$

где a_6 — положительная постоянная, не зависящая от n и m.

В силу (8) и (30) к уравнениям (7) и (13) применима лемма 2.2 ([4], гл. I), согласно которой справедливы оценки

$$\|x^* - x_{nm}^*\|_X = \|A^{-1}y - A_{nm}^{-1}\Phi_{nm}y\|_X \le \|E - A_{nm}^{-1}\Phi_{nm}A\|_{X \to X} \|x^* - \overline{x}_{nm}\|_X, \tag{31}$$

где $\overline{x}_{nm}$ — произвольный элемент из X_{nm}. Из (8), (12), (12°), (30) и (31) путем подходящего подбора элементов $\overline{x}_{nm} \in X_{nm}$ находим требуемую оценку (6).

Для завершения доказательства теоремы осталось показать справедливость тождества (14). Это мы сделаем с помощью соответствующих результатов ([7], гл. I). Представим функцию $x(s,\sigma) \in X$ в виде ряда

$$x(s,\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(x) e^{i(ks+j\sigma)}, \quad x \in X. \tag{32}$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(x;s,\sigma) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\xi,\eta) \ln \left| \sin \frac{\xi - s}{2} \right| \ln \left| \sin \frac{\eta - \sigma}{2} \right| d\xi \, d\eta = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(x) \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k\xi+j\eta)} \ln \left| \sin \frac{\xi - s}{2} \right| \ln \left| \sin \frac{\eta - \sigma}{2} \right| d\xi \, d\eta = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(x) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\xi} \ln \left| \sin \frac{\xi - s}{2} \right| d\xi \right\} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\eta} \ln \left| \sin \frac{\eta - \sigma}{2} \right| d\eta \right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(x) \lambda_k e^{iks} \lambda_j e^{ij\sigma} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_k \lambda_j c_{kj}(x) e^{i(ks+j\sigma)}, \quad x \in X, \end{aligned} \tag{33}$$

где $\lambda_r = \{-\ln 2$ при $r = 0$; $-\frac{1}{2|r|}$ при $r = \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Отсюда

$$\Phi_{nm}(Gx;s,\sigma) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} \lambda_k \lambda_j c_{kj}(x) e^{i(ks+j\sigma)}, \quad x \in X. \tag{34}$$

С другой стороны, из (32) и (33) в силу произвольности функции $x \in X$ находим

$$\Phi_{nm}(x;s,\sigma) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} c_{kj}(x) e^{i(ks+j\sigma)},$$

$$G(\Phi_{nm}x;s,\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_k \lambda_j c_{kj}(\Phi_{nm}x) e^{i(ks+j\sigma)} = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} \lambda_k \lambda_j c_{kj}(x) e^{i(ks+j\sigma)}; \tag{35}$$

здесь при доказательстве (35) использованы также следующие легко проверяемые соотношения:

$$c_{kj}(\Phi_{nm}x) = \begin{cases} c_{kj}(x) & \text{при } |k| \le n, \ |j| \le m; \\ 0 & \text{при } |k| \ge n+1, \ |j| \ge m+1; \\ 0 & \text{при } |k| \le n, \ |j| \ge m+1; \\ 0 & \text{при } |k| \ge n+1, \ |j| \le m. \end{cases}$$

Из (34) и (35) следует тождество (14). □

3. Некоторые замечания и дополнения

Как видно из доказательства теоремы, погрешность исследуемого метода для уравнения (1) может быть оценена с помощью неравенств (6) и (23). Кроме того, из тождества $x^* = G^{-1}y + G^{-1}Tx^*$ и неравенства (6) находим оценку

$$\|x - x_{nm}^*\|_X = O\{E_{nm}(G^{-1}y)_X + E_{nm}(G^{-1}Tx^*)_X\}, \tag{36}$$

очевидно, более удобную, чем (6) и (29).

Неравенства (6), (29), (36) и известные результаты по теории приближений сплайнами [11], [12] позволяют определить скорость сходимости метода (1)–(4). В частности, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функции* $y(s,\sigma)$ *и* $h(s,\sigma;\xi,\eta)$ *таковы, что решение* $x^*(s,\sigma)$ *уравнения* (1) *удовлетворяет условию*

$$x^*(s,\sigma) \in W_2^{r,l} \quad (r = 1 \text{ или } 2,\ l = 1 \text{ или } 2). \tag{37}$$

Тогда в условиях теоремы 1 *метод* (1)–(4) *сходится в пространстве* $X = L_2([-\pi,\pi]^2)$ *со скоростью*

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_X = O\left(\frac{1}{n^r} + \frac{1}{m^l}\right). \tag{38}$$

Доказательство. Сначала отметим следующую весьма удобную для приложений оценку:

$$E_{nm}(f)_X = \rho(f, X_{nm})_X \le E_{n,\infty}(f) + E_{\infty,m}(f), \tag{39}$$

где

$$E_{n,\infty}(f) = \inf_{\alpha_k(\sigma)\in Z} \left\| f(s,\sigma) - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k(\sigma)\varphi_{kn}(s) \right\|_X,$$

$$E_{\infty,m}(f) = \inf_{\beta_j(s)\in Z} \left\| f(s,\sigma) - \sum_{j=-m}^{m} \beta_j(s)\varphi_{jm}(\sigma) \right\|_X,$$

а $Z = L_2[-\pi,\pi]$ с обычной нормой. Заметим, что оценка (39) доказывается по аналогии с формулой С.Н. Бернштейна [13], устанавливающей связь между полными и частными наилучшими среднеквадратическими приближениями посредством *тригонометрических полиномов.*

Из соотношений (6) и (39) следует оценка

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_X = O\{E_{n,\infty}(x^*)_X + E_{\infty,m}(x^*)_X\}. \tag{40}$$

Введем функции (так называемые “полусплайны”)

$$P_{n,\infty}(x^*; s,\sigma) = \sum_{k=-n}^{n} x^*(s_{kn},\sigma)\varphi_{kn}(s), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{41}$$

$$P_{\infty,m}(x^*; s,\sigma) = \sum_{j=-m}^{m} x^*(s,\sigma_{jm})\varphi_{jm}(s), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{42}$$

где узлы определены в (3). Тогда имеем

$$E_{n,\infty}(x^*)_X \le \|x^* - P_{n,\infty}x^*\|_X, \quad E_{\infty,m}(x^*)_X \le \|x^* - P_{\infty,m}x^*\|_X. \tag{43}$$

Из (40)–(43) получаем оценку

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_X = O\{\|x^* - P_{n,\infty}x^*\|_X + \|x^* - P_{\infty,m}x^*\|_X\}. \tag{44}$$

В силу (37) функция $x^*(s,\sigma) \in W_2^r$ по переменной s равномерно относительно $\sigma \in \mathbb{R}$ и $x^*(s,\sigma) \in W_2^l$ по переменной σ равномерно относительно $s \in \mathbb{R}$. Поэтому из известных результатов по приближению сплайнами [11], [12] получаем

$$\|x^* - P_{n,\infty}x^*\|_X = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad \|x^* - P_{\infty,m}x^*\|_X = O\left(\frac{1}{m^l}\right). \tag{45}$$

Из (44) и (45) следует требуемая оценка (38). $\square$

Следует отметить, что при $r = l = 2$ из (38) получаем оценку

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_X = O\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right), \tag{46}$$

которая не может быть улучшена в смысле порядка ни при каком улучшении дифференциальных свойств функций $y(s,\sigma)$ и $h(s,\sigma;\xi,\eta)$. Поэтому при наличии у $x^*(s,\sigma)$ более хороших дифференциальных свойств, чем в теореме 2, для получения более сильных, чем (46), оценок необходимо использовать приближения сплайнами более высоких степеней.

Теорема 3. *Пусть* $n \asymp m$ *и выполнено условие* (37) *при* $r = l = 2$. *Тогда в условиях теоремы* 1 *метод* (1)–(4) *сходится равномерно со скоростью*

$$\max_{s,\sigma} |x^*(s,\sigma) - x^*_{nm}(s,\sigma)| = O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{47}$$

Доказательство. Поскольку

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_X = O\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right), \tag{48}$$

то

$$x^* - x^*_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^*_{2^k n, 2^k m} - x^*_{2^{k-1} n, 2^{k-1} m}), \tag{49}$$

где ряд сходится по крайней мере в пространствах $X = L_2([-\pi,\pi]^2)$. По аналогии с одномерным случаем [5] нетрудно показать, что для любого $x_{nm} \in X_{nm}$

$$\|x_{nm}\|_C = O(\sqrt{nm})\|x_{nm}\|_X, \tag{50}$$

где $C = C([-\pi,\pi]^2)$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций от двух переменных с обычной нормой. Из (48)–(50) последовательно находим

$$\begin{aligned}
\|x^* - x^*_{nm}\|_C &\le \sum_{k=1}^{\infty} \|x^*_{2^k n, 2^k m} - x^*_{2^{k-1} n, 2^{k-1} m}\|_C = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} O(\sqrt{2^k n \cdot 2^k m})\|x^*_{2^k n, 2^k m} - x^*_{2^{k-1} n, 2^{k-1} m}\|_X \le \\
&\le O(\sqrt{nm}) \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \{\|x^* - x^*_{2^k n, 2^k m}\|_X + \|x^* - x^*_{2^{k-1} n, 2^{k-1} m}\|_X\} = \\
&= O(\sqrt{nm}) \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left\{O\left(\frac{1}{(2^k n)^2} + \frac{1}{(2^k m)^2}\right)\right\} = \\
&= O(\sqrt{nm}) O\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = O\left\{\sqrt{nm}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{51}$$

Поскольку $n \asymp m$, то из (51) следуют оценки (47). □

Теорема 4. *В условиях теоремы* 1 *невязка* $r_{nm} = y - Ax^*_{nm}$ *метода* (1)–(4) *сходится при* $n \to \infty$ *и* $m \to \infty$ *равномерно со скоростью*

$$\max_{s,\sigma} |r_{nm}(s,\sigma)| = O\{E_{nm}(x^*)_X\}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1

$$\|r_{nm}\|_C = \|y - Ax^*_{nm}\|_C = \|A(x^* - x^*_{nm})\|_C \le \|A\|_{X\to C}\|x^* - x^*_{nm}\|_X = \|A\|_{X\to C} O\{E_{nm}(x^*)_X\}.$$

Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что оператор A, определенный в (1) и (7), удовлетворяет неравенству

$$\|A\|_{X\to C} \le a_7 = \mathrm{const} < \infty, \tag{52}$$

что может быть сделано различными способами. Например, можно воспользоваться тем фактом, что пространство $Y = W_2^{1,2,1}$, введенное выше, непрерывно вложено в пространство $C = C([-\pi,\pi]^2)$; тогда для любой функции $x \in X$ имеем

$$\|Ax\|_C \le a_8\|Ax\|_Y \le a_8\|A\|_{X\to Y}\|x\|_X, \tag{53}$$

откуда следует оценка (52) с постоянной $a_7 = a_8\|A\|_{X\to Y}$. $\square$

Постоянная a_7 в теореме 4 является завышенной, а в приложениях требуется более точная оценка, чем (53). Поэтому можно воспользоваться формулой

$$a_7 = 2 + \|h\|_{C([-\pi,\pi]^4)}. \tag{54}$$

Для получения (54) заметим, что для любой функции $x \in X$ с помощью неравенства Буняковского–Коши равномерно относительно $(s,\sigma) \in \mathbb{R}^2$ находим

$$\begin{aligned}
|A(x;s,\sigma)| &\le |G(x;s,\sigma)| + |T(x;s,\sigma)| \le \\
&\le \|x\|_X \left[\left\{ \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^2\left|\sin\frac{\xi - s}{2}\right| \ln^2\left|\sin\frac{\eta-\sigma}{2}\right| d\xi\, d\eta \right\}^{1/2} + \right. \\
&\left. + \left\{ \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(s,\sigma;\xi,\eta)|^2 d\xi\, d\eta \right\}^{1/2} \right] \le \|x\|_X\{M + \|h\|_{C([-\pi,\pi]^4)}\},
\end{aligned} \tag{55}$$

где с учетом периодичности имеем

$$\begin{aligned}
M &= \left\{ \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^2\left|\sin\frac{\xi - s}{2}\right| \ln^2\left|\sin\frac{\eta-\sigma}{2}\right| d\xi\, d\eta \right\}^{1/2} = \\
&= \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^2\left|\sin\frac{\xi - s}{2}\right| d\xi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^2\left|\sin\frac{\eta-\sigma}{2}\right| d\eta \right\}^{1/2} = \\
&= \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^2\left|\sin\frac{s}{2}\right| ds \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^2\left|\sin\frac{\sigma}{2}\right| d\sigma \right\}^{1/2} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^2\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln^2 \sin t\, dt \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln^2\left(\frac{2}{\pi}t\right) dt = \int_0^1 \ln^2 t\, dt = 2.
\end{aligned} \tag{56}$$

Из соотношений (55) и (56) следует оценка (52) с постоянной a_7, определенной в (54).

В заключение рассмотрим применение сплайн-тригонометрического метода Галёркина к решению двумерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$(Bx)(s,\sigma) \equiv x(s,\sigma) + \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma;\xi,\eta)x(\xi,\eta)d\xi\, d\eta = y(s,\sigma), \quad -\infty < s,\sigma < \infty, \tag{57}$$

где $y(s,\sigma) \in L_2([-\pi,\pi]^2)$, $h(s,\sigma;\xi,\eta) \in L_2([-\pi,\pi]^4)$ — известные функции, а $x(t,\tau) \in L_2([-\pi,\pi]^2)$ — искомая функция.

Согласно исследуемому методу приближенное решение уравнения (57) ищется в виде сплайна (2), коэффициенты которого определяются из СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m} \alpha_{kj}\{c_{rl}(\varphi_{kn}\varphi_{jm}) + c_{rl}(T\varphi_{kn}\varphi_{jm})\} = c_{rl}(y), \quad r = \overline{-n,n}, \quad l = \overline{-m,m}; \tag{58}$$

здесь оператор T, определенный в (7), рассматривается как оператор из пространства $X = L_2([-\pi,\pi]^2) \equiv L_2$ в то же пространство $Y = L_2$.

Для вычислительной схемы (2), (3), (57), (58) справедлива

Теорема 5. *Пусть уравнение* (57) *имеет единственное решение* $x^*(x,\sigma) \in L_2$ *при любой правой части* $y(s,\sigma) \in L_2$. *Тогда при всех* n *и* $m \in \mathbb{N}$ *хотя бы достаточно больших СЛАУ* (58) *имеет единственное решение* α^*_{kj} $(k = \overline{-n,n},\ j = \overline{-m,m})$. *Приближенные решения* $x^*_{nm}(s,\sigma)$, *определяемые по формуле* (2^*), *сходятся при* $n \to \infty$, $m \to \infty$ *к точному решению* $x^*(s,\sigma)$ *в пространстве* L_2 *со скоростью*

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_{L_2} = O\{E_{nm}(x^*)_{L_2}\}. \tag{59}$$

Доказательство проводим по схеме доказательства теоремы 1, полагая $G = E : X \to X$, $G_{nm} = \Phi_{nm} : X_{nm} \to Y_{nm}$, где подпространство X_{nm} определяется так же, как и в § 2, а Y_{nm} — множество двумерных тригонометрических полиномов указанного в § 2 вида, но наделенное нормой пространства L_2. Поэтому $X_{nm} \neq Y_{nm}$, несмотря на то, что $X = Y$.

Нетрудно показать, что уравнения (57) и (58) эквивалентны операторным уравнениям соответственно

$$Bx \equiv x + Tx = y \quad (x, y \in X = L_2), \tag{60}$$

$$B_{nm}x_{nm} = \Phi_{nm}x_{nm} + \Phi_{nm}Tx_{nm} = \Phi_{nm}y \quad (x_{nm} \in X_{nm}, \quad \Phi_{nm}y \in Y_{nm}), \tag{61}$$

где оператор Φ_{nm}, определенный в (11), рассматривается как оператор в пространстве $X = L_2([-\pi,\pi]^2)$.

Как видно из соотношений (17), для любого $x_{nm} \in X_{nm}$ справедливо неравенство

$$\|G_{nm}x_{nm}\|_X = \|\Phi_{nm}x_{nm}\|_X \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \|x_{nm}\|_X. \tag{62}$$

Поэтому для любых n и $m \in \mathbb{N}$ операторы $G_{nm} = \Phi_{nm} : X_{nm} \to Y_{nm}$ непрерывно обратимы и

$$\|G^{-1}_{nm}\|_{Y_{nm}\to X_{nm}} = \|\Phi^{-1}_{nm}\|_{Y_{nm}\to X_{nm}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (n, m \in \mathbb{N}). \tag{63}$$

Тогда уравнение (61) эквивалентно уравнению

$$C_{nm}x_{nm} \equiv x_{nm} + G^{-1}_{nm}\Phi_{nm}Tx_{nm} = G^{-1}_{nm}\Phi_{nm}y \quad (x_{nm}, G^{-1}_{nm}\Phi_{nm}y \in X_{nm}). \tag{64}$$

Далее, как и выше, доказывается близость уравнений (60) и (64) в смысле ([9], гл. 1)

$$\delta_{nm} \equiv \|y - G^{-1}_{nm}\Phi_{nm}y\|_{L_2} = O\{E_{nm}(y)_{L_2}\} \to 0 \quad (n \text{ и } m \to \infty), \tag{65}$$

$$\varepsilon_{nm} \equiv \|T - G^{-1}_{nm}\Phi_{nm}T\|_{X_{nm}\to X} \to 0 \quad (n \text{ и } m \to \infty). \tag{66}$$

В силу (60)–(66) дальше доказательство завершается по схеме доказательства теоремы 1. □

Скорость сходимости метода устанавливает следующая

Теорема 6. *Пусть функции*

$$y(s,\sigma) \in W^{r,l}([-\pi,\pi]^2), \quad h(s,\sigma;\xi,\eta) \in W^{r,l}([-\pi,\pi]^2) \otimes L_2([-\pi,\pi]^2),$$

где $r = 1$ *или* 2, $l = 1$ *или* 2. *Тогда в условиях теоремы* 5 *метод* (2), (3), (57), (58) *сходится в пространстве* $L_2([-\pi,\pi]^2)$ *со скоростью*

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_{L_2} = O\left(\frac{1}{n^r} + \frac{1}{m^l}\right); \tag{67}$$

если же $n \asymp m$, то при $r = l = 2$ метод сходится равномерно со скоростью

$$\max_{s,\sigma} |x^*(s,\sigma) - x^*_{nm}(s,\sigma)| = O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{68}$$

Доказательство. В условиях теоремы нетрудно показать, что решение $x^*(s,\sigma)$ уравнения (57) удовлетворяет соотношению (37). Тогда из (59) и результатов теории приближений сплайнами [11], [12] получаем оценку (67). Оценка (68) выводится из оценки (67) по аналогии с теоремой 3. $\square$

Следует отметить, что равномерная сходимость исследуемого метода как для уравнения (1), так и для уравнения (57) имеет место лишь при жестких ограничениях на коэффициенты решаемых уравнений. Этого недостатка лишена, например, следующая модернизация метода.

Следуя [14], за приближенное решение уравнения (57) примем функцию

$$\widetilde{x}_{nm}(s,\sigma) = y(s,\sigma) - T(x^*_{nm}; s,\sigma), \tag{69}$$

где сплайн $x^*_{nm}(s,\sigma)$ построен выше. Тогда справедлива

Теорема 7. *Пусть ядро $h(s,\sigma;\xi,\eta)$ таково, что оператор $T : L_2([-\pi,\pi]^2) \to C([-\pi,\pi]^2)$ ограничен. Тогда в условиях теоремы 5 приближенные решения (69) равномерно сходятся к точному решению $x^*(s,\sigma)$ уравнения (57) со скоростью*

$$\max_{s,\sigma} |x^*(s,\sigma) - \widetilde{x}_{nm}(s,\sigma)| = O\{E_{nm}(x^*)_X\}.$$

Доказательство. Из (57) при $x = x^*(s,\sigma)$ и (69) находим

$$\|x^* - x^*_{nm}\|_{C([-\pi,\pi]^2)} = \|T(x^* - x^*_{nm})\|_{C([-\pi,\pi]^2)} \le \|T\|_{L_2 \to C} \|x^* - x^*_{nm}\|_{L_2}. \tag{70}$$

Поэтому из (59) и (70) получаем требуемое утверждение. $\square$

Литература

1. Arnold D.N. *A spline-trigonometric Galerkin method and an exponentially convergent boundary integral method* // Math. Comput. – 1983. – V. 41. – № 164. – P. 383–397.
2. Валеева Р.Т. *Сплайн-тригонометрический метод Галёркина решения интегральных уравнений* / Казанск. гос. ун-т. – Казань, 1992. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.09.92, № 2726-Б92.
3. Валеева Р.Т. *Аппроксимативные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений первого рода*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1995. – 108 с.
4. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
5. Габдулхаев Б.Г. *Об одном оптимальном сплайн-методе решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 2. – С. 23–36.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 744 с.
7. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I *рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
8. Сурай Л.А. *Прямые методы решения интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1994. – 131 с.
9. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
10. Габдулхаев Б.Г. *К численному решению полных сингулярных интегральных уравнений* // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложения. – Чебоксары, 1988. – С. 138–146.
11. Марчук Г.И., Агошков В.И. *Введение в проекционно-сеточные методы.* – М.: Наука, 1981. – 416 с.
12. Корнейчук Н.П. *Сплайны в теории приближения.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.

13. Бернштейн С.Н. *О наилучшем приближении функций нескольких переменных посредством многочленов и тригонометрических сумм.* – Собр. соч. Т. 2. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – С. 540–545.
14. Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа.* – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

Казанский государственный педагогический университет

Казанская государственная сельскохозяйственная академия

Поступила
26.09.2001